# АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

# 10-11

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ $\quad$ $tg a \, ctg a = 1$

$a^x a^y = a^{x+y}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^0 = 1$

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a x^p = p \log_a x$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

# АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

ОРТО МЕКТЕПТИН 10–11-КЛАССТАРЫ
ҮЧҮН ОКУУ КИТЕБИ

**А.Н. КОЛМОГОРОВДУН редакциялоосунда**

*Кыргыз Республикасынын Билим жана маданият министрлиги сунуш кылган*

2-басылышы

БИШКЕК
«МЕКТЕП»
2003

ББК 22. 14 я 721
А45

«Акыл» АА/К — «Кыргызстан» Басма Үйү
2000-жылы Бельгия өлкөсүнүн борбору
Брюсселде «EMRC» — ЕВРОПАЛЫК сапат
сертификатына ээ болгон

1-басылышы 1992-жылы чыккан

Авторлору: *А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд*

Которгондор: *Ж. Саламатов (III главага чейин), К. Бараталиев (III главадан аягына чейин)*

Окуу китеби жалпы билим берүүчү орто мектептин окуу китептеринин мурдагы Бүткүл союздук конкурсунда сыйлыкка татыктуу болгон

А $\frac{4306020503-186}{М\ 452\ (17)-2003}$ 2003

ISBN 5-655-01494-7





## КИРИШ СӨЗ

Силер жаңы сабакты окуй баштадыңар. Анын аталышындагы «алгебра» деген сөз, курстун айрым бөлүктөрү менен силердин тааныш экендигиңерди көрсөтүп турат. Мурунку жылдардагыдай эле, «тамгалуу эсептөөлөргө» — туюнтмаларды өзгөртүп түзүүлөргө, теңдемелерди, барабарсыздыктарды, алардын системаларын түзүүгө жана чыгарууга дээрлик көңүл бурулат. Буга чейин белгилүү болгон көп мүчөлөр, рационалдык бөлчөктөр, даражалар жана тамырлар менен байланышкан маселелерди чыгаруу менен катар, силерге алгебранын колдонулуш областтарын кеңейтүүгө туура келет. Тригонометриядан жаңы маалыматтар, логарифм жөнүндөгү ж.б.маалыматтар киргизилет. Курстун накта жаңы бөлүгү анализдин башталышын үйрөнүүгө арналган. Математикалык анализ (же жөн эле анализ —XVIII жүз жылдыкта түзүлгөн жана негизги эки бөлүктү: дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдү өзүнө камтыган математиканын тармагы. Анализ көптөгөн математиктердин (биринчи кезекте И. Ньютондун жана Г. Лейбництин) аракеттеринен улам пайда болгон жана табият таануунун өнүгүшүндө эбегейсиз роль ойноду—ар түрдүү колдонмо маселелерди чыгарууда кезигүүчү функцияларды изилдөө үчүн кубаттуу, жетишерлик универсалдуу ыкма пайда болду. Анализдин баштапкы түшүнүктөрү жана ыкмалары (туунду, дифференцирлөө, баштапкы функция, интеграл, функциянын максимумдарын жана минимумдарын издөө ыкмасы) менен таанышуу — курстун маанилүү максаттарынын бири. Адатта анализ жогорку математикага тиешелүү экендигин кошумчалай кетмекчибиз. Анализдин элементтери мектептин курсуна салыштырмалуу кийинки жылдарда эле киргизилди.

Окуу китебин кандайча пайдалануу жөнүндөгү айрым эскертүүлөр. Китептин аягындагы мазмун жана сабактык көрсөтмө, силерге керектүү болгон бөлүмдү, аныктаманы же теореманы тез табууга жардам берет. Көнүгүүлөргө карата көрсөтмөлөр жана алардын жооптору тиешелүү бөлүмдө берилди. Сунуш этилген маселелерди чыгаруунун негизги идеялары менен таанышуу үчүн, көптөгөн мисалдардын чыгарылыштары ○ жана ● белгилери менен бөлүнүп берилген. Ошондой эле, канааттандыраарлык баа алуу үчүн, ар бир пункттагы горизонталь сызыкка чейин киргизилген маселелерди чыгара билүү зарыл экендигин белгилейбиз; бул маселелер даярдыктын милдеттүү деңгээлин беришет. Сызыктан кийинки маселелер бир аз татаалыраак.

Силерге, текшерүү ишке даярданууга жардам берүү үчүн ар бир главанын аягында негизги материалды кайталоого суроолор жана маселелер келтирилген. Ал суроолордун жоопторун жана андай маселелердин чыгарылыштарын тиешелүү пункттардагы тексттен таба аласыңар.

Үйрөнүлүп жаткан түшүнүктөрдүн, терминдердин жана белгилердин (символдордун) пайда болушу, математикалык анализди түзүшкөн адамдар жөнүндө, окуу китебинин ар бир төрт главасынын аягындагы «Тарыхтан маалыматтар» деген бөлүктү окуу аркылуу биле аласыңар.

Окуу китебинин айрым пункттарында теориялык мүнөздөгү кошумча материалдар камтылган, алар ▽ жана ▲ белгилери менен бөлүнүп коюлган.

Мектепти аяктоодо силерге бүтүрүү экзамендерин берүүгө туура келет. Орто мектеп үчүн теориялык материал «Математика. Маалымдоо материалдары» китебинде кыскача баяндалгандыгы белгилүү. Курсту кайталоо үчүн практикалык көнүгүүлөр «Кайталоого маселелер» деген корутунду главага жайлаштырылган.

## ОКУУ КУРАЛЫНДА КЕЗИГҮҮЧҮ БЕЛГИЛӨӨЛӨР

| | | | |
|---|---|---|---|
| $N$ | — бардык натуралдык сандардын көптүгү | $\Delta x$ | — $x$ аргументинин өсүндүсү |
| $Z$ | — бардык бүтүн сандардын көптүгү | $\Delta f(x_0)$, $\Delta f$ | — $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги өсүндүсү |
| $Z_0$ | — бардык терс эмес бүтүн сандардын көптүгү | $f'(x_0)$ | — $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусу |
| $Q$ | — бардык рационалдык сандардын көптүгү | | |
| $R$ | — бардык чыныгы сандардын көптүгү, сан түз сызыгы | sin<br>cos<br>tg | — синус функциясы<br>— косинус функциясы<br>— тангенс функциясы |
| $[a; b]$ | — учтары $a$ жана $b$ $(a < b)$ болгон туюк аралык (кесинди) | ctg<br>$e$ | — котангенс функциясы<br>— $e$ саны $(e^x)' = e^x$ болгон көрсөткүчтүү функциянын негизи |
| $(a; b)$ | — учтары $a$ жана $b$ $(a < b)$ болгон ачык аралык (интервал) | $\log_a$ | — негизи $a$ болгон логарифм |
| $(a; b]$, $[a; b)$ | — учтары $a$ жана $b$ $(a < b)$ болгон жарым ачык аралык | lg<br>ln | — ондук логарифм<br>— натуралдык логарифм (негизи $e$ болгон логарифм) |
| $(a;\infty)$,<br>$[a;\infty)$,<br>$(-\infty; b)$,<br>$(-\infty; b)$, | — чексиз аралыктар | $\max\limits_{[a;\, b]} f$ | — $f$ функциясынын $[a; b]$ кесиндисиндеги эң чоң мааниси |
| $(-\infty; \infty)$ | — чексиз аралык, сан түз сызыгы | $\min\limits_{[a;\, b]} f$ | — $f$ функциясынын $[a; b]$ кесиндисиндеги эң кичине мааниси |
| $\bar{a}$ | — вектордун белгилениши | | |
| $(a-\delta; a+\delta)$ | — бул $a$ чекитинин $\delta$ аймагы | $\int_a^b f(x)dx$ | — $f$ функциясынын $a$ дан $b$ га чейинки пределдердеги интегралы |
| $[x]$ | — $x$ санынын бүтүн бөлүгү | | |
| $\{x\}$ | — $x$ санынын бөлчөк бөлүгү | | |
| $\lvert x \rvert$ | — $x$ санынын модулу (абсолюттук чоңдугу) | arcsin $a$ | — $a$ санынын арксинусу |
| $f(x)$ | — $f$ функциясынын $x$ чекитиндеги мааниси | arccos $a$ | — $a$ санынын арккосинусу |
| $D(f)$ | — $f$ функциясынын аныкталуу областы | arctg $a$ | — $a$ санынын арктангенси |
| $E(f)$ | — $f$ функциясынын маанилеринин областы | arcctg $a$ | — $a$ санынын арккотангенси |





**I глава**

# ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

## § 1. САН АРГУМЕНТТҮҮ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

### 1. Синус, косинус, тангенс жана котангенс (кайталоо)

**1. Радиандык чен.** Силер бурчтардын — радиандык чени менен таанышсыңар. 1 *радиандагы* бурч — жаасынын узундугу айлананын радиусуна барабар болгон борбордук бурч (1-сүрөт). Радиандык жана градустук чендер $180^\circ = \pi$ радиан көз карандылыгы менен байланышкан; $n^\circ$ тагы бурч $\frac{\pi n}{180}$ радианга барабар.

Бурчтарды радиандык өлчөөдө бир катар формулалар жөнөкөйлөшөт. Алсак, радиусу $r$ болгон айлана үчүн анын жаасынын $\alpha$ радиандагы $l$ узундугу

$$l = \alpha r \qquad (1)$$

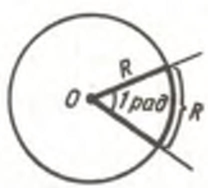
формуласы менен табылат; радиусу $r$ болгон тегеректин жаасы $\alpha$ радиандан турган сектордун $S$ аянты төмөнкүдөй болот:

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \qquad (2)$$

Жаасы градустук чен менен ( $n^\circ$ чоңдук менен) өлчөнгөн айлананын жаасынын узундугун жана сектордун аянтын эсептөөчү $l = \frac{\pi r n}{180}$ жана $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$ формулаларга караганда, (1) жана (2) формулалары жөнөкөй. Радиандык чендин бир катар артыкчылыктарынын болушу (17-пунктту да кара), тригонометрияда градустук чендин ордуна радиандык ченди пайдаланууга алып келген.

Силер алгебра курсунан, $\alpha$ радиан бурчка буруу кандай аныктала тургандыгын билесиңер, мында $\alpha$ — каалагандай чыныгы сан. $\alpha$ нын ($\alpha$ — бурч же сан) синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин аныктамалары да силерге тааныш.

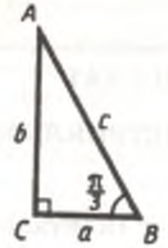
○ 1-м и с а л. $\frac{\pi}{3}$ бурчунун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин табабыз.



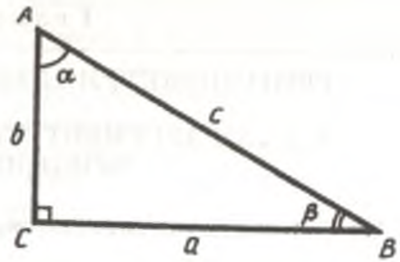
1-сүрөт

Тик бурчтуу үч бурчтуктагы $30^\circ$ бурчтун каршысында жаткан катет $c$ гипотенузасынын жарымына барабар (2-сүрөт). $c = 1$ болгондуктан, төмөнкүнү табабыз:

$$a = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$




2-сүрөт




3-сүрөт

Ошондуктан $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ●

Жалпысынан, $\alpha$ тар бурчунун негизги тригонометриялык функцияларынын маанилери, геометрия курсундагы сыяктуу эле табылышы мүмкүн (3-сүрөт):

$$\cos\alpha = \frac{b}{a},\ \sin\alpha = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Каалаган бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин жакындаштырылган маанилери калькулятордун же таблицанын жардамы менен табылат. (Бул жерде жана мындан ары В.М. Брадистин «Төрт орундуу математикалык таблицалары» жөнүндө сөз болуп жатат.) Каалаган бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин силерге белгилүү формулаларды пайдаланып табуу маселеси $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ болгондогу, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ маанилерин табуута келтирилет. Мисалы, ал жол менен кийинки таблица толтурулушу мүмкүн:

| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ |





**2. Тригонометриянын негизги формулалары.** Синустун, косинустун, тангенстин жана котангенстин аныктамаларынан дароо эле *негизги тригонометриялык теңдештиктер* келип чыгат:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Калган формулаларды чыгаруу үчүн, төмөнкүдөй *кошуунун формулалары* негиз болушат:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta};\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

$\beta = \frac{\pi n}{2}$, мында $n \in \mathbf{Z}$ деп эсептеп, кошуунун формулаларынан

$$\sin(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha),\ \cos(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha),\ \operatorname{tg}(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha),\ \operatorname{ctg}(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha),\ n \in \mathbf{Z}$$

туюнтмаларын өзгөртүп түзүү үчүн *келтируунүн формулаларын* алабыз. Бул формулаларды эске тутуу үчүн, төмөнкү *мнемоникалык (эске тутууну жеңилдетүүчү* деген мааниде, грек сөзү) *эрежени* пайдаланууну ыңгайлуу:

а) *эгерде* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *болсо* (4-сүрөт), *келтирилген функциянын алдына баштапкы функциянын белгиси коюлат;*

б) *эгерде n так болсо, функция «кофункцияга» алмашат, ал эми n жуп болсо, функциянын аты өзгөрбөйт.* (Синус, косинус,


Синустун белгилери

Косинустун белгилери

Тангенстин жана котангенстин белгилери

4-сүрөт

тангенс жана котангенстердин кофункциялары деп, тиешелүү түрдө косинус, синус, котангенс жана тангенс функцияларын айтабыз.) Мисалы:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha; \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha; \qquad \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha \text{ ж.у.с.}$$

Ошондой эле, силерге *синустардын (косинустардын) суммасынын жана айырмасынын формулалары да белгилүү:*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$\alpha=\beta$ деп эсептесек, кошуунун формулаларынан *эки эселенген аргументтин формулалары* чыгарылат:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha; \qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

$\cos 2t=1-2\sin^2 t$ жана $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ формулаларына маанисин коюп, жарым аргументтин формулаларын алабыз:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

○ 2-м и с а л. $\sin\frac{\pi}{12}$ маанисин таблицанын жардамысыз (3) формула боюнча табабыз:

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{12}>0$ болгондуктан, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ барабардыгын алабыз. Жообун жөнөкөйлөтүүгө болот:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \ ●$$





(3) барабардыгын (4) гө мүчөлөп бөлүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (5)$$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ барабардыгынын оң жагынын алымын жана бөлүмүн $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ге көбөйтүп, төмөнкүнү табабыз:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ б.а.}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (6)$$

Ушуга окшош эле, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ барабардыгынын оң жагынын алымын жана бөлүмүн $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ге көбөйтүп, төмөнкү формулага келебиз:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (7)$$

○ 3-м и с а л. $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{8}$ маанисин таблицанын жардамысыз табабыз.

$$\mathrm{tg}^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{1+\cos\frac{5\pi}{4}}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

$\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{8}<\pi$ экендигин байкайбыз. Ошондуктан $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{8}<0$ жана натыйжада $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{8}=-(\sqrt{2}+1)$.

4-м и с а л. Эгерде $\cos\alpha=0{,}8$ жана $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ экендиги белгилүү болсо, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ жана $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ ни табабыз.

$\frac{\alpha}{2}$ бурчу биринчи чейректе, демек, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$. Ошондуктан

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}3162;\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0{,}8}{2}}=\sqrt{0{,}9}\approx 0{,}9487;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333. \; ●$$

### *Көнүгүүлөр*

Ар бир пунктта көнүгүүлөр эки бөлүккө ажыратылган. Горизонталдык сызыкка чейинки берилген маселелер, бул тема боюнча даярдыктын милдеттүү деңгээлин мүнөздөшөт: канааттандыраарлык баа алыш үчүн мындай көнүгүүлөрдү чыгара билиш зарыл. Көпчүлүк учурларда тексттин тиешелүү пункттарында чечмеленген мисалдарды карап чыгып, андай маселелердин чыгарылыш жолдору менен таанышууга болот.

**1.** Төмөнкү бурчтардын чоңдугун радиандык чен менен туюндургула:

а) $45^\circ$, $36^\circ$, $180^\circ$; б) $120^\circ$, $310^\circ$, $360^\circ$;
в) $60^\circ$, $72^\circ$, $270^\circ$; г) $150^\circ$, $216^\circ$, $90^\circ$.

**2.** Төмөнкү бурчтардын чоңдугун градустук чен менен туюндургула:

а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{36}$; б) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{9}$;
в) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\pi$; г) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{12}$.

**3.** Төмөнкү туюнтмалардын сан маанилерин тапкыла:

а) $\sin 0+\cos\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{4}$; б) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\pi+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}$;
в) $6\sin\frac{\pi}{6}-2\cos 0+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$; г) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}$.

**4.** Төмөнкү барабардыктар аткарылыш үчүн жана $\alpha, \beta$ жана $\gamma$ сандарын табууга болобу:

а) $\sin\alpha=-0{,}5$, $\cos\beta=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\gamma=-2{,}5$;
б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta=-2{,}2$, $\operatorname{tg}\gamma=0{,}31$;
в) $\sin\alpha=1{,}3$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma=5{,}2$;
г) $\sin\alpha=-\frac{7}{9}$, $\cos\beta=\sqrt{2{,}5}$, $\operatorname{tg}\gamma=-7{,}5$?



**5.** Бир эле сандын синусу жана косинусу тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар боло алышабы:

а) $-\frac{7}{25}$ жана $\frac{24}{25}$; б) 0,4 жана 0,7;
в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ жана $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ жана $\frac{1}{\sqrt{5}}$?

**6.** Бир эле сандын тангенси жана котангенси тиешелүү түрдө төмөнкү сандарга барабар боло алышабы:

а) $-\frac{3}{5}$ жана $-\frac{5}{3}$; б) $(\sqrt{3}-2)$ жана $(\sqrt{3}+2)$;
в) 2,4 жана $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ жана $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

**7.** Эгерде:

а) $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
в) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

болушса, негизги тригонометриялык функциялардын калган үчөөнүн маанилерин тапкыла.

**8.** Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$; б) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta+\sin\beta}$;
в) $(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\frac{\sin^2 t-1}{\cos^4 t}+\operatorname{tg}^2 t$.

**9.** Төмөнкү туюнтмаларды эсептегиле:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\sin 0{,}2\pi+\sin 0{,}3\pi\cos 0{,}2\pi}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}$.

**10.** Эгерде:

а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;
б) $\cos\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-\frac{8}{17}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$

болсо, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$ жана $\cos(\alpha+\beta)$ ларды эсептегиле.

**11.** Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}$;   б) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos2\alpha}{\sin2\alpha-\sin\alpha}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}$;   г) $\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos2\alpha)+\cos^2\alpha$.

**12.** Берилген туюнтмаларды тиешелүү тригонометриялык функциялардын аргументтери $(0;\ \frac{\pi}{2})$ аралыгына камтылгандай кылып өзгөртүп жазгыла:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos(-\frac{5\pi}{3})$, $\operatorname{tg}0{,}6\pi$, $\operatorname{ctg}(-1{,}2\pi)$;

б) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ $\sin(-\frac{5\pi}{9})$, $\cos1{,}8\pi$, $\operatorname{ctg}0{,}9\pi$.

**13.** Төмөнкү туюнтмалардын сан маанисин тапкыла:

а) $8\sin\frac{\pi}{6}\ \cos\frac{2\pi}{3}\ \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\ \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $\cos^2(\pi-\alpha)\ \operatorname{tg}(\pi+\alpha)\ \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$;

в) $10\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$;

г) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin(\frac{3\pi}{2}+t)}-\cos(2\pi-t)$.

**14.** Төмөнкү барабардыктар тууpaбы:

а) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;   б) $\cos\frac{11\pi}{24}-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{7\pi}{24}$;

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$;   г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$?

**15.** Эгерде:

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;   б) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

в) $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;   г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

болсо, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ни тапкыла.





**16.** Эгерде:

а) $\alpha=0{,}19$;   б) $\alpha=1{,}37$;   в) $\alpha=0{,}9$;   г) $\alpha=1{,}2$

болсо, калькулятордун же таблицанын жардамы менен $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

**17.** Калькулятордун же таблицанын жардамы менен төмөнкүлөрдү:

а) $17^\circ$; $43^\circ\ 24'$; $83^\circ\ 36'$; $72^\circ\ 12'$ бурчтарынын радиандык ченин;

б) 0,384; 0,48; 1,11; 1,48 бурчтарынын градустук ченин тапкыла.

---

**18.** Эгерде жаанын радиандык чени $\alpha$ жана ал жааны камтыган айлананын радиусу $R$ белгилүү болсо, жаанын узундугун эсептегиле:

а) $\alpha=2$, $R=1$см;   б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=6$см;

в) $\alpha=0{,}1$ жана $R=1$м;   г) $\alpha=\frac{9\pi}{10}$, $R=10$м.

**19.** Эгерде тегеректин $R$ радиусу жана сектордун $\alpha$ борбордук бурчунун радиандык чени белгилүү болсо, сектордун аянтын эсептегиле:

а) $\alpha=2$, $R=1$ дм;   б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $R=2$ см;

в) $\alpha=0{,}1$, $R=1$ м;   г) $\alpha=\frac{5\pi}{3}$, $R=3$ м.

**20.** а) Эгерде сектордун жаасынын узундугу тегеректин диаметрине барабар болсо, ал жаага туура келүүчү сектордун борбордук бурчун тапкыла.

б) Сектордун жаасынын узундугу анын периметринен үч эсе кичине. Анын борбордук бурчунун радиандык ченин тапкыла.

Туюнтмалардын маанилерин тапкыла (21—22).

**21.** а) $3\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})+2\cos(3\alpha-\pi)$, эгерде $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+3\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2})$, эгерде $\alpha=\frac{2\pi}{3}$;

в) $4\cos(3\alpha-\frac{\pi}{6})+\operatorname{ctg}(\alpha+\frac{\pi}{12})$, эгерде $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

г) $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\operatorname{tg}^2(2\alpha+\frac{\pi}{6})$, эгерде $\alpha=-\frac{\pi}{6}$.

**22.** а) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$, эгерде $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, эгерде $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$;

в) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$, эгерде $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

г) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$, эгерде $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0{,}5$.

**23.** $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ болгондо, төмөнкү барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $\sin\alpha\sqrt{1+1\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^{-2}\alpha}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$;

г) $\sqrt{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\,\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\,\cos^2\alpha}}$.

Теңдештиктерди далилдегиле (24—26).

**24.** а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = 2$;

в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; г) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$.

**25.** а) $(\sin^2 t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t)^2 = 1 - \sin 4t$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

в) $\dfrac{1-4\sin^2 t\cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \cos 2t$; г) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

**26.** а) $\cos t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}$; б) $\sin\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}$.

**27.** Таблицалардын жана калькулятордун жардамысыз төмөнкүлөрдү эсептегиле:

а) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$; б) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{18} - \sin\dfrac{\pi}{18}\right) : \cos\dfrac{2\pi}{9}$;

в) $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8} - \cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2$; г) $\dfrac{\cos\dfrac{11\pi}{12} - \cos\dfrac{\pi}{12}}{\sin\dfrac{5\pi}{12}}$.



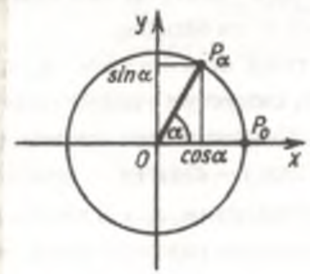
## 2. Тригонометриялык функциялар жана алардын графиктери

**1. Синус жана косинус функциялары.** Борбору координаталар башталышында, радиусу 1 болгон айлананы *бирдик айлана* деп атайбыз. Бирдик айлананын $P_0(1; 0)$ чекитин $\alpha$ радиан бурчка бурганда алынган чекит $P_\alpha$ болсун дейли $P_\alpha$ чекитинин ординатасы — $\alpha$ бурчунун синусу, ал эми ал чекиттин абсциссасы — $\alpha$ бурчунун косинусу экендигин түшүнүү кыйын эмес (5-сүрөт).

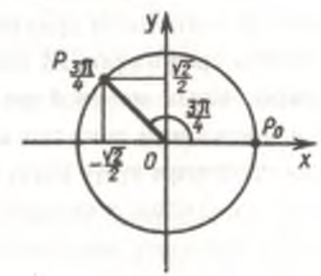
○ 1 - м и с а л. $\dfrac{3\pi}{4}$ радиан бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин жана котангенсинин маанилерин табабыз.

Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун касиетин пайдаланып, $P\dfrac{3\pi}{4}$ чекитинин координаталарын табуу кыйын эмес: $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ошондуктан $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} = -1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} = -1$. ●

Биз мындан ары бурчтарды радиандык чен менен өлчөнгөн деп эсептейбиз, ошондуктан эреже катары, *рад* деген белгилөөнү жазбайбыз. Бурчтарды өлчөөнүн бирдиктерин (1 радиан) туруктуу деп макулдашып, мисалы, *x санынын синусун x* радиандагы бурчтун синусу катары; *x санынын косинусун x* радиандагы бурчтун косинусу катары аныктайбыз ж.б.




5-сүрөт




6-сүрөт

А н ы к т а м а. $y = \sin x$ жана $y = \cos x$ **формулалары менен берилген сан функцияларын тиешелүү түрдө** ***синус*** **жана** ***косинус*** **деп атайбыз** (жана *sin*, *cos* деп белгилейбиз).

Бул функциялардын аныкталуу областтары — бардык чыныгы сандардын көптүгү. Бирдик айлананын чекиттеринин ординаталары жана абсциссалары −1ден 1ге чейинки бардык маанилерди алышкандыктан, синус жана косинус функцияларынын маанилeринин областы $[-1; 1]$ кесиндиси болот. $f$ функциясынын аныкталуу областын $D(f)$, ал эми маанилеринин областын $E(f)$ аркылуу белгилейбиз. Анда төмөнкүчө жазууга болот:

$$D(\sin) = D(\cos) = R; \; E(\sin) = E(\cos) = [-1; 1].$$

Синус жана косинус функцияларынын силерге белгилүү болгон касиеттерин эске салабыз:

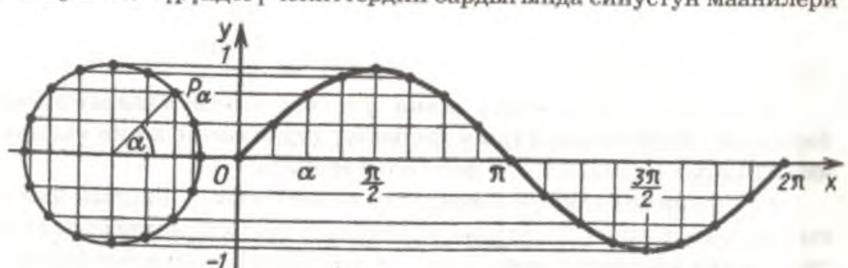
***Ар кандай x үчүн төмөнкү барабардыктар туура:***

1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$;

2) $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ ($n$ — каалагандай бүтүн сан).

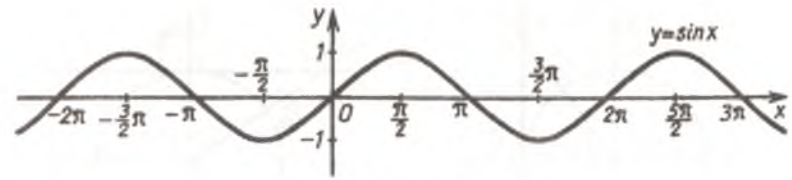
**2. Синусоида.** Синус функциясынын графигин $[0; 2\pi]$ кесиндисинде тургузабыз. Ал үчүн ординаталар огуна $(0; -1)$ жана $(0; 1)$ чекиттерин, ал эми абсциссалар огуна — абсциссасы $2\pi$ болгон чекитти ($[0; 2\pi]$ кесиндисинин узундугу болжол менен 6,28ге барабар экендигине көңүл бургула) белгилейбиз. $[0; 2\pi]$ кесиндисин жана бирдик айлананы 16 барабар бөлүккө бөлөбүз (7-сүрөт). Графиктин абсциссасы $\alpha$ болгон чекитин түзүү үчүн, синустун аныктамасын пайдаланабыз: бирдик айланадан $P_\alpha$ чекитин белгилеп жана $P_\alpha$ чекити аркылуу абсцисса огуна параллель түз сызыкты жүргүзөбүз (7-сүрөт). Бул түз сызык менен $x = \alpha$ түз сызыгынын кесилишкен чекити изделген чекит болот, анткени анын ординатасы $P_\alpha$ чекитинин ординатасы менен дал келет, ал эми аныктама боюнча $P_\alpha$ чекитинин ординатасы $\sin\alpha$ га барабар.

7-сүрөттө графиктин 16 чекитин түзүү көрсөтүлгөн. Аларды туташ ийри сызык менен бириктирип, синустун графигинин $[0; 2\pi]$ кесиндисиндеги эскизин алабыз. Синустун бул кесиндиден тышкары графигин түзүү үчүн, $\sin(x+2\pi n) = \sin x$ ($n$ — каалаган бүтүн сан) экендигин эске алабыз. Ошондуктан $x_0 + 2\pi n$, мында $0 \le x_0 \le 2\pi$ түрүндөгү чекиттердин бардыгында синустун маанилери

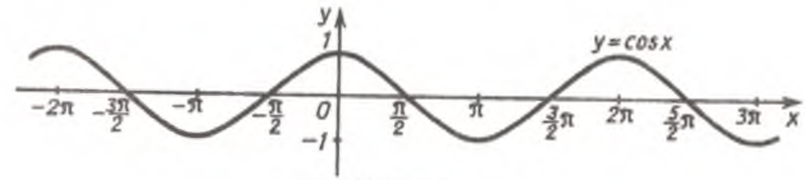



7-сүрөт






8-сүрөт




9-сүрөт

дал келишет, натыйжада, синустун бүткүл түз сызыктагы графиги, түзүлгөн графиктен аны $Ox$ огу боюнча (оңго жана солго) $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$ ж.б. чондуктарга параллель көчүрүү аркылуу алынат (8-сүрөт). Синустун графиги *синусоида* деп аталат. Ордината огундагы $[-1; 1]$ кесиндисинин жардамы менен синустун маанилерин таптык. Ошол кесинди кээде *синус сызыгы* деп аталат.

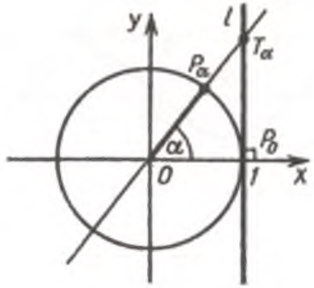
Косинустун графигин түзүү үчүн $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ экендигин эске салабыз. Демек, косинустун каалаган $x_0$ чекитиндеги мааниси синустун $x_0 + \frac{\pi}{2}$ чекитиндеги маанисине барабар. Бул болсо, косинустун графиги, синустун графигин $Ox$ огунун терс багыты боюнча $\frac{\pi}{2}$ аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынаарын билдирет. Ошондуктан $y = \cos x$ функциясынын графиги да синусоида болот (9-сүрөт).

**3. Тангенс жана котангенс функциялары, алардын графиктери.**

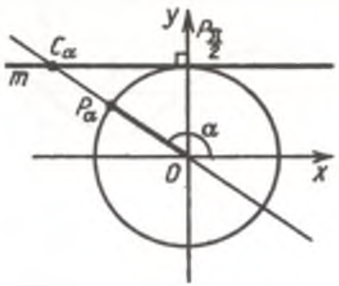
А н ы к т а м а. **$y = \mathrm{tg}x$ жана $y = \mathrm{ctg}x$ барабардыктары менен берилген сан функциялары тиешелүү түрдө *тангенс* жана *котангенс* деп аталышат** (жана tg, ctg деп белгиленет).

Тангенс функциясынын аныкталуу областы, $\cos x \ne 0$ болгон бардык $x$ сандарынын көптүгү болот, б.а. $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ге ($n$ — бардык бүтүн сандардын $Z$ көптүгүнөн алынат) барабар болбогон бардык $x$ сандары. Котангенстин аныкталуу областы $\sin x \ne 0$ болгон бардык $x$ сандарынан турат, б.а. $\pi n$ ге барабар болбогон бардык сандардан турат, мында $n \in Z$.

2—1543



10-сүрөт



11-сүрөт

Бирдик айлананын $P_0$ чекитине $l$ жанымасын жүргүзөбүз (10-сүрөт). $\alpha$ саны, $\cos\alpha \neq 0$ болгон каалаган сан болсун. Анда $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ чекити ординаталар огунда жатпайт, натыйжада, $OP_\alpha$ түз сызыгы $l$ ди кандайдыр бир абсциссасы 1 болгон $T_\alpha$ чекитинде кесет. Бул чекиттин ординатасын табабыз.

Ал үчүн $OP_\alpha$ түз сызыгы $O(0;0)$ жана $P_\alpha(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ чекиттери аркылуу өтөрүн байкайбыз. Ошондуктан анын теңдемеси $y = x\ \mathrm{tg}\,\alpha$ болот. Ал түз сызыкта жаткан $T_\alpha$ чекитинин абсциссасы 1ге барабар. $OP_\alpha$ түз сызыгынын теңдемесинен, $T_\alpha$ чекитинин ординатасы $\mathrm{tg}\,\alpha$ га барабар экендигин табабыз. Мына ошентип, $OP_\alpha$ жана $l$ түз сызыктарынын кесилишүү чекитинин ординатасы $\alpha$ нын тангенсине барабар. Ошондуктан $l$ түз сызыгы *тангенстердин сызыгы* деп да аталат.

Ушул сыяктуу эле, $OP_\alpha$ түз сызыгы менен бирдик айлананын $P_{\frac{\pi}{2}}$ чекитине жүргүзүлгөн $m$ жанымасынын (11-сүрөт) $C_\alpha$ кесилишүү чекитинин абсциссасы $\sin\alpha \neq 0$ болгондо, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ га барабар экендигин далилдөө кыйын эмес. Ошондуктан $m$ түз сызыгы *котангенстердин сызыгы* деп аталат.

Тангенстин (котангенстин) маанилеринин областы — бүткүл сан огу. Муну tg үчүн далилдейбиз. $y_0$ — каалагандай чыныгы сан болсун дейли. $T(1;\ y_0)$ чекитин карайлы. $TOx$ бурчунун тангенси $y_0$ го барабар экендиги азыр эле көрсөтүлдү. Демек, tg функциясы каалагандай $y_0$ чыныгы маанисин алат, талап кылынган далилденди.

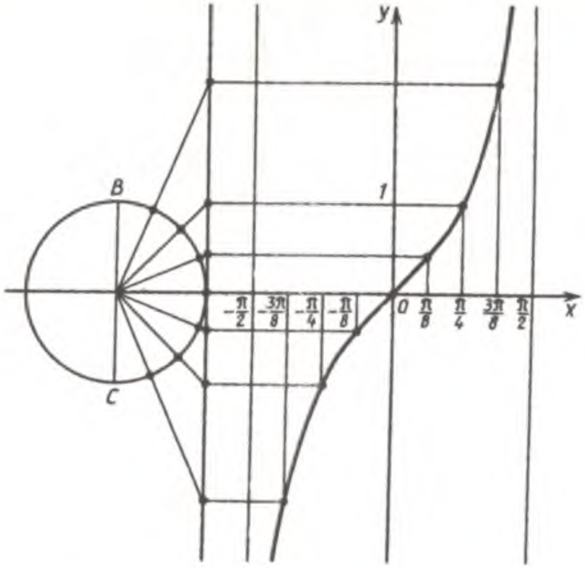
tg жана ctg тин белгилүү касиеттерин эсиңерге салабыз:

1) $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\,x$;

2) $\mathrm{tg}\,(x + \pi n) = \mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\,x$, $n \in \mathbf{Z}$.







12-сүрөт

Тангенстин графигин $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында түзүү (12-сүрөт), синустун графигин түзгөн учурга окшош жүргүзүлөт. (tg функциясынын чекиттеги мааниси тангенстердин сызыгынын жардамы менен табылат.) $\mathrm{tg}\,(x + \pi n) = \mathrm{tg}\,x\ \ n \in \mathbf{Z}$ теңдештигинин натыйжасында тангенстин бүткүл түз сызыктагы графиги (13-сүрөт), анын $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ интервалындагы графигинен, $Ox$ огу боюнча (оңго жана солго) $\pi$, $2\pi$ ж.б. аралыктарга параллель көчүрүү аркылуу алынат. tg$x$ функциясынын графиги *тангенсоида* деп аталат.

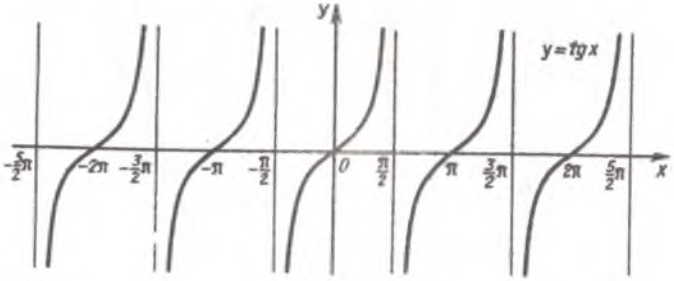
Котангенстин графиги 14-сүрөттө келтирилген.

▽ Синус, косинус, тангенс жана котангенстер, көбүнчө *негизги тригонометриялык функциялар* деп аталышат. Айрым учурларда дагы эки негизги тригонометриялык функция — *секанс* жана *косеканс* (алар sec жана cosec деп белгиленишет) каралат.

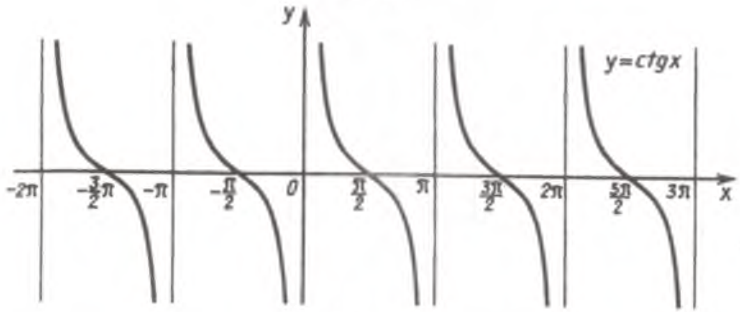
Негизги тригонометриялык функциялар эмне себептен алтоо (6) экендигин түшүнүү үчүн, $\alpha$ тар бурчунун тригонометриялык функциялары $\alpha$ тар бурчу болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын катыштары катары аныктала тургандыгын белгилейбиз (3-сүрөт). Мындай катыштар алтоо:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\ \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}.\ \blacktriangle$$




13-сүрөт




14-сүрөт

### *Көнүгүүлөр*

**28.** Эгерде:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

болсо, бирдик айланада $P_\alpha$ чекитин белгилегиле.

**29.** Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө:

а) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\pi$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 3\pi$; г) $\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}$ ге

барабар болсо, бирдик айлананын $P_\alpha$ чекитинин координаталарын тапкыла.

**30.** Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө:

а) $\frac{3\pi}{8}, \frac{8\pi}{7}, -2{,}7$; б) $\frac{5\pi}{3}, 1{,}8\pi, -3{,}2$;

в) $\frac{7\pi}{4}, -\frac{2\pi}{5}, 1{,}9$; г) $\frac{5\pi}{9}, -2{,}3\pi, 3{,}7$ ге

барабар болсо, $P_\alpha$ чекити координаталык тегиздиктин кайсы чейрегинде жайланышкан?



**31.** Төмөнкү сандардын белгилерин тапкыла:

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}\,\mathrm{tg}\,2{,}3\pi$; б) $\sin 1\cos 3\,\mathrm{ctg}\,5$;

в) $\sin 1{,}3\pi\cos\frac{7\pi}{9}\,\mathrm{tg}\,2{,}9$; г) $\sin 8\cos 0{,}7\;\mathrm{tg}\,6{,}4$.

**32.** Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө:

а) $4\pi, -\pi$; б) $\frac{5\pi}{2}, -5{,}5\pi$; в) $\pi, -2\pi$; г) $\frac{9\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$ ге

барабар болсо, $\alpha$ нын синусунун жана косинусунун маанилерин тапкыла.

**33.** Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; б) $y = -\sin(x + \pi)$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; г) $y = \mathrm{tg}(x + \pi)$.

---

**34.** Координаталары төмөнкү шарттарды канааттандырган $P_\alpha(x; y)$ чекитин бирдик айланада белгилегиле:

а) $y = 0{,}5$, $x > 0$; б) $x = -\frac{1}{2}$, $y > 0$;

в) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y > 0$; г) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x < 0$.

**35.** Миллиметрдик кагазга бирдик айлананы, андан кийин төмөнкүдөй болгон $\alpha$ борбордук бурчун түзгүлө:

а) $\sin\alpha = -0{,}5$; б) $\cos\alpha = 0{,}3$;

в) $\cos\alpha = -0{,}4$; г) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

36—37-функциялардын аныкталуу областтарын жана маанилеринин областтарын тапкыла. Алардын графиктерин түзгүлө.

**36.** а) $y = 2 + \sin x$; б) $y = 1 + \mathrm{tg}\,x$;

в) $y = \cos x - 1$; г) $y = 3 + \sin x$.

**37.** а) $y = 2\sin x$; б) $y = -\frac{1}{2}\cos x$;

в) $y = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,x$; г) $y = -1{,}5\sin x$.

38—39-функцияларынын графиктеринин координата октору менен кесилишүү чекиттеринин координаталарын тапкыла.

**38.** а) $y = \sin x$; б) $y = 1 + \cos x$;

в) $y = \cos x$; г) $y = \sin x - 1$.

**39.** а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = \sin x - 1{,}5$;

в) $y = 2{,}5 + \cos x$; г) $y = \frac{1}{x} + 1$.

# § 2. ФУНКЦИЯНЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТТЕРИ

## 3. Функциялар жана алардын графиктери

**1. Сан функциясы.** Функция түшүнүгү менен алгебра курсунан таанышкансыңар. Анализдин башталышын окуп үйрөнүүдө төмөнкү аныктаманы кабыл алуу ыңгайлуу.

А н ы к т а м а. **Аныкталуу областы $D$ болгон *сан функциясы* деп $D$ көптүгүнөн алынган ар бир $x$ санына кандайдыр бир эреже аркылуу $x$ ке көз каранды болгон $y$ санын тиешелүү кылуучу туура келүүчүлүктү айтабыз.**

Адатта, функциялар латын (кээде грек) тамгалары менен белгиленет. Каалагандай $f$ функциясын карап көрөлү. Көз каранды эмес $x$ өзгөрмөсү *функциянын аргументи* деп да аталат. $x$ санына туура келүүчү $y$ саны $f$ функциясынын $x$ чекитиндеги *мааниси* деп аталат да $f(x)$ аркылуу белгиленет. $f$ функциясынын аныкталуу областы $D(f)$ аркылуу белгиленет. $x$ саны $f$ функциясынын аныкталуу областына тиешелүү болгондугу, бүткүл $f(x)$ сандарынан турган көптүк *$f$ функциясынын маанилеринин областы* деп аталат жана $E(f)$ аркылуу белгиленет.

Функция көбүнчө кандайдыр бир формуланын жардамы менен берилет. Эгерде бул учурда, кошумча чектөөлөр коюлбаса, формула менен берилген функциянын аныкталуу областы үчүн, өзгөрүүчүнүн ал формула мааниге ээ боло турган бардык маанилеринин көптүгү алынат. Мисалы, $f(x)=\frac{1}{x}$ формуласы, $x\neq 0$ болгондо мааниге ээ, ошондуктан $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясынын аныкталуу областы нөлгө барабар болбогон бардык чыныгы сандардын көптүгү болот. Анын маанилеринин көптүгү, аныкталуу областы менен дал келет жана $(-\infty;\ 0)$ менен $(0;\ \infty)$ интервалдарынын биригүүсү болот.

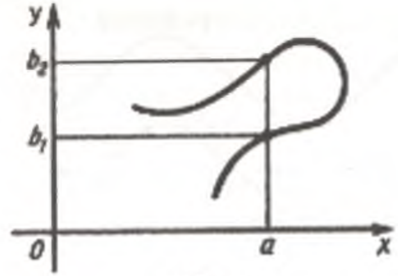
Жалпысынан, $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн жок дегенде биреөнө тиешелүү болгон бардык элементтерден түзүлгөн көптүк $A$ жана $B$ *көптүктөрүнүн биригүүсү* деп аталат. $A$ жана $B$ көптүктөрүнүн биригүүсү $A\cup B$ деп белгиленет. Мисалы, $[0;\ 2]$ жана $[1;\ 3]$ кесиндилеринин биригүүсү $[0;\ 3]$ кесиндиси болот.

$\cup$ символун (белгисин), сан аралыктарынын биригүүсү түрүндө көрсөтүлүүчү сан көптүгүн белгилөө үчүн пайдалануу ыңгайлуу. Алсак, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы үчүн

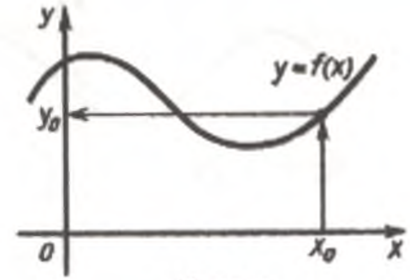
$$D(f)=E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty).$$








15-сүрөт




16-сүрөт

$y=\mathrm{tg}\,x$ функциясынын аныкталуу областы $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ түрүндөгү бардык интервалдардын биригүүсү, мында $n\in Z$ функциясынын маанилеринин областы — бүткүл сан огу, б.а. $E(\mathrm{tg})=(-\infty;\ \infty)$.

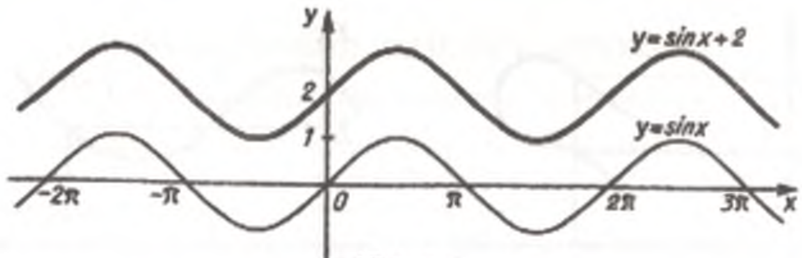
$f(x)=p(x)$ (мында $p(x)$ — көп мүчө) түрүндөгү функция *бүтүн рационалдык функция*, ал эми $p$ жана $q$ көп мүчөлөр болушса, $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ түрүндөгү функция *бөлчөктүү — рационалдык функция* деп аталат. $\frac{p(x)}{q(x)}$ тийиндиси $q(x)$ нөлгө айланбаса аныкталат. Ошондуктан $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ бөлчөктүү — рационалдык функциянын аныкталуу областы, $q(x)$ көп мүчөсүнүн тамырларын чыгарып салгандагы, бүткүл чыныгы сандардын көптүгү болот.

○ 1 - м и с а л. $f(x)=\frac{7x^8-5x^6+3x^2-4x}{x^3-3x^2+2x}$ бөлчөктүү — рационалдык функциянын аныкталуу областын табабыз.

$x^3-3x^2+2x$ көп мүчөсүнүн тамырлары 0,1 жана 2 сандары. Ошондуктан

$$D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ \infty).$$ ●

**2. Функциянын графиги.** $f$ функциясынын графиги деп $x$ чондугу $f$ функциясынын бүткүл аныкталуу областын «кыдырып чыкканда» $y=f(x)$ шартын канааттандырышкан, координаталык тегиздиктеги $(x;y)$ чекиттеринин көптүгүн аташат. Координаталык тегиздиктеги көптүктүн бөлүгү кандайдыр бир функциянын графиги болсун үчүн, ал көптүктүн бөлүгү $Oy$ огуна параллель болгон ар кандай түз сызык менен бирден ашык эмес жалпы чекитке гана ээ болушу зарыл. Мисалы, 15-сүрөттө көрсөтүлгөн көптүк, функция-



17-сүрөт

нын графиги боло албайт, анткени ал бир эле $a$ абсциссалуу, ал эми ординаталары $b_1$ жана $b_2$ болгон эки чекитти камтыйт. Эгерде бул көптүктү функциянын графиги деп эсептесек, анда бул функция $x = a$ болгон учурда дароо, $b_1$ жана $b_2$ деген эки мааниге ээ болмок, бул функциянын аныктамасына карама-каршы келет.

Көбүнчө функцияны график менен беришет. Бул учурда аныкталуу областындагы каалаган $x_0$ үчүн, функциянын ага тиешелүү $y_0 = f(x_0)$ маанисин табуу жеңил (16-сүрөт).

**3. Графиктерди өзгөртүп түзүү.** Силер графиктерин түзө билген функциялардын саны анча көп эмес — функциялар $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Фигураларды өзгөртүп түзүү жөнүндөгү геометрия курсунан белгилүү болгон маалыматтарды пайдаланып, бул тизмени бир кыйла кеңейтүүгө мүмкүн экендигин көрсөтөбүз.

1) Адегенде *ордината огун бойлото (0; b) векторуна параллель көчүрүүнү* карайбыз. Бул жерде жана мындан ары $(x'; y')$ аркылуу берилген өзгөртүп түзүүдө, тегиздиктеги ар кандай $(x; y)$ чекити өтө турган чекиттин координаталарын белгилейбиз. Бул учурда өзгөртүп түзүүнүн силерге белгилүү болгон төмөнкүдөй формуласын алабыз:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (1)$$

$f$ — аныкталуу областы $D(f)$ болгон каалагандай функция болсун. Берилген көчүрүүдө бул функциянын графиги кандай фигурага өтө тургандыгын тактайлы. (1) формуладан графиктин ар кандай $(x; f(x))$ чекити $(x; f(x) + b)$ чекитине өтөөрүн дароо эле алабыз. Бул болсо, $f$ тин графиги бардык $(x; f(x) + b)$ түрүндөгү чекиттерден түзүлгөн фигурага өтөөрүн билдирет, мында $x \in D(f)$.

Функциянын графигинин аныктамасы боюнча, бул фигура $y = f(x) + b$ функциясынын графиги болот. Айтылгандар төмөнкү эрежени формулировкалоого алып келет:



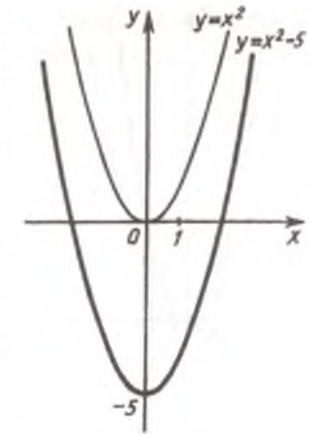


*$f(x) + b$ функциясынын графигин түзүү үчүн (мында $b$ — турактуу сан) $f$ тин графигин ординаталар огун бойлото $(0;b)$ векторуна көчүрүү керек.*

○ 2 - м и с а л. а) $y = \sin x + 2$, б) $y = x^2 - 5$ функцияларынын графиктерин түзөбүз.

а) Эрежеге ылайык $y = \sin x$ функциясынын графигин (0;2) векторуна көчүрөбүз, б.а. $Oy$ огу боюнча жогору карай 2 бирдикке (17-сүрөт).

б) Түзүү $y = x^2$ параболасын (0; −5) векторуна көчүрүү менен жүргүзүлөт, б.а. $Oy$ огу боюнча төмөн карай (18-сүрөт). ●

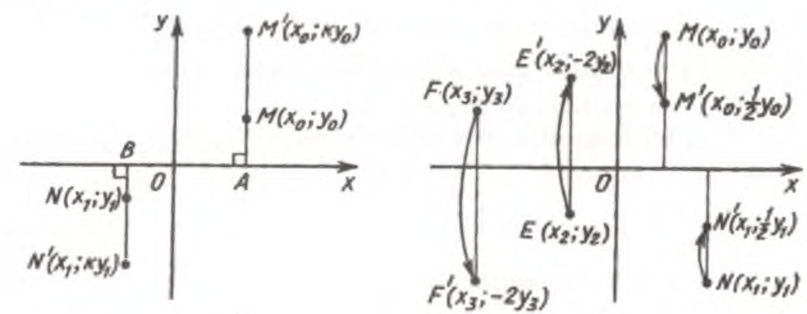


18-сүрөт

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2)$$

формулалары менен берилген, *k коэффициенттүү Oy огун бойлото чоюу,* силер үчүн жаңы өзгөртүп түзүү болуп эсептелет.

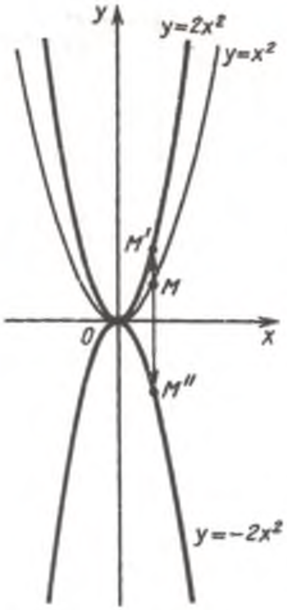
Чоюуда, берилген $M$ чекити өтө турган $M'$ чекитин түзүү үчүн (19-*а*, сүрөт) $MA$ түз сызыгында (мында $A$ чекити $M$ дин $Ox$ огундагы проекциясы) $A$ борборуна карата $M$ чекитине гомотетиялуу чекитти түзүү керек (гомотетия коэффициенти, чоюу коэффициенти $k$ га барабар). 19-*б*, сүрөттө, коэффициенттери $\frac{1}{2}$ жана $-2$ болгон чоюуларда берилген чекиттер өтө турган чекиттерди түзүү көрсөтүлгөн.



а) б)

19-сүрөт

Чоюуда $f$ функциясынын графиги кандай фигурага өтөөрүн тактайлы. $f$ тин графигинин ар кандай $(x; f(x))$ чекити $(x; k f(x))$ чекитине өтөөрүн (2) формуладан дароо эле алабыз. Мындан, $f$ тин




20-сүрөт

графиги, бүткүл $(x; kf(x))$ түрүндөгү чекиттерден түзүлгөн фигурага өтөөрү келип чыгат, мында $x \in D(f)$. Бул фигура $y = kf(x)$ функциясынын графиги болот. Кийинки эреже далилденди:

*$y = kf(x)$ функциясынын графигин түзүү үчүн $y = f(x)$ функциясынын графигин ордината огун бойлото $k$ эсе чоюу керек.*

○ 3-м и с а л. $y = -2x^2$ жана $y = \frac{1}{3}\cos x$ функцияларынын графиктерин түзөбүз.

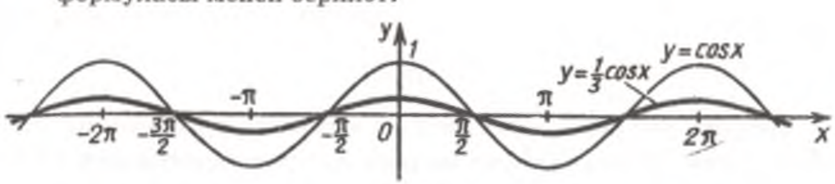
Түзүү, биринчи учурда $y = x^2$ функциясынын графиги (20-сүрөт), экинчи учурда $y = \cos x$ функциясынын графигин түзүп, андан кийин ордината огун бойлото $\frac{1}{3}$ коэффициенти менен чоюуну пайдалануу аркылуу жүргүзүлөт (21-сүрөт). ●

Э с к е р т ү ү. Эгерде $0 < |k| < 1$ болсо, анда $k$ коэффициенттүү чоюуну *кысуу* деп атайбыз. Мисалы, $\frac{1}{2}$ коэффициенттүү чоюуну 2 эсе кысуу деп атайбыз. Ошондой эле, эгерде $k < 0$ болсо, анда $y = k\,f(x)$ функциясынын графигин түзүү үчүн, адегенде $f$ тин графигин $|k|$ эсе чоюп, анан аны абсциссалар огуна симметриялуу чагылдыруу керек (20-сүрөттү кара).

3) *Абсциссалар огун бойлото* $(a;\ 0)$ *векторуна параллель көчүрүү*

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y \end{cases} \qquad (3)$$

формуласы менен берилет.




21-сүрөт



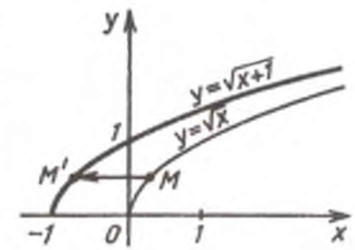


(3) формулага ылайык $f$ функциясынын графигинин ар бир чекити $(x + a;\ f(x))$ чекитине өтөт. Ошондуктан $x'$, $y'$ өзгөрмөлөрүнүн жардамы менен $f$ тин графиги $x';\ f(x' - a))$ чекиттеринен түзүлгөн Ф фигурасына өтө тургандыгын жазууга болот, мында $x'$ өзгөрмөсү $x + a$ түрүндөгү бардык маанилерди алат $(x \in D(f))$.

$x'$ тин так ушул маанилерде $x' - a$ саны $D(f)$ ке тиешелүү болот жана $f(x' - a)$ аныкталат. Демек, Ф фигурасы $y = f(x - a)$ функциясынын графиги болот. Мына ушинтип, төмөнкү жыйынтык чыгат:

*$y = f(x - a)$ функциясынын графиги, $f$ тин графигин (абсциссалар огун бойлото) $(a;0)$ векторуна көчүрүү аркылуу алынат.*

Эгерде $a > 0$ болсо, анда $(a;\ 0)$ вектору абсциссалар огунун оң багыты боюнча, ал эми $a < 0$ болгондо октун терс багыты боюнча багытталарына көңүл бургула.



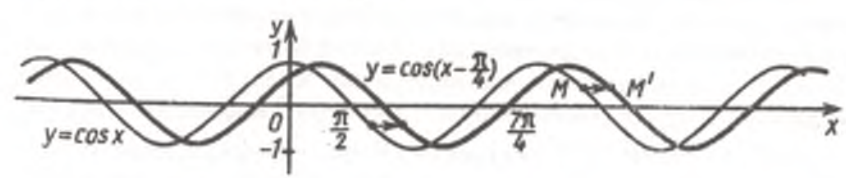

22-сүрөт

○ 4-м и с а л. $y = \sqrt{x+1}$ жана $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ функцияларынын графиктерин түзүү 22-жана 23-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн.

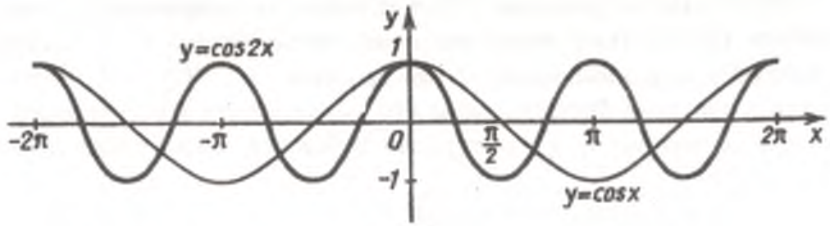
4) *Ox огун бойлото $k$ коэффициенттүү чоюу төмөнкү формула менен берилет:*

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (4)$$

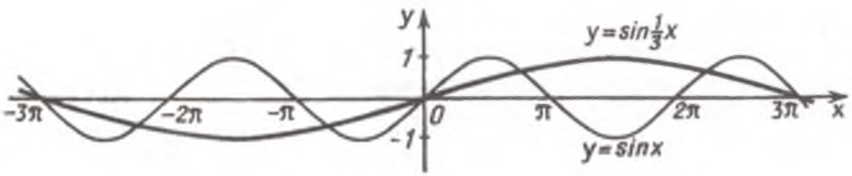
Мындай чоюуда $f$ функциясынын каалагандай чекити $(kx;\ f(x))$ чекитине өтөт. $x', y'$ өзгөрмөлөрүнө өтүп, $y = f(x)$ тин графиги $(x';\ f(\frac{x'}{k}))$ чекиттеринен түзүлгөн фигурага өтөөрүн жазууга болот, мында $x'$ өзгөрмөсү $x' = kx$ түрүндөгү бардык маанилерди алат, ал эми $x \in D(f)$.




23-сүрөт




24-сүрөт




25-сүрөт

Бул фигура $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясынын графиги. Мына ушинтип: *$y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ функциясынын графигин түзүү үчүн f функциясынын графигин абсциссалар огу боюнча k коэффициенттүү чоюуга дуушар кылуу керек.*

○ 5 - м и с а л. $y = \cos 2x$ жана $y = \sin\frac{1}{3}x$ функцияларынын графигин түзүү 24-жана 25-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. ●

▽ **4. Чагылдыруу.** Аныкталуу области $D$, маанилеринин области $E$ болгон функцияны, *$D$ көптүгүн $E$ көптүгүнө чагылдыруу* деп да айтышат. Мисалы, $y = \sin x$ формуласы, чыныгы сандардын $R$ көптүгүнүн $[-1;\ 1]$ кесиндисине чагылдыруусун берет. «Функция» жана «чагылдыруу» деген сөздөр — синонимдер.

Аныкталуу области же маанилеринин области (мүмкүн бул эки көптүк тең) сан көптүктөрү болушпаган функциялар (чагылдыруулар) каралган учурлар аз эмес. Силер мындай мисалдар менен геометрия курсунда кездешкенсиңер. Мисалы, «Көп бурчтуктун аянты» деген функциянын аныкталуу области, аянтты өлчөө бирдиктери бирдей болгондо, тегиздиктеги көп бурчтуктардын көптүгү болот. Бул функциянын маанилеринин области — терс эмес сандардын көптүгү («өзгөчөлөнгөн көп бурчтуктардын», мисалы, кесиндинин аянты 0). $F$ фигурасын $F'$ фигурасына которо турган кыймыл (окшош өзгөртүү сыяктуу эле) дагы чагылдыруу болот: аныкталуу области — $F$ фигурасы, ал эми маанилеринин облас-





ты — $F'$ фигурасы чекиттерден турушат. Чагылдыруу түшүнүгү бүткүл математикадагы негизги түшүнүктөрдөн болуп эсептелет. Анын жардамы менен функциянын мындай аныктамасын берүүгө болот: аныкталуу области $D$, маанилеринин области $E$ болгон функция деп, $D$ көптүгүнүн ар бир элементине $E$ көптүгүнүн толук аныкталган бир элементин туура келтирген, ал эми $E$ көптүгүнүн ар бир элементин $D$ көптүгүнүн кандайдыр бир (жок дегенде бир) элементине туура келтирүүчү чагылдырууну аташат. ▲

*Көнүгүүлөр*

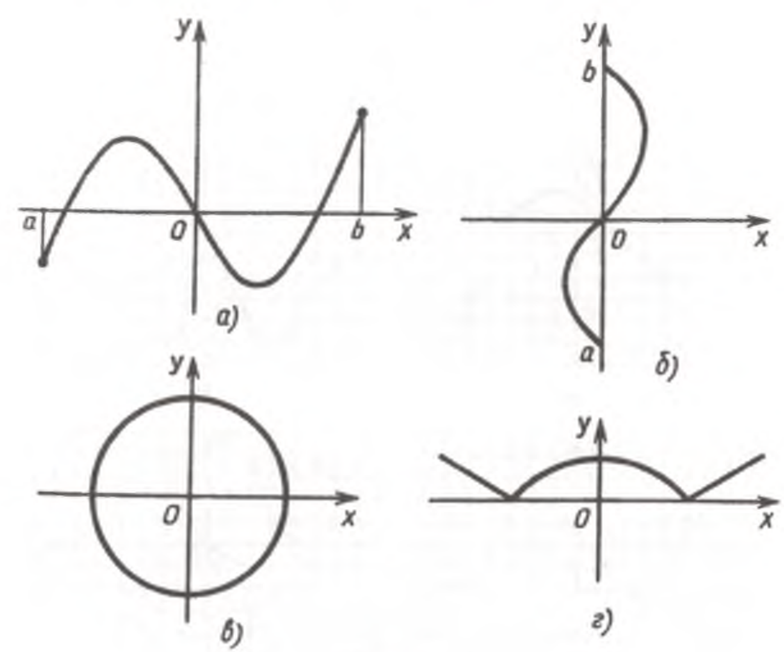
**40.** Функциялардын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде тапкыла:

а) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $-1$, $\frac{1}{2}$, $10$ чекиттеринде;

б) $f(x) = 3\cos(x - \frac{\pi}{4})$, $-\frac{\pi}{4}$, $0$, $\pi$ чекиттеринде;

в) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$, $0$, $1$, $2$ чекиттеринде;

г) $f(x) = 2 - \sin 2x$, $-\frac{\pi}{4}$, $0$, $\frac{5\pi}{12}$ чекиттеринде.




26-сүрөт

**41.** Функциянын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде жазгыла:

а) $f(x) = x^2 + 2x$, $x_0$ $t+1$ чекиттеринде;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a, b-1$ чекиттеринде;

в) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, $x_0$, $a+2$ чекиттеринде;

г) $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$, $z, h+\pi$ чекиттеринде.

**42.** 26-*а—г*, сүрөтүндө көрсөтүлгөн фигуралар функциянын графиктери боло алышабы?

43—44 функцияларынын ар биринин аныкталуу областтарын тапкыла.

**43.** а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$;

в) $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; г) $f(x) = \sqrt{36-x^2}$.

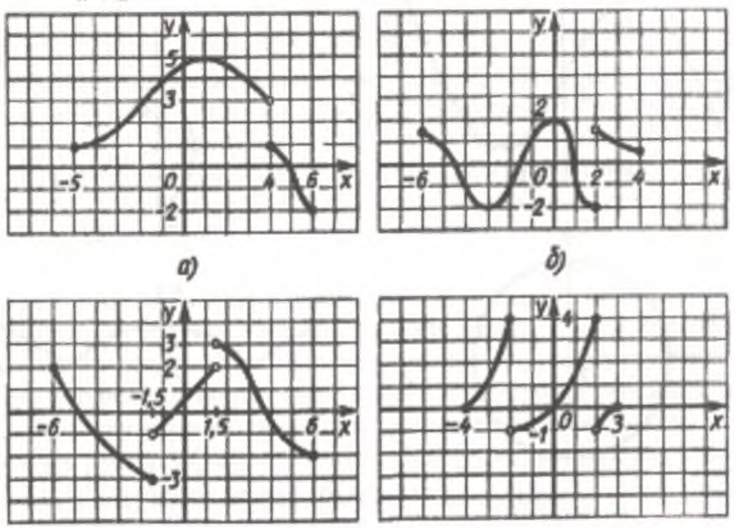
**44.** а) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; б) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = 1 + \operatorname{ctg} x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

**45.** Ар бир функциянын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$; б) $y = 2 + \frac{4}{x-3}$;

в) $y = \frac{3}{x+1} - 1$; г) $y = 3 + 0{,}5\sin(x + \frac{\pi}{4})$.



*а)* *б)* *в)* *г)*

27-сүрөт





**46.** Графиктери 27-*а—г*, сүрөттөрдө чийилген функциялардын аныкталуу областтарын жана маанилеринин областтарын тапкыла.

**47.** Төмөнкүдөй учурлар үчүн кандайдыр бир $f$ функциясынын графигин чийгиле:

а) $D(f) = [-2;\ 4]$, $E(f) = [-3;\ 3]$;

б) $D(f) = (-5;\ 3)$, $E(f) = [2;\ 6]$;

в) $D(f) = (0;\ 7)$, $E(f) = [-1;\ 6]$;

г) $D(f) = [-4;\ 0]$, $E(f) = (1;\ 4)$.

**48.** Бир эле координаталык системада төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$, $y = \frac{1}{x-2}$;

б) $y = \cos x$, $y = \cos x - 3$, $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$;

в) $y = -x^2$, $y = 4 - x^2$, $y = -(x-2)^2$;

г) $y = \sin x$, $y = \sin x + 2$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

49—50 функцияларынын графиктерин түзгүлө.

**49.** а) $y = \frac{1}{x-3}$; б) $y = (x-2)^2 - 4$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = 2 + \frac{1}{x}$.

**50.** а) $y = 1 + 2\sin x$; б) $y = \sqrt{x+1} - 1$;

в) $y = 0{,}5\cos x - 1$; г) $y = 2 + \sqrt{x-1}$.

---

**51.** Функциялардын маанилерин көрсөтүлгөн чекиттерде тапкыла:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{эгерде } x \geq 0, \\ -x, & \text{эгерде } x < 0, \end{cases}$ $-2; -\frac{1}{3}; 0;\ 5$ чекиттеринде;

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{эгерде } x \geq -1, \\ 1 - x, & \text{эгерде } x < -1, \end{cases}$ $-2; -1; 0;\ 4$ чекиттеринде;

в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{эгерде } x > 0, \\ \cos x - 1, & \text{эгерде } x \leq 0, \end{cases}$ $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3};\ 0;\ \frac{\pi}{6}$ чекиттеринде;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } x > 0, \\ 0, & \text{эгерде } x = 0, \\ -1, & \text{эгерде } x < 0, \end{cases}$ $-1{,}7; -\sqrt{2}; 0;\ 3{,}8$ чекиттеринде.

**52.** а) $ABC$ үч бурчтугунун $AC$ негизи $b$ га; $BD$ бийиктиги $h$ ка барабар. $BD$ бийиктигинин $K$ чекити аркылуу $AC$ га параллель түз сызык жүргүзүлгөн. Бул түз сызык аркылуу берилген үч бурчтукту экиге ажыратуудан алынган ар бир фигуранын аянтын $BK = x$ аралыгынан функция түрүндө туюндургула. а) Борбордук бурчтун радиандык чени $x$ ке, тегеректин радиусу $R$ ге барабар. Тиешелүү сегменттин аянтын $x$ тен функция түрүндө туюндургула.

в) Сектордун борбордук бурчунун радиандык чени $\alpha$ га, радиусу $r$ ге барабар. Сектордун периметрин $\alpha$ бурчунан функция түрүндө туюндургула.

г) Квадраттын диагоналына параллель болгон түз сызык, аны эки фигурага бөлөт. Эгерде квадраттын жагы $a$ га барабар болсо, ар бир фигуранын аянты менен берилген түз сызык аркылуу диагоналдан кесилип алынган кичине кесиндинин $x$ узундугунун арасындагы байланышты формула менен бергиле.

**53.** Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$.

**54.** Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 1+\sin^2 x$; б) $y = \dfrac{x-1}{x}$;

в) $y = \sqrt{x^2+4}$; г) $y = 1,5-0,5\cos^2 x$.

55—56-функциялардын графиктерин түзгүлө.

**55.** а) $y = |x-1|$; б) $y = \begin{cases} x^2-4, & \text{эгерде } x \ge 2, \\ 2-x, & \text{эгерде } x < 2; \end{cases}$

в) $y = \sqrt{2x-2}$; г) $y = \begin{cases} 3-x^2, & \text{эгерде } x > 1, \\ x-2, & \text{эгерде } x \le 1. \end{cases}$

**56.** а) $y = \sin 3x - 1$; б) $y = \dfrac{1}{2}x^3+2$;

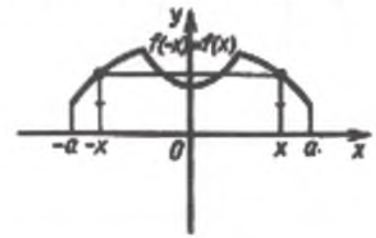
в) $y = 1+\cos 2x$; г) $y = 1+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.



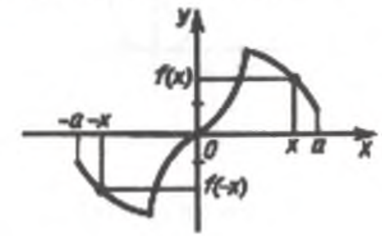
## 4. Жуп жана так функциялар

### Тригонометриялык функциялардын мезгилдүүлүгү

**1. Жуп жана так функциялар.** Аныкталуу областтары координаталар башталышына карата симметриялуу болгон, б.а. аныкталуу областы каалаган $x$ саны менен бирге $(-x)$ санын да өз ичине камтыган функцияларды карайбыз. Ушундай функциялар үчүн жуп жана так функциялар жөнүндөгү түшүнүктөр аныкталат.




28-сүрөт




29-сүрөт

А н ы к т а м а. **Эгерде аныкталуу областынан алынган ар кандай $x$ үчүн, $f(-x) = f(x)$ (28-сүрөт) болсо, $f$ функциясы жуп деп аталат.**

А н ы к т а м а. **Эгерде аныкталуу областынан алынган ар кандай $x$ үчүн $f(-x) = -f(x)$ (29-сүрөт) болсо, $f$ функциясы так деп аталат.**

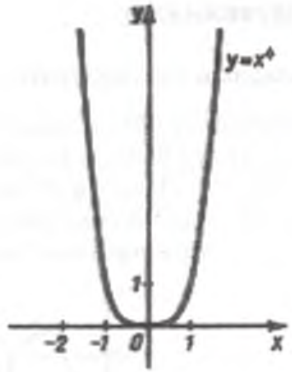
○ 1 - м и с а л. $f(x) = x^4$ функциясы жуп, ал эми $g(x) = x^3$ функциясы так. Чындыгында эле, алардын ар биринин аныктаалуу областы (бүткүл сан түз сызыгы) $O$ чекитине карата симметриялуу жана ар кандай $x$ үчүн $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ барабардыктары аткарылат. Бул функциялардын графиктери 30- жана 31-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. ●

Жуп жана так функциялардын графиктерин түзүүдө, алгебра курсунан белгилүү болгон төмөнкү касиеттерин пайдаланабыз:

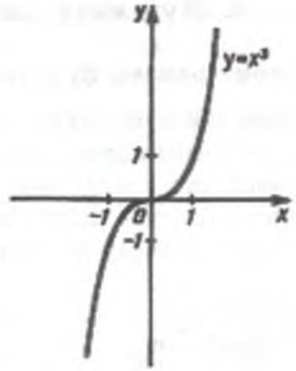
1°. *Жуп функциянын графиги ордината огуна карата симметриялуу.*

2°. *Так функциянын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу.*

Бул эки эрежеден төмөнкү келип чыгат: жуп жана так функциялардын графигин түзүүдө, аны $x$ тин терс эмес бөлүгү үчүн түзүп, андан кийин, алынган графикти ординаталар огуна карата (функция жуп болсо) же координаталар башталышына карата (функция так болсо) чагылдыруу жетиштүү.




30-сүрөт




31-сүрөт

○ 2 - м и с а л. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ функциясы так функция (муну өз алдыңарча далилдегиле). Анын графиги координаталар башталышына карата симметриялуу (32-сүрөт). ●

Негизги тригонометриялык функциялардан синус, тангенс жана котангенс функциялары так, ал эми косинус — жуп функция болушат (2-пунктту кара). Ошондуктан синустун, тангенстин жана котангенстин графиктери координаталар башталышына карата симметриялуу (8-, 13-, 14-сүрөттөрдү карагыла), ал эми косинустуку (9-сүрөт) — ординаталар огуна карата симметриялуу.

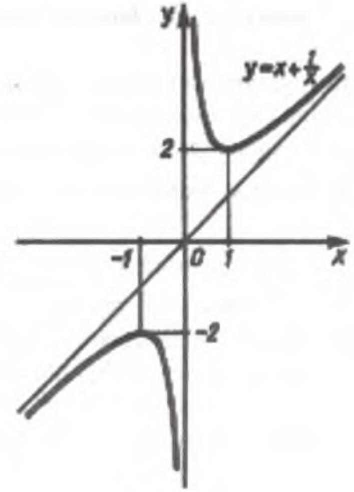
○ 3 - м и с а л. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - x}$ функциясы жуп, анткени анын аныкталуу областы координаталар башталышына карата симметриялуу (ал область — 1,0 жана 1 сандарынан башка бардык сандардан турат) жана бардык $x \in D(f)$ үчүн төмөнкү барабардык аткарылат:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{x - x^3} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x).$$

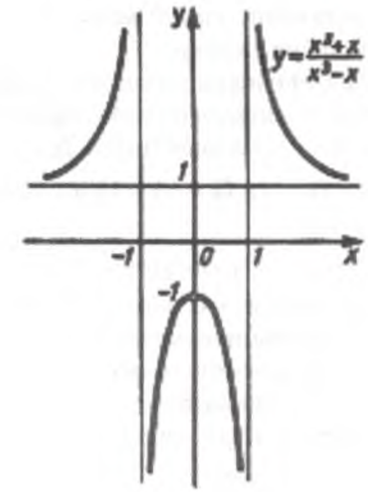
Бул функциянын графиги $Oy$ огуна карата симметриялуу (33-сүрөт).

○ 4 - м и с а л. $f(x) = x^2 + x$ функциясы жуп да, так да болбойт. Анын аныкталуу областы 0 чекитине карата симметриялуу, бирок, мисалы, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$ болгондуктан, $x = 1$ болгондо $f(1) = f(-1)$ жана $f(1) = -f(-1)$ барабардыктарынын бирөө да аткарылбайт. ●






32-сүрөт




33-сүрөт

**2. Мезгилдүү функциялар.** Практикада биз кездешүүчү көптөгөн процесстер жана кубулуштар кайталануучу мүнөздө болушат. Алсак, Күн менен Жердин өз ара жайланышы жыл өткөн сайын кайталанып турат. Маятниктин термелүү мезгили менен айырмаланган убакыттын моменттеринде, маятниктин абалдары бирдей болушат.

Мына ушул түрүндөгү процесстерди мезгилдүү, ал эми аларды туюндурган функцияларды — мезгилдүү функциялар деп аташат.

Силерге белгилүү негизги тригонометриялык функциялар — мезгилдүү. Алсак, ар кандай $x$ жана ар кандай бүтүн $k$ үчүн $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ барабардыгы аткарылат. Мында, $2\pi k$ — синус функциясынын мезгили ( $k \neq 0$ — каалагандай бүтүн сан) экендиги келип чыгат.

Жалпысынан, $f$ функциясынын мезгилдүүлүгү жөнүндө сүйлөгөндө, $D(f)$ аныкталуу областында, ар кандай $x$ чекити менен бирге, $x$ ти $Ox$ огу боюнча (оңго жана солго) $T$ аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынуучу чекит да жайланышкандай болгон, $T \neq 0$ саны табылат деп эсептелинет. Эгерде $f$ функциясынын аныкталуу областындагы $x$ үчүн $x$, $x - T$ жана $x + T$ чекиттериндеги функциянын маанилери барабар болушса, анда ал функция мезгили $T \neq 0$ болгон мезгилдүү функция деп аталат, б.а. $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Синус жана косинус бүткүл сан огунда аныкталышкандыктан жана ар кандай $x$ үчүн $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

болгондуктан, синус жана косинус — мезгили $2\pi$ болгон мезгилдүү функциялар.

Тангенс жана котангенс — мезгили $\pi$ болгон мезгилдүү функциялар. Чындыгында эле, бул функциялардын аныкталуу областтары ар бир $x$ менен бирге, $x+\pi$ жана $x-\pi$ сандарын да камтышат жана $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x$ барабардыктары аткарылат.

Эгерде $f$ функциясы мезгили $T$ болгон мезгилдүү функция болсо, анда $n \neq 0$ ар кандай бүтүн сан болгондо $nT$ саны дагы бул функциянын мезгили болот. Мисалы, $n=3$ болгондо, мезгилдүү функциянын аныктамасын бир нече жолу пайдаланып төмөнкүнү табабыз:

$$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f((x+T)=f(x+T)=f(x).$$

Төмөнкүдөй:

а) *$y=\sin x$ жана $y=\cos x$ функцияларынын эң кичине оң мезгили $2\pi$ ге барабар экендигин;*

б) *$y=\operatorname{tg}x$ жана $y=\operatorname{ctg}x$ функцияларынын эң кичине оң мезгили болуп $\pi$ саны эсептелерин далилдейбиз.*

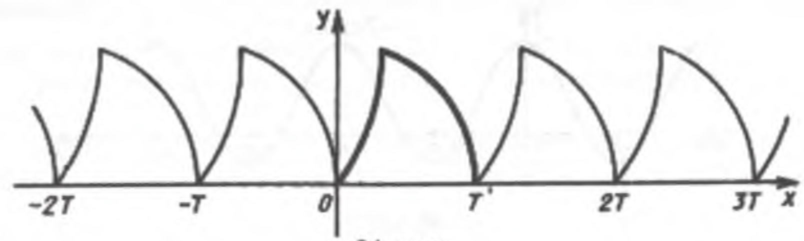
$\triangledown$ а) Жогоруда белгиленгендей $2\pi$ саны бул функциялардын мезгили болуп эсептелет. Ошондуктан $2\pi$ ден кичине болгон оң сан булардын мезгили боло албай тургандыгын далилдөө гана калды. Муну далилдейбиз.

Эгерде $T$ — косинустун каалагандай мезгили болсо, анда ар кандай $\alpha$ үчүн $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ болот. $\alpha=0$ деп алып, $\cos T=\cos 0=1$ экендигин табабыз. $\cos x=1$ болгон эң кичине $T$ оң саны $2\pi$ болот.

Синустун каалагандай оң мезгили $T$ болсун дейли. Анда ар кандай $\alpha$ үчүн $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$ болот. $\alpha=\frac{\pi}{2}$ деп эсептеп, $\sin(T+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$ экендигин табабыз. Бирок $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in Z)$ болгондо гана $\sin x=1$ болот. Ошондуктан $T=2\pi n$ болот. $2\pi n$ түрүндөгү эң кичине оң сан $2\pi$ болот.

б) Эгерде $T$ — тангенстин оң мезгили болсо, анда $\operatorname{tg}T=\operatorname{tg}(0+T)=$ $=\operatorname{tg}0=0$ болот. $(0;\pi)$ интервалында тангенс нөлгө ээ болбогондуктан, $T\geq\pi$ болот. $\pi$ — бул $\operatorname{tg}x$ функциясынын мезгили экендиги мурда далилденген, демек ал тангенстин эң кичине оң мезгили болот. ctg функциясы үчүн далилдөө ушуга окшош. ▲






34-сүрөт

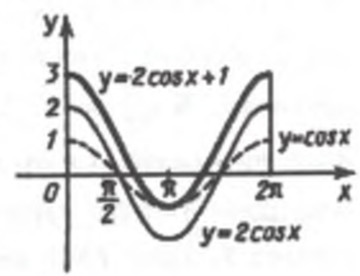
Эреже катары «эң кичине оң мезгил» деген сөз ташталып коюлат. Мисалы, тангенстин мезгили $\pi$ ге, ал эми синустун мезгили $2\pi$ ге барабар деп айтуу кабыл алынган.

Биз негизги тригонометриялык функциялардын мезгилдүүлүгүн алардын графиктерин түзүүдө пайдаланганбыз. Төмөнкүдөй жалпы ырастоо туура:

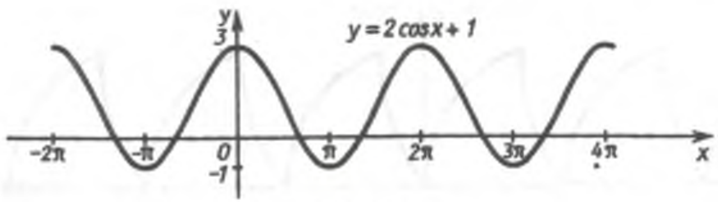
*$T$ мезгилдүү функциянын графигин түзүү үчүн, түзүүнү $T$ узундуктагы кесиндисинде жүргүзүү жана андан кийин алынган графикти $Ox$ огун бойлото оңго жана солго $nT$ аралыгына параллель көчүрүү жетиштүү* (34-сүрөт, мында $n$ — ар кандай натуралдык сан).

Чындыгында,$(x_0;\ y_0)$ чекити $f$ мезгилдүү функциясынын графигинин чекити болсун дейли. Анда $x_0+nT$ чекити, $n$ ар кандай бүтүн сан болгондо, $f$ тин аныкталуу областына тиешелүү (пункттун башталышындагы эскертүүнү кара) жана $f$ тин мезгилдүүлүгүнүн натыйжасында $f(x_0+nT)=f(x_0)=y_0$ барабардыгы туура. Демек, $(x_0;\ y_0)$ чекитин $Ox$ огун бойлото $(nT;0)$ векторуна параллель көчүрүүдөн алынган $(x_0+nT;\ y_0)$ чекити дагы $f$ тин графигинде жатат.

○ 5 - м и с а л. $f(x)=2\cos x+1$ функциясынын графигин түзөбүз. Түзүш үчүн $f$ функциясынын $2\pi$ мезгилдүүлүгүнөн пайдаланабыз. Чындыгында, $f$ функциясы бүткүл түз сызыкта аныкталган, демек, анын аныкталуу областы каалагандай $x_0$ чекити менен бирге, $x_0$ дү $Ox$ огу боюнча оңго жана солго $2\pi$ аралыкка параллель көчүрүү аркылуу алынган чекиттерди да камтыйт. Андан тышкары, косинустун мезгилдүүлүгүнүн




35-сүрөт




36-сүрөт

натыйжасында $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) + 1 = 2\cos x + 1 = f(x)$. Мезгилдүү функциялардын графиктеринин касиеттеринен пайдаланып, $f$ тин графигин адегенде $[0; 2\pi]$ кесиндисинде түзөбүз (ал үчүн графиктерди өзгөртүү боюнча белгилүү эрежелерге таянып, косинустун графигин $Oy$ огу боюнча 2 эсе чоёбуз жана аны жогору карай 1ге жылдырабыз (көчүрөбүз), 35-сүрөт), андан кийин аны параллель көчүрүүнүн жардамы менен бүткүл сан огуна улантабыз (36-сүрөт). ●

▽ 6-мисал. $f(x) = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{4})$ функциясы мезгилдүү жана анын эң кичине оң мезгили $\frac{\pi}{2}$ ге барабар экендигин далилдейбиз. Тангенс, аргументтин $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ ге барабар болбогон бардык маанилеринде аныкталган. Ошондуктан бул функциянын аныкталуу областы $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ болгон $x$ терден турат, б.а. $x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ Мындан, $D(f)$ ар кандай $x_0$ менен бирге, $x_0 + \frac{\pi n}{2}$, $x_0 - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ түрүндөгү бардык чекиттерди камтый тургандыгы келип чыгат. $\frac{\pi}{2}$ саны, $f$ тин мезгили болору түшүнүктүү, анткени

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \mathrm{tg}\,(2\,(x + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}((2x - \frac{\pi}{4}) + \pi\,) = \mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{4}) = f(x).$$

Эми $\frac{\pi}{2}$ санынын $f$ тин эң кичине оң мезгили экендигин далилдөө эле калды. $T_0 < \frac{\pi}{2}$ болгон $T_0$ саны $f$ тин мезгили болсун дейли. Анда ар кандай $x \in D(f)$ үчүн $f(x + T_0) = \mathrm{tg}\,(2\,(x + T_0) - \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\,((2x - \frac{\pi}{4}) + 2\,T_0) = f(x) = \mathrm{tg}\,(2x - \frac{\pi}{4})$ барабардыгы аткарылат, анткени $T_0$ саны $f$ тин мезгили. Бирок бул, $2T_0$ саны tg функциясынын мезгили дегенди билдирет. Болжолдоо боюнча $T_0 < \frac{\pi}{2}$,





демек, $2T_0 < \pi$. Мурда далилденген менен карама-каршылыкка келдик: тангенстин эң кичине оң мезгили $\pi$ ге барабар. ▲

Ушуга окшош эле, төмөнкүдөй жалпы ырастоону далилдөөгө болот:

*Эгерде $f$ функциясы мезгилдүү жана мезгили $T$ болсо, анда $Af(kx + b)$ функциясы (мында $A$, $k$ жана $b$ лар турактуулар), ал эми $k \neq 0$ ошондой эле мезгилдүү, бирок анын мезгили $\frac{T}{|k|}$ га барабар.*

Бул ырастоонун негизинде дароо эле, мисалы, $\sin(3x - \frac{\pi}{2})$ функциясынын мезгили $\frac{2\pi}{3}$ саны, ал эми $\cos(-\frac{x}{2} + \pi)$ функциясынын мезгили $4\pi$ ге барабар болорун алабыз.

### *Көнүгүүлөр*

57—58-функцияларынын жуп экендигин далилдегиле.

**57.** а) $f(x) = 3x^2 + x^4$; б) $f(x) = x^5 \sin\frac{x}{2}$;
в) $f(x) = x^2 \cos x$; г) $f(x) = 4x^6 - x^2$.

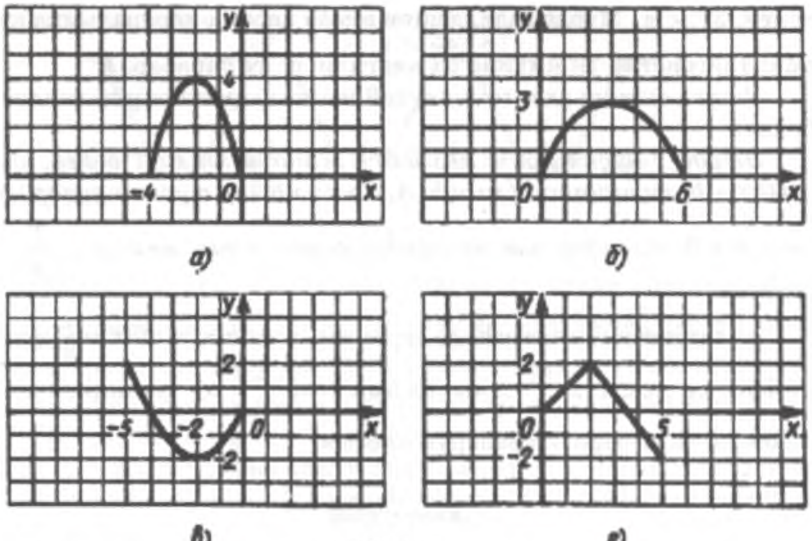
**58.** а) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$; б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$;
в) $f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$.

59—60-функцияларынын жуп эмес экендигин далилдегиле:

**59.** а) $f(x) = x^3 \sin x^2$; б) $f(x) = x^2(2x - x^3)$;
в) $f(x) = x^5 \cos 3x$; г) $f(x) = x(5 - x^2)$.

**60.** а) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{2x^3}$; б) $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;
в) $f(x) = \frac{3x}{x^4 + 2}$; г) $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$.

**61.** 37-*а—г*, сүрөттө $x \geq 0$ ($x \leq 0$) шартын канааттандырган бардык $x$ үчүн $f$ функциясынын графиги тургузулган. Эгерде: 1) $f$ — жуп функция; 2) $f$ — так функция экендиги белгилүү болсо, $f$ функциясынын графигин тургузула.




37-сүрөт

**62.** Эгерде:

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $T=4\pi$; б) $f(x)=2\,\mathrm{tg}\,3x$, $T=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=3\cos 4x$, $T=\frac{\pi}{2}$; г) $f(x)=\mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}$, $T=3\pi$

болсо, $T$ саны $f$ функциясынын мезгили болорун далилдегиле.

**63.** Төмөнкү $f$ функцияларынын мезгилдүүлүгүн далилдегиле:

а) $f(x)=2-\cos x$; б) $f(x)=\mathrm{tg}\,2x$;

в) $f(x)=\sin x+\cos x$; г) $f(x)=3+\sin^2 x$.

64—65-функцияларынын ар биринин эң кичине оң мезгилин тапкыла.

**64.** а) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}$; б) $y=3\mathrm{tg}\,1{,}5x$;

в) $y=4\cos 2x$; г) $y=5\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$.

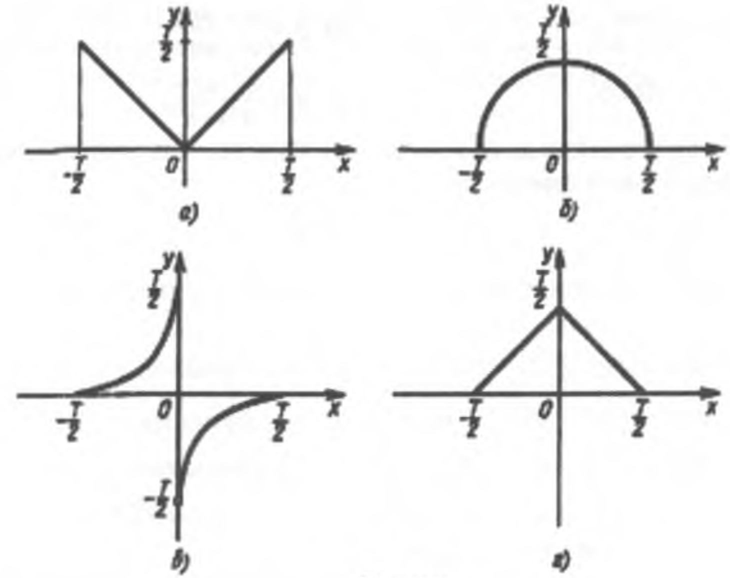
**65.** а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\sin x\sin 4x-\cos x\cos 4x$;

в) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; г) $y=\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x$.

**66.** 38-*а*—*г*, сүрөттө мезгили $T$ болгон функциянын графигинин бөлүгү чийилген. Бул функциянын графигин $[-1{,}5T;\ 2{,}5T]$ кесиндисинде тургузгула.

**67.** а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; г) $y=\sin 1{,}5x$ функцияларынын эң кичине оң мезгилин тапкыла жана графиктерин тургузгула.






38-сүрөт

**68.** Эгерде:

а) $f(x)=\sin x$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $T=\frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x)=\cos x$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos(\frac{\pi}{2}+\pi)=0$, $T=\pi$;

в) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{эгерде } x\le 1 \text{ болсо,}\\ 3-x, & \text{эгерде } x>1 \text{ болсо,}\end{cases}$

$f(-\frac{1}{2})=0{,}5$, $f(-\frac{1}{2}+3)=0{,}5$, $T=3$;

г) $f(x)=x+|x|$, $f(-4)=0$, $f(-4+3)=0$, $T=3$ болгондо, окуучу ар бир $f$ функциясы үчүн, эки барабардыктын туура экендигин текшерип, $T$ саны $f$ тин мезгили болот деген жыйынтыкка келген. Окуучу жаңылган жокпу?

---

69—70-функциялардын кайсынысы жуп, кайсынсы так, кайсынсы жуп да, так да болушпайт?

**69.** а) $y=\sin x+\mathrm{ctg}\,x-x$; б) $y=\frac{|x|}{\sin x\cos x}$;

в) $y=x^4+\mathrm{tg}^2x+x\sin x$; г) $y=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x}{|x|}$.

**70.** а) $y = \frac{\sin x}{x^3 - 1}$; б) $y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$;

в) $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$; г) $y = \frac{x + \operatorname{tg} x}{x \cos x}$.

**71.** Төмөнкү функциялар жуп же так болорун далилдегиле жана графиктерин тургузгула:

а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^3}$.

**72.** $f$ жана $g$ функциялары бардык чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталышкан. Эгерде:

а) $h(x) = f(x)g^2(x)$, $f$ — жуп, $g$ — так функция;

б) $h(x) = f(x) - g(x)$, $f$ жана $g$ — жуп функциялар;

в) $h(x) = f(x) + g(x)$, $f$ жана $g$ — так функциялар;

г) $h(x) = f(x)g(x)$, $f$ жана $g$ — так функциялар болсо, $h$ функциясы жуп же так болобу?

**73.** Төмөнкү функциялардын эң кичине оң мезгилин тапкыла:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{tg}x \operatorname{ctg}x$;

в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; г) $y = (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2$.

**74.** Төмөнкү функциялардын графиктерин түзгүлө:

а) $y = 1 - \cos 1{,}5x$; б) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

в) $y = 2 + \sin\frac{x}{2}$; г) $y = \operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{6})$.

**75.** Эгерде $y = f(x)$ функциясы мезгилдүү болсо, анда $y = kf(x) + b$ функциясы да мезгилдүү болорун далилдегиле.

**76.** 2 саны төмөнкү функциялардын мезгили эмес экендигин далилдегиле:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = \cos x$; в) $y = 3x - 5$; г) $y = |x|$.

## 5. Функциялардын өсүшү жана кемиши. Экстремумдар

**1. Функциялардын өсүшү жана кемиши.** Силер, өсүүчү жана кемүүчү функциялар түшүнүгү менен таанышкансыңар. Алсак, 39-сүрөттө $[-1;10]$ кесиндисинде аныкталган функциянын графиги сүрөттөлгөн. Бул функция $[-1;3]$ жана $[4;5]$ кесиндилеринде өсөт, $[3;4]$ жана $[5;10]$ кесиндилеринде кемийт. $y = x^2$ функциясы $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемий тургандыгы жана $[0;\ -\infty)$ аралыгында





өсө тургандыгы белгилүү. Бул функциянын графиги, $x$ чоңдугу $-\infty$ ден $\infty$ ге чейин өзгөргөндө, адегенде нөлгө чейин «түшөт» (0 чекитинде функциянын мааниси нөлгө барабар), андан кийин чексизге чейин «көтөрүлөт» (20-сүрөттү кара).

Аныктама. **Эгерде $P$ көптүгүнүн $x_2 > x_1$ болгон ар кандай $x_1$ жана $x_2$ сандары үчүн $f(x_2) > f(x_1)$ барабардыгы аткарылса, $f$ функциясы $P$ көптүгүндө өсөт.**

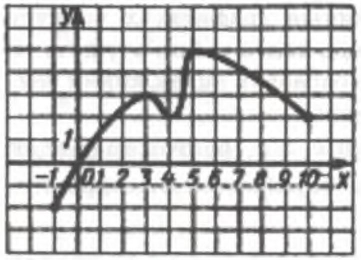
Аныктама. **Эгерде $P$ көптүгүнүн $x_2 > x_1$ болгон ар кандай $x_1$ жана $x_2$ сандары үчүн $f(x_2) < f(x_1)$ барабарсыздыгы аткарылса, $f$ функциясы $P$ көптүгүндө кемийт.**

Башкача айтканда, эгерде $P$ көптүгүндөгү аргументтин чоң маанисине функциянын чоң мааниси туура келсе, $f$ функциясы бул көптүктө өсүүчү деп аталат. Эгерде $P$ көптүгүндөгү аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келсе, $f$ функциясы бул көптүктө кемүүчү деп аталат.

○ 1-мисал. $f(x) = x^n$ $(n \in N)$ функциясы, $n$ так болгондо бүткүл сан түз сызыгында өсөөрүн, ал эми $n$ жуп болгондо $f(x) = x^n$ функциясы $[0;\infty)$ аралыгында өсөөрүн жана $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемиирин далилдейбиз.

Адегенде $n$ дин бардык натуралдык маанилеринде $f(x) = x^n$ функциясы $[0;\infty)$ аралыгында өсө тургандыгын далилдейбиз. $x_2 > x_1 \geq 0$ болсун дейли. Анда даражанын касиети боюнча $x_2^n > x_1^n$. Эми $n$ жуп болгон учурду карайбыз. $x_1 < x_2 \leq 0$ болсун дейли. Анда $-x_1 > -x_2 \geq 0$ жана $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$, б.а. $x_1^n > x_2^n$. Мына ушуну менен $n$ жуп болгондо $f(x) = x^n$ функциясынын $(-\infty;\ 0]$ аралыгында кемий тургандыгы далилденди. $n$ так болгон учурду кароо калды. Эгерде $x_1 < 0 < x_2$ болсо, анда $x_1^n < 0 < x_2^n$. Эгерде $x_1 < x_2 \leq 0$ болсо, анда $-x_1 > -x_2 \geq 0$, ошондуктан $(-x_1)^n > (-x_2)^n \geq 0$, б.а. $-x_1^n > -x_2^n$, мындан $x_2^n > x_1^n$ экендиги келип чыгат. Мына ушинтип, $n$ так болгондо $x_2 > x_1$ барабарсыздыгынан $x_2^n > x_1^n$ барабарсыздыгы келип чыгары далилденди. $f(x) = x^n$ функциясы $n$ так болгондо бүткүл сан түз сызыгында өсөт.

2-мисал. Эгерде $y = f(x)$ функциясы $P$ көптүгүндө өсүүчү болсо, анда $y = -f(x)$ функциясы $P$ көптүгүндө кемий тургандыгын далилдейбиз.




39-сүрөт

$x_1$ жана $x_2$ сандары $P$ көптүгүнүн каалаган эки саны болушсун жана $x_1 > x_2$ дейли. $-f(x_2) < -f(x_1)$, б.а. $f(x_1) < f(x_2)$ экендигин далилдөө керек. Бирок бул — $P$ көптүгүндө $f$ өсөт деген шарттын натыйжасы.

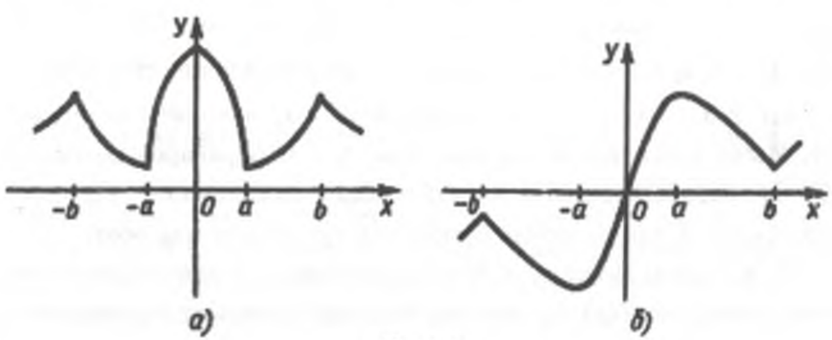
3 - м и с а л. $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty; 0)$ жана $(0; \infty)$ аралыктарынын ар биринде кемийт (өз алдынча далилдегиле). Бирок бул функция ушул аралыктардын биригүүсүндө кемүүчү болбойт. Мисалы, $1 > -1$, бирок $f(1) > f(-1)$. ●

Функцияларды өсүүгө жана кемүүгө изилдөөдө, учтарын кошкондогу (эгер алар бул аралыктарга тиешелүү болушса), эң чоң узундуктагы өсүү жана кемүү аралыктарын көрсөтүү кабыл алынган. Алсак, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы $[2; 100]$ кесиндисинде кемийт деп айтууга болот. Бул туура, бирок мындай жооп толук эмес.

Э с к е р т ү ү. Жуп жана так функциялар үчүн, өсүү жана кемүү аралыктарын табуу маселеси бир кыйла жөнөкөйлөшөт; бул аралыктарды $x \ge 0$ болгондо эле табуу жетиштүү (40-сүрөт).

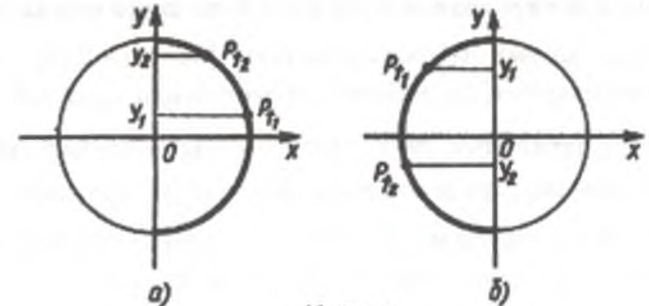
Мисалы, $f$ функциясы жуп жана $[a; b]$ (мында $b < a \ge 0$) кесиндисинде өсөт дейли. $[-b; -a]$ кесиндисинде бул функция кемий тургандыгын далилдейбиз.

Чындыгында $-a \ge x_2 > x_1 \ge -b$ болсун. Анда, $f(-x_2) = f(x_2)$, $f(-x_1) = f(x_1)$, бирок $a \le -x_2 < -x_1 \le b$ жана $[a; b]$ кесиндисинде




40-сүрөт






41-сүрөт

$f$ өсүүчү болгондуктан, $f(-x_1) > f(-x_2)$ болорун алабыз, б.а. $f(x_1) > f(x_2)$.

**2. Тригонометриялык функциялардын өсүшү жана кемиши.** Адегенде $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in Z$ кесиндилеринде синустун өсө тургандыгын далилдейбиз. Синус мезгилдүү болгондуктан далилдөөнү $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ кесиндиси үчүн жүргүзүү жетиштүү. $x_2 > x_1$ болсун дейли. Синустардын айырмасынын формуласын пайдаланып төмөнкүнү табабыз:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_2 + x_1}{2}. \qquad (1)$$

$-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$ барабарсыздыгынан $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \le \frac{\pi}{2}$ жана $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ лер келип чыгат.

Ошондуктан $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. (1) барабардыгынан $\sin x_2 - \sin x_1$ айырмасы оң, б.а. $\sin x_2 > \sin x_1$. Муну менен, көрсөтүлгөн кесиндилерде синустун өсө тургандыгы далилденди. Ушуга эле окшош $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in Z$ кесиндилери синустун кемүү аралыктары экендиги далилденет.

Алынган жыйынтыкты бирдик айлананын жардамы менен көрсөтүү жеңил экендигин эскертебиз: эгерде $-\frac{\pi}{2} \le t_1 < t_2 \le \frac{\pi}{2}$ болсо, анда $P_{t_2}$ чекитинин ординатасы; $P_{t_1}$ чекитинин ординатасынан чоң болору түшүнүктүү (41-*а*, сүрөт). Эгерде $\frac{\pi}{2} \le t_1 < t_2 \le \frac{3\pi}{2}$ болсо, анда $P_{t_2}$ чекитинин ординатасы, $P_{t_1}$ чекитинин ординатасынан кичине (41-*б*, сүрөт) болот.

Косинустун өсүү аралыктары $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, мында $n \in Z$ кесиндилери, ал эми кемүү аралыктары $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$ кесиндилери болушат. Далилдөөсүн синустукундагыдай эле жүргүзүүгө болот. Келтирүүнүн $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ формуласын пайдалануу жеңил, мисалы, бул формуладан, косинустун өсүү аралыктары синустун өсүү аралыктарын $\frac{\pi}{2}$ ге солго жылдыруу аркылуу алынган аралыктар экендиги дароо эле келип чыгат.

Тангенс функциясы $(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)$, мында $n \in Z$ аралыктарында өсө тургандыгын далилдейбиз. Тангенс мезгилдүү болгондуктан, далилдөөнү $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$ интервалы үчүн жүргүзүү жетиштүү.

$x_1$ жана $x_2$ сандары, $x_2 > x_1$ болгон каалагандай сандар болушсун. $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$ экендигин далилдөө керек. Төмөнкүдөй экендигин алабыз:

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_2 \cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2}.$$

Болжолдоо боюнча $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ . Ошондуктан $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$.Ал эми $0 < x_2 - x_1 < \pi$ болгондуктан $\sin(x_2 - x_1) > 0$.Натыйжада $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$, б.а. $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$ талап кылынган далилденди.

Ушул сыяктуу эле, ctg дагы $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$ аралыктарында кемий тургандыгы далилденет.

**3. Экстремумдар.** Функциянын өзгөрүү тартибин кандайдыр бир чекиттин жанында изилдөө үчүн аймак деген түшүнүктү пайдалануу ыңгайлуу, $a$ чекитин камтыган ар кандай интервал, ал *чекиттин аймагы* деп аталат. Мисалы, (2;6) интервалы 3 чекитинин аймактарынын бири, (−3,3; −2,7) интервалы −3 чекитинин аймагы.

39-сүрөттөгү графикти карап көрүп, функциянын өсүүсү анын кемүүсү менен (3 жана 5 чекиттери), же тескерисинче, кемүүсү анын өсүүсү менен (4 чекити) алмашкан чекиттери, аныкталуу областынын «шектүү» чекиттери экендиги жөнүндөгү жыйынтыкка келүүгө болот. Бул чекиттерди тиешелүү түрдө *максимум* ($x_{\max} = 3$ жана $x_{\max} = 5$) жана *минимум* ($x_{\min} = 4$) *чекиттери* деп атайбыз.

Конкреттүү функциялардын графиктерин түзүүдө мындай чекиттерди алдын ала табуу пайдалуу. Мисалы, sin функциясы



үчүн мындай чекиттер $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ болушат. Ачык болсун үчүн $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ни алалы. Бул чекит синустун өсүү аралыгынын оң учу, ошондуктан $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $1 = \sin x_0 > \sin x$ болот. Андан тышкары, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ — кемүү аралыгынын сол учу, демек, $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{2}$ болгондо, $\sin x < \sin x_0$. Мына ошентип, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ чекитинин $(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ аймагында жатуучу ар кандай $x$ үчүн $\sin\frac{\pi}{2} > \sin x$, ошондуктан $x_0 = \frac{\pi}{2}$ чекити — синус функциясынын максимум чекити.

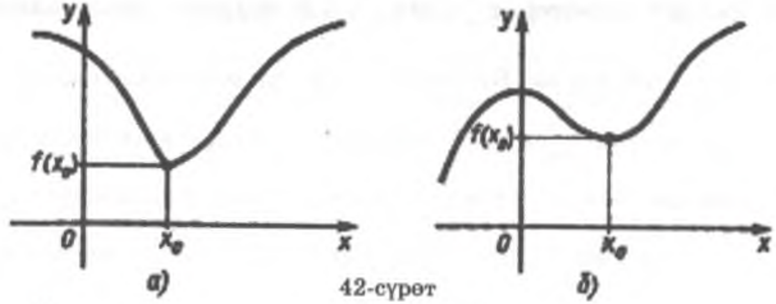
$-\frac{\pi}{2}$ чекитинде, тескерисинче, функциянын кемүүсү анын өсүүсү менен алмашат ($-\frac{\pi}{2}$ нин сол жагында кемийт, ал эми оң жагында өсөт). Ушуга окшош ой жүгүртүп $-\frac{\pi}{2}$ чекитинин кандайдыр бир аймагында $\sin x > \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ экендигин алабыз, ошондуктан $-\frac{\pi}{2}$ чекити — синус функциясынын минимум чекити болот. Экстремум чекиттеринин так аныктамаларын беребиз.

А н ы к т а м а. **Эгерде $x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык $x$ үчүн, $f(x) \ge f(x_0)$ барабарсыздыгы аткарылса, $x_0$ чекити $f$ *функциясынын минимум чекити* деп аталат** (42-сүрөт).

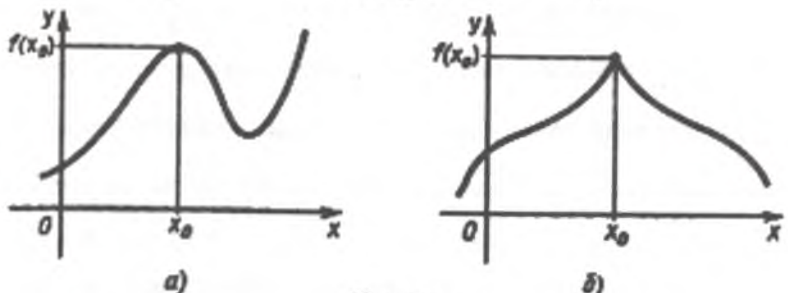
А н ы к т а м а. **Эгерде $x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык $x$ тер үчүн $f(x) \le f(x_0)$ барабарсыздыгы аткарылса, $x_0$ чекити $f$ *функциясынын максимум чекити* деп аталат** (43-сүрөт).

Аныктама боюнча $f$ функциясынын $x_0$ максимум чекитиндеги мааниси ал чекиттин кандайдыр бир аймагындагы функциянын маанилеринин ичинен эң чоңу, ошондуктан $x_0$ чекитинин аймагында функциянын графиги, эреже катары, жылма «дөңсөө» (43-*а* жана 44-сүрөттөгү $x_1$, $x_2$, $x_3$ чекиттери) же учтуу «чоку» (43-*б*, сүрөт) түрүндө сүрөттөлүшөт. Минимум чекитинин аймагында функциянын графиги жылма (42-*б*, сүрөттөгү $x_0$ чекити, 44-сүрөттөгү $x_4$ $x_5$ чекиттери) же учтуу (42-*а*, сүрөттөгү $x_0$ чекити жана 44-сүрөттөгү $x_6$ чекити) «ойдуң» түрүндө сүрөттөлүшөт.

Максимум жана минимум чекиттериндеги функциялардын графиктеринин өзгөрүү тартиби жөнүндөгү башка мисалдар 45-(*a* — максимум чекити), 46-(*a* — минимум чекити), жана 47-(бул жерде




42-сүрөт




43-сүрөт

(−1; 0) аралыгындагы ар бир чекит минимум чекити да, максимум чекити да болот) сүрөттөрдө көрсөтүлгөн.

Функциянын максимум жана минимум чекиттери үчүн жалпы ат берүү кабыл алынган — алар *экстремум чекиттери* деп аталат. Бул чекиттердеги функциянын маанилери тиешелүү түрдө функциянын *максимуму* жана *минимуму* деп аталышат (жалпы аты — функциянын экстремуму). Максимум чекити $x_{max}$, ал эми минимум чекити $x_{min}$ аркылуу белгиленет. Функциянын бул чекиттердеги маанилери тиешелүү түрдө $y_{max}$ жана $y_{min}$ менен белгиленет.

### *Көнүгүүлөр*

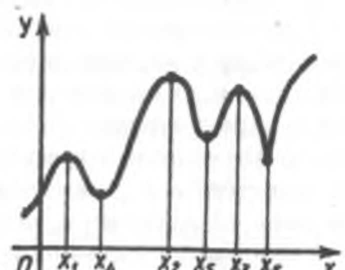
**77.** Графиктери 48-*а*—*г*, сүрөттөрдө берилген функциялар үчүн төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын;

б) функциянын максимум жана минимум чекиттерин;

в) функциянын экстремумдарын тапкыла.

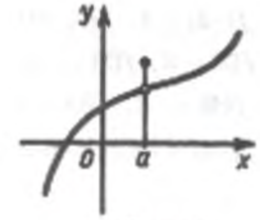
78—80 деги $f$ функциянын графигинин эскизин чийгиле.



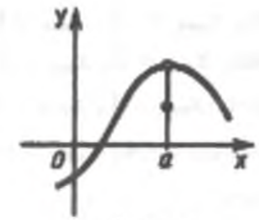

44-сүрөт



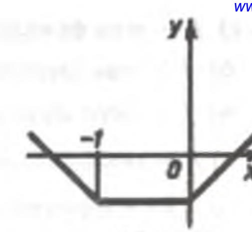





45-сүрөт




46-сүрөт




47-сүрөт

**78.** а) $f$ функциясы $(-\infty;2]$ аралыгында өсөт жана $[2;\infty)$ аралыгында кемийт;

б) $f$ функциясы $(-\infty;\ -2]$ жана $[0;\ 3]$ аралыктарында өсөт, $[-2;\ 0]$ жана $[3;\infty)$ аралыктарында кемийт;

в) $f$ функциясы $(-\infty;-1]$ аралыгында кемийт жана $[-1;\infty)$ аралыгында өсөт.

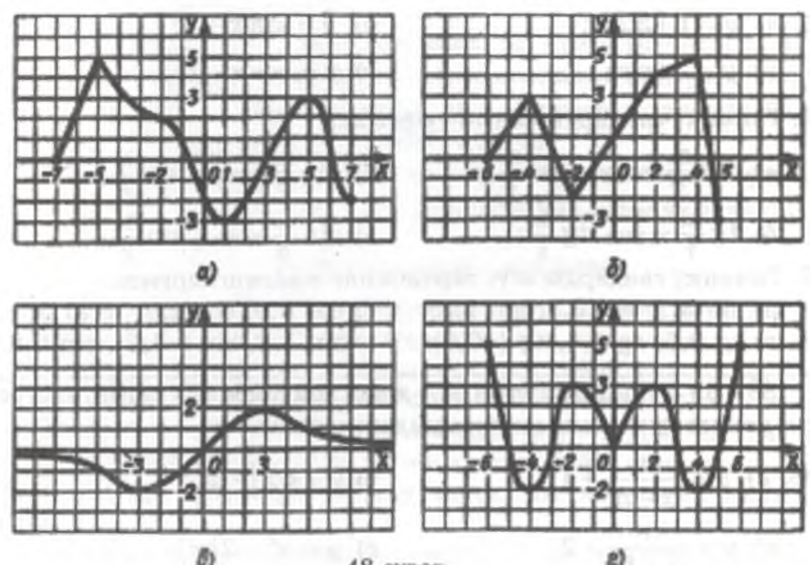
г) $f$ функциясы $(-\infty;\ 1]$ жана $[4;\ \infty)$ аралыктарында кемийт, $[1;4]$ аралыгында өсөт.

**79.** а) $x_{max}=-3$, $x_{min}=4$, $f(-3)=5$, $f(4)=-5$;

б) $x_{min}=-2$, $x_{min}=2$, $x_{max}=0$, $f(-2)=f(2)=-3$, $f(0)=2$;

в) $x_{min}=-5$, $x_{max}=2$, $f(-5)=1$, $f(2)=6$;

г) $x_{max}=-4$, $x_{max}=3$, $x_{min}=-1$, $f(-4)=5$, $f(3)=2$, $f(-1)=-2$.




48-сүрөт

**80.** а) $f$ — жуп функция, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 0$, $f(-3) = 4$, $f(0) = 0$;

б) $f$ — так функция, $x_{max} = 2$, $x_{min} = 5$, $f(2) = 3$, $f(5) = -4$;

в) $f$ — жуп функция, $x_{min} = 4$, $x_{max} = 0$, $f(4) = -2$, $f(0) = 2$;

г) $f$ — так функция, $x_{min} = -4$, $x_{max} = -1$, $f(-4) = -3$, $f(-1) = 1$.

**81.** $y = kx + b$ функциясы:

а) $k > 0$ болгондо, $R$ көптүгүндө өсөөрүн;

б) $k < 0$ болгондо, $R$ көптүгүндө кемиирин далилдегиле.

**82—85-функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын, максимум жана минимум чекиттерин, функциянын максимумун жана минимумун тапкыла.**

**82.** а) $y = -x^2 + 6x - 8$; б) $y = (x + 2)^4 + 1$;

в) $y = x^2 - 4x$; г) $y = (x - 3)^4$.

**83.** а) $y = \frac{3}{x-2}$; б) $y = -(x + 3)^5$;

в) $y = -\frac{1}{x+3}$; г) $y = (x - 4)^3$.

**84.** а) $y = 3\sin x - 1$; б) $y = -2\cos x + 1$;

в) $y = 2\cos x + 1$; г) $y = 0,5\sin x - 1,5$.

**85.** а) $y = 1 + 2\operatorname{tg} x$; б) $y = \sin x + 1$;

в) $y = -\operatorname{tg} x$; г) $y = \cos x - 1$.

**86.** Төмөнкү сандарды салыштыргыла:

а) $\cos\frac{3\pi}{7}$ жана $\cos\frac{2\pi}{9}$; б) $\sin\frac{5\pi}{7}$ жана $\sin\frac{7\pi}{8}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7}$ жана $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{9}$ жана $\sin\frac{3\pi}{8}$.

**87.** Төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:

а) sin 3,2, sin 3,8, sin 1,3; б) cos 0,9, cos 1,9, cos1,3;

в) tg 0,5, tg 1,4, tg (−0,3); г) sin 1,2, sin (−1,2), sin 0,8.

---

**88—89-функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын, экстремум чекиттерин жана экстремумдарын тапкыла.**

**88.** а) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; б) $y = 4|x| - x^2$;

в) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$; г) $y = x^2 - 2|x|$.



**89.** а) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$; б) $y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{3})$;

в) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$; г) $y = 2 + \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

**90.** Төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:

а) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos(-\frac{5\pi}{9})$;

б) $\operatorname{tg}(-\frac{5\pi}{7})$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8}$, $\operatorname{tg}(-\frac{7\pi}{16})$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$;

г) $\sin(-\frac{5\pi}{12})$, $\cos\frac{13\pi}{24}$, $\sin\frac{5\pi}{24}$, $\sin\frac{17\pi}{6}$.

**91.** Төмөнкү функциялардын:

а) $f(x) = x^4 + 3x$, $[0; \infty)$ да өсөөрүн;

б) $f(x) = -x^3 - 2x$, $R$ де кемиирин;

в) $f(x) = x^6 - 0,5$, $(-\infty; 0]$ дө кемиирин;

г) $f(x) = x^5 + 1,5x$, $R$ де өсөөрүн далилдегиле.

**92.** Кийинки ырастоолорду далилдегиле:

а) эгерде $f$ — жуп функция; $x_0$ — максимум чекити болсо, анда $x_0$ — максимум чекити болорун;

б) эгерде $f$ — так функция жана $[a; b]$ аралыгында кемүүчү болсо, анда $f$ функциясы $[-b; -a]$ аралыгында кемүүчү болорун;

в) эгерде $f$ — так функция, $x_0$ — минимум чекити болсо, анда $x_0$ чекити максимум чекити болорун;

г) эгерде $f$ — жуп функция жана $[a; b]$ аралыгында өсүүчү болсо, анда $[-b; -a]$ аралыгында ал функциянын кемүүчү экендигин.

## 6. Функцияларды изилдөө

**1. Функциялардын графиктерин түзүү.** Силер функциянын графигин «чекиттер боюнча» түзүп келдиңер. Көпчүлүк учурларда, эгерде жетиштерлик көп сандагы чекиттер пайдаланылса, бул метод жакшы жыйынтыктарды берет. Бирок мында функциянын маанилеринен турган чоң таблицаларды түзүүгө туура келет, негизгиси, функциянын маанилүү өзгөчөлүктөрү байкалбай калып, жыйынтыгында графикти түзүүдө жаңылыштык кетип калышы мүмкүн.

Мисалы, функциянын маанилерин 15 чекитте эсептеп чыгып, графиктин тиешелүү чекиттерин координаталык тегиздикте белгилеп, 49-сүрөткө келдик дейли. Графиктин эскизи (элеси) бул түзүлгөн чекиттер аркылуу өтүүчү үзгүлтүксүз ийри сызыкка жакын болот деп эсептөө табигый иш (50-сүрөт). Бирок накта график (ошол эле чекиттер аркылуу өтүүчү) бул эскизге таптакыр окшобошу да мүмкүн (51—53-сүрөттөр).

Жаңылыштыктарды кетирбеш үчүн, функциянын мүнөздүү өзгөчөлүктөрүн таба билиш керек, б.а. алдын ала ага изилдөө жүргүзүү керек. Мисалы, $f$ функциясы жөнүндө бизге төмөнкүлөр белгилүү болсун дейли:

— ал функция $(-\infty; -10)$, $(-10; 10)$, $(10; \infty)$ аралыктарынын биригүүсүндө аныкталган;

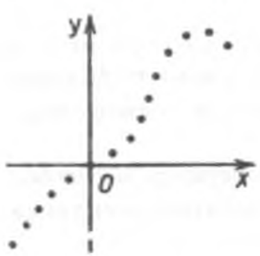
— нөлгө $-11$ жана $0$ чекиттеринде айланат, $(-\infty; -11)$, $(-10; 0)$ интервалдарында терс жана $(-11; -10)$; $(0; 10)$ жана $(10; \infty)$ интервалдарында оң;

— $(-\infty; -10)$ жана $(-10; 10)$, $[12; 15]$ аралыктарында өсөт жана $[10; 12]$ жана $[15; \infty)$ аралыктарында кемийт;

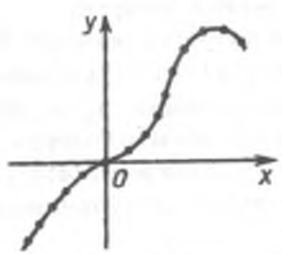
— 12 чекитинде минимумга ээ жана $f(12) = 16$, 15 чекитинде максимумга ээ жана $f(15) = 19$;

— акырында, аргументтин маанилери — 10 жана 10го жакындаганда $f$ тин маанилери абсолюттук чоңдугу боюнча чексиз өсүшөт.

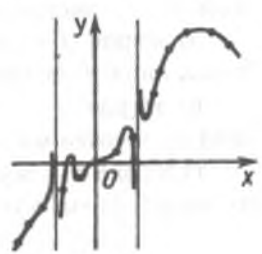
Бул маалыматтар, функциянын графигинин эскизи 53-сүрөттө чийилген сыяктуу болорун түшүнүүгө мүмкүнчүлүк беришет.



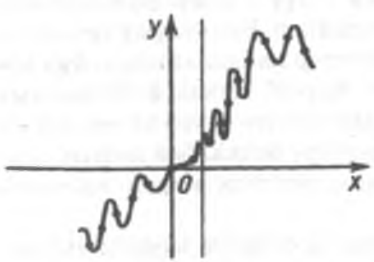

49-сүрөт



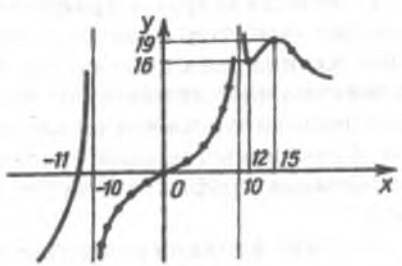

50-сүрөт




51-сүрөт




52-сүрөт




53-сүрөт



Дагы бир мисалды карайлы: төмөнкү функцияны изилдейбиз

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1) Функциянын аныкталуу областын табабыз. Берилген учурда $D(f)$ — бүткүл сан огу болот, анткени бөлчөктүн бөлүмү $x^2+1$ нөлгө айланбайт.

2) Ар кандай $x$ үчүн, $f$ функциясы жуп экендигин байкайбыз:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

Ошондуктан функцияны изилдөөнү жана анын графигин түзүүнү $x \geq 0$ болгон учурда эле жүргүзүү жетиштүү, андан кийин, түзүлгөн графикти ординаталар огуна карата чагылдырып коюу эле калат.

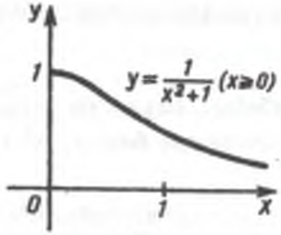
3) $f$ функциясынын графигинин координаталар огу менен кесилишкен чекиттерин табабыз. $f$ тин графиги ординаталар огун $(0; f(0)$ чекитинде кесет. $f(0)$тин мааниси 1ге барабар. Ошондуктан $f$ графиги $(0;1)$ чекити аркылуу өтөт.

$f$ функциясынын графигинин абсциссалар огу менен кесилишүү чекитин табуу үчүн $f(x) = 0$ теңдемесин чыгаруу керек (анын тамырларын ***функциянын нөлдөрү*** деп аташат). $\frac{1}{x^2+1} = 0$ теңдемесинин тамырлары жок. Демек, $f$ тин графиги абсциссалар огун кеспейт.

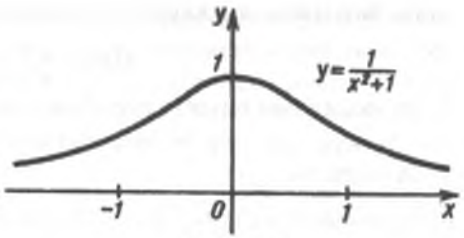
4) $f$ функциясы кайсы аралыктарда оң, ал эми кайсы аралыктарда терс маанилерге ээ боло тургандыгын тактайбыз; аларды ***функциянын белгилеринин турактуу болуу аралыктары*** деп аташат. Бул аралыктарда функциянын графиги абсциссалар огунун жогору (тиешелүү түрдө төмөн) жагында жайланышат. Берилген учурда, $x$ тин каалаган маанилеринде $x^2+1$ оң болгондуктан, бүткүл сан түз сызыгында $f(x) > 0$.

5) $f$ функциясынын кайсы аралыктарда өсө же кемий тургандыгы жөнүндөгү маалыматтар $f$ тин графигин түзүүнү бир кыйла жеңилдетет (бул аралыктар функциянын ***өсүү*** же ***кемүү аралыктары*** деп аталат). Каралып жаткан функция үчүн өсүү аралыгы — $(-\infty; 0]$, ал эми кемүү аралыгы — $[0; \infty)$ экендигин далилдейбиз.

$x_1$ жана $x_2$ лер $[0; \infty)$ аралыгындагы эки маани болсун, мында $x_2 > x_1$ дейли. $x_1$ жана $x_2$ оң болушкандыктан, $x_2 > x_1$ шартынан $x_2^2 > x_1^2$, $x_2^2 + 1 > x_1^2 + 1$ келип чыгат да, акырында $\frac{1}{x_2^2+1} < \frac{1}{x_1^2+1}$.




54-сүрөт




55-сүрөт

Мына ушинтип, $f(x_2) < f(x_1)$, б.а. $[0;\ \infty)$ аралыгында $f$ функциясы кемийт, $(-\infty;\ 0]$ аралыгында $f$ функциясы өсөт. Далилдөөсү мурункуга эле окшош жүргүзүлөт (берилген функциянын жуп экендигин пайдаланса да болот).

6) Өсүү кемүү менен же кемүү өсүү менен алмашкан чекиттердеги функциянын маанилерин табабыз. Биздин учурда, өсүү аралыгына да, кемүү аралыгына да тиешелүү болгон бир гана чекит бар — ал 0 чекити. 0 чекити $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ функциясынын максимум чекити; $f(0)=1$.

7) Акырында, $x$ чексиз чоңойгондо $x^2+1$ дин мааниси да чексиз чоңоёт, ошондуктан $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ дин мааниси оң бойдон калып нөлгө умтуларын байкайбыз.

Изилдөөнүн жүрүшүндө $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ функциясы жөнүндө алынган маалыматтар анын графигин түзүү үчүн жетиштүү.

Графиктин (0;1) чекитин тургузабыз. $[0;\ \infty)$ аралыгы $f$ функциясынын кемүү аралыгы экендигин белгиледик. Ошондуктан абсциссасы 0 болгон чекиттин оң жактарында $f$ тин графигин «төмөн кеткен» ийри сызык түрүндө чиебиз (54-сүрөт). $x$ тин бардык маанилеринде $f(x)>0$ болгондуктан, бул ийри сызык абсциссалар огунан төмөн түшпөйт жана оңго карай созгондо график абсциссалар огуна чексиз жакындайт (изилдөөнүн 7-пунктун кара). Эми $f$ функциясынын жуп экендигин пайдалануу гана калды: $x\geq 0$ үчүн түзүлгөн ийри сызыкты ординаталар огуна карата симметриялуу чагылдырып, $f$ тин графигин алабыз (55-сүрөт).

**2. Функцияларды изилдөөнүн схемасы.** Мындан ары функцияны изилдөөнү айтылган схема боюнча жүргүзөбүз. Жалпы учурда функцияны изилдөө схемасы төмөнкү маселелерди чечүүнү өз ичине камтыйт:





1) Берилген $f$ функциясынын аныкталуу областын табуу.

2) Функциянын, аны изилдөөнү жеңилдете турган өзгөчөлүктөрү бар экендигин тактоо, б.а. $f$ функциясынын: а) жуп же так экендигин; б) мезгилдүүлүгүн билүү.

3) $f$ тин графигинин координаталык октор менен кесилишкен чекиттеринин координаталарын эсептөө.

4) $f$ функциясынын белгилеринин туруктуу болуу аралыктарын табуу.

5) $f$ функциясы кайсы аралыктарда өсө тургандыгын, ал эми кайсы аралыктарда кемий тургандыгын тактоо.

6) Функциянын экстремум чекиттерин, экстремумдун түрүн (максимум же минимум) табуу жана $f$ тин маанилерин ал чекиттерде эсептөө.

7) $f$ функциясынын өзгөрүү тартибин аныкталуу областына тиешелүү болбогон мүнөздүү чекиттердин (мисалы, $x=0$ чекити $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы үчүн) аймагында жана аргументтин чоң (модулу боюнча) маанилеринде изилдөө.

Бул план болжолдуу мүнөздө экендигин белгилөө зарыл. Алсак, абсциссалар огу менен кесилишин табуу үчүн $f(x)=0$ теңдемесин чыгаруу керек. Муну биз дайыма эле, мисалы $f(x)$ бешинчи даражалуу көп мүчө болгондо эле, жасай албайбыз. (Бирок, көпчүлүк учурда, мындай теңдемелердин тамырларынын санын жана тамырларынын өздөрүн каалагандай тактыкта табууга мүмкүнчүлүк берүүчү ыкмаларынын бар экендиги белгилүү.) Ошондуктан айрым учурларда, изилдөөнүн тигил же бул этабын калтырып коюуга туура келет. Бирок мүмкүн болушунча функцияны изилдөөнү ушул схема боюнча жүргүзүү максатка ылайык.

Функцияны изилдөөдөгү өтө татаал этап, эреже катары, өсүү (кемүү) аралыктарын изилдөө, ошондой эле экстремум чекиттерин табуу болот. Силер кийинки главада, бул маселелерди чечүүдөгү математикалык анализдин түшүнүктөрүн колдонууга негизделген жалпы метод менен таанышасыңар.

▽ $f$ функциясынын графиги чексиз жакындай турган вертикалдык түз сызыктар (мисалы, $f(x)=\frac{1}{x}$ үчүн $x=0$ түз сызыгы же 53-сүрөттө чийилген функция үчүн $x=\pm 10$ түз сызыктары) *вертикалдык асимптоталар* деп аталат.

Көпчүлүк учурларда функцияны берүүчү туюнтма бөлүмү $a$ чекитинде нөлгө айлануучу, ал эми алымы нөл болбой турган бөлчөк түрүндө болгон учурда, график $x=a$ вертикалдык асимптотага зэ болот. Мисалы, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясынын графиги $x=0$ вертикалдык асимптотага ээ. $f(x)=\operatorname{tg} x$ функциясынын графиги үчүн $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, мында $n\in Z$ түз сызыктары, вертикалдык асимптоталар болушат.

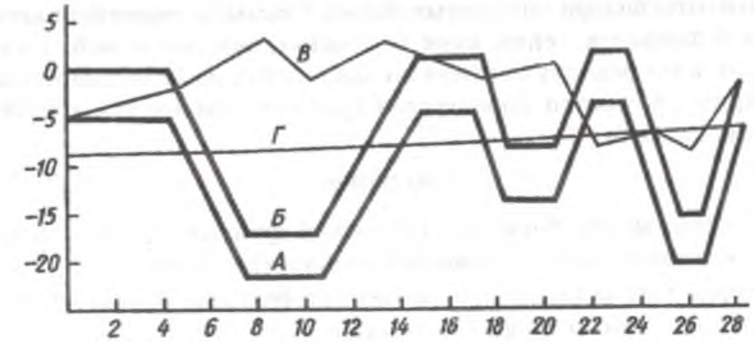
Эгерде $x$ (модулу боюнча) чексиз өскөндө функциянын графиги кандайдыр бир горизонталдык түз сызыкка ($f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ функциясы үчүн бул түз сызык $y=0$, 55-сүрөттү кара), же жантык түз сызыкка ($f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясынын графиги үчүн, $y=x$ түз сызыгы, 32-сүрөттү кара) чексиз жакындаса, анда мындай түз сызык *горизонталдык* (тиешелүү түрдө *жантык*) *асимптота* деп аталат. ▲

**3. Графикти «окуу».** Силер жогоруда, функциялардын графиктерин түзүүгө карата берилген мисалдарды жана маселелерди чыгарууда: $f$ функциясы формула менен берилген учурда, ал функциянын касиеттерин изилдөө жана графигин түзүү жагдайларын кездештиргенсиңер. Практикада башка маселе: $f$ тин графиги берилсе, анын жардамы менен бул функциянын негизги касиеттерин санап чыгууну талап кылуучу маселе, зор кызыгууну пайда кылат.

Мындай маселелер көбүнчө, эксперименттүү изилдөөлөрдү жүргүзүүдө чыгарылат. Мында графиктерди түзүү ар түрдүү ыкмалар: мисалы, эксперименттен табылган чекиттер боюнча түзүү менен жүргүзүлөт. Ошондой эле көп сандаган өзү жазуучу жабдыктар бар. Булар, мисалы, экрандарында электрдик термелүүлөр көрсөтмөлүү графиктик сүрөттөлүштөргө өзгөртүлүп түзүлүүчү осциллографтар. Көрсөтмөлүү графиктик жазууларды алууга мүмкүнчүлүк берүүчү жабдыктын башкы мисалы болуп, кардиограф кызмат кылат. Анын жардамы менен алынган кардиограмманы «окуу» менен, дарыгерлер жүрөктүн ишмердүүлүгүнүн абалы жөнүндө жыйынтык чыгарышат.

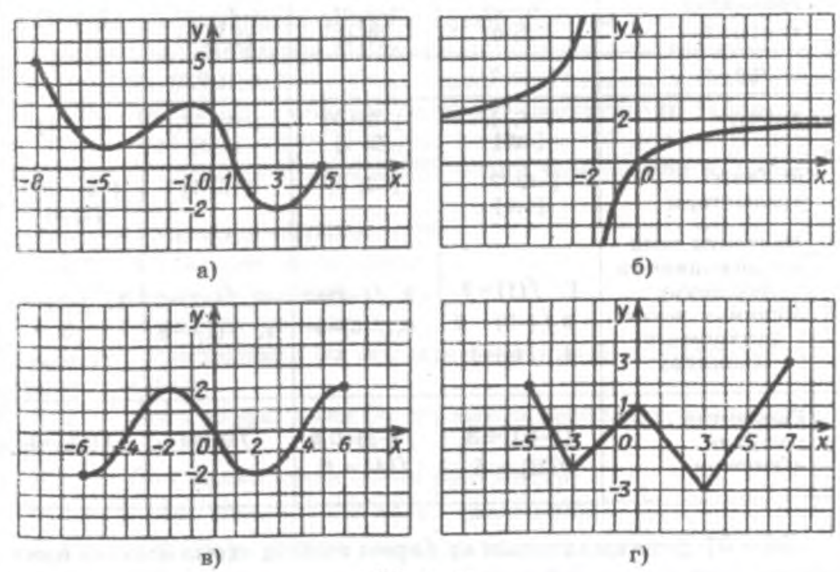
Силер 56-сүрөттү карап чыгып, реалдуу процесстерди изилдөөдө пайда болуучу жетишээрлик типтүү кыйынчылыктардын мисалы менен жана ал процесстерди түшүндүрүү үчүн так теориялардын алиге чейин түзүлө электиги менен тааныша аласыңар. Мында 1974-жылдын февралындагы Москва областы боюнча орточо суткалык температуралардын өзгөрүүсүнүн графиги берилген. А жана Б жоон сызыктары аркылуу узак мөөнөттүү прогноздун жыйын-






56-сүрөт

тыгын белгилей турган «теориялык ийри сызыктар» сүрөттөлгөн (прогноз 5° ка чейинки тактык менен берилгендиктен, ал сызыктан экөө). Биз бул графикти окуу менен, «сууктун толкунунун» үч жолу болжолдонгонун табабыз (4үнөн 10уна, 17нен 19на жана 23нөн 26-февралга чейин). Ошондой эле, аба ырайынын жылыганы күтүлбөстөн жалпысынан, сууктун болушу ($-17°$ $-22°$ка чейин) болжолдонгон. Бирок чындыгында (температуранын чыныгы өзгөрүүсү графикте *В* ичке сызык аркылуу сүрөттөлгөн) температура нормадан 5—10°ка жогору болгон (көп жылдык байкоолордун




57-сүрөт

жыйынтыгы болгон климаттык норма $\Gamma$ сызыгы менен берилген). 4үнөн 8-февралга чейин суук болбостон, жылыган ж.б. Силер прогноз жана реалдуу картина жөнүндөгү бул жана башка маалыматтарды 56-сүрөттө көрсөтүлгөн графиктерди «окуу» аркылуу ала аласыңар.

### *Көнүгүүлөр*

**93.** График менен берилген (57-сүрөт) функцияны изилдөөнү, изилдөөнүн жалпы схемасы боюнча жүргүзгүлө.

**94.** Эгерде $f$ функциясынын касиеттери белгилүү болсо (таблицаны кара), анын графигин түзгүлө:

| | Функциянын касиеттери | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Аныкталуу областы | [−6; 6] | [−5;4] | [−4; 4] | [−5; 3] |
| | Маанилеринин областы | [−2;5] | [0;6] | [−3; 6] | [0; 5] |
| 2 | Графиктин: а) $Ox$ огу менен | $A(-4;0)$ $B(-2;0)$ | $O(0;0)$ | $A(-4;\ 0)$, $B(-1;0)$, $C(2{,}5;0)$ | $A(3;\ 0)$ |
| | б) $Oy$ огу менен кесилишкен чекиттери | $C(0;\ 2{,}5)$ | | $D(0;-2)$ | $B(0;\ 4{,}5)$ |
| 3 | Белгиси турактуу аралыктар: а) $f(x)>0$ | [−6;−4), (−2; 6] | [−5;0], (0;4] | (−4; −1). (2,5; 4) | [−5; 3] |
| | б) $f(x)<0$ | (−4;−2) | – | (−1; 2,5) | – |
| 4 | а) Өсүү, | [−3;1], [4;6] | [−5;−2] [0; 4] | [−4;−2], [1;4] | [−3; 1] |
| | б) Кемүү аралыктары | [−6;−3] [1;4] | [−2; 0] | [−2; 1] | [−5; −3], [1; 3] |
| 5 | Максимум чекити, функциянын максимуму Минимум чекити, функциянын минимуму | 1, $f(1)=3$ −3 $f(-3)=-2$ 4, $f(4)=1$ | −2, $f(-2)=2$ 0, $f(0)=0$ | −2, $f(-2)=2$ 1, $f(1)=-3$ | 1, $f(1)=5$ −3 $f(-3)=2$ |
| 6 | Графиктин кошумча чекиттери | $f(-6)=3$ $f(6)=5$ | $f(-5)=0{,}5$ $f(4)=6$ | $f(4)=6$ | $f(-5)=3$ |

95—97 функциялардын ар бирин жалпы схема боюнча изилдегиле жана анын графигин түзгүлө.





**95.** а) $f(x)=5-2x$; б) $f(x)=3-2x-x^2$;

в) $f(x)=3x-2$; г) $f(x)=x^2-3x+2$.

**96.** а) $f(x)=\frac{1}{x}-2$; б) $f(x)=-(x-3)^4$;

в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; г) $f(x)=x^3-1$.

**97.** а) $f(x)=\sqrt{x-3}$; б) $f(x)=4x-x^2$;

в) $f(x)=\sqrt{x+1}$; г) $f(x)=4-x^2$.

98—99 функциялардын ар бирин жалпы схема боюнча изилдегиле жана анын графигин түзгүлө.

**98.** а) $f(x)=x^4+4x^2$; б) $f(x)=1-\sqrt{x+4}$;

в) $f(x)=x^3+x$; г) $f(x)=\sqrt{x-2}-2$.

**99.** а) $f(x)=x^2-2|x|+1$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$;

в) $f(x)=|x|-x^2$; г) $f(x)=\frac{2x+1}{x}$.

## 7. Тригонометриялык функциялардын касиеттери

### Гармониялык термелүүлөр

**1. Тригонометриялык функцияларды изилдөө.** Окуп-үйрөнүүчү функциялардын касиеттерин мурунку пункттагы келтирилген схема боюнча жазуу ыңгайлуу. Синус, косинус, тангенс жана котангенс функцияларынын силерге белгилүү касиеттерин таблицага (54-бетти кара) түшүрөбүз. (Бардык жерде, $n\in \mathbf{Z}$ деп эсептелет.) Таблицада $f$ функциясынын касиеттерин төмөнкүдөй номерлөө кабыл алынган:

1.1 — аныкталуу областы;
1.2 — маанилеринин областы;
2.1 — жуптугу (тактыгы);
2.2 — эң кичине оң мезгил;
3.1 — $f$ графигинин $Ox$ огу менен кесилишүү чекиттеринин координаталары;
3.2 — $f$ тин графигинин $Oy$ огу менен кесилишүү чекитинин координаталары;
4.1 — $f$ оң маанилерди алган аралыктар;
4.2 — $f$ терс маанилерди алган аралыктар;
5.1 — өсүү аралыктары;
5.2 — кемүү аралыктары;

6.1 — минимум чекиттери;
6.2 — функциянын минимуму;
6.3 — максимум чекити;
6.4 — функциянын максимуму.

Тригонометриялык функциялардын касиеттери, көбүнчө, маселелерди чыгарууда колдонулат.

○ 1 - м и с а л. sin(−1), sin1, sin2, sin3, sin4 сандарын өсүү тартибинде жайгаштырабыз.

Келтирүүнүн формулаларын пайдаланып, бул сандарды аргументтин маанилери синустун өсүү аралыктарынын бири болгон $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесиндисине тиешелүү болгондой кылып жайгаштырабыз:

$$\sin 2=\sin(\pi-2),\ \sin 3=\sin(\pi-3),\ \sin 4=\sin(\pi-4).$$

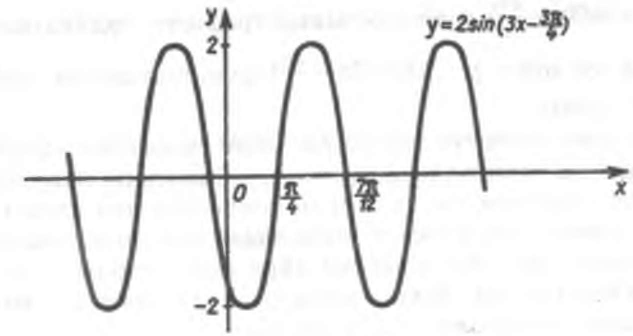
| | Функция | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f(x)=\sin x$ | $f(x)=\cos x$ | $f(x)=\mathrm{tg}x$ | $f(x)=\mathrm{ctg}x$ |
| 1.1 | R | R | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ | $(\pi n;\pi+\pi n)$ |
| 1.2 | [−1; 1] | [−1; 1] | R | R |
| 2.1 | Так | Жуп | Так | Так |
| 2.2 | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ | $\pi$ |
| 3.1 | $(\pi n;\ 0)$ | $(\frac{\pi}{2}+\pi n;0)$ | $(\pi n;0)$ | $(\frac{\pi}{2}+\pi n;0)$ |
| 3.2 | (0; 0) | (0; 1) | (0; 0) | Жок |
| 4.1 | $(2\pi n;\pi+2\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n)$ | $(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ | $(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ |
| 4.2 | $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$ | $(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n)$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n)$ |
| 5.1 | $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n]$ | $[-\pi+2\pi n;2\pi n]$ | $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ | Жок |
| 5.2 | $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n]$ | $[2\pi n;\pi+2\pi n]$ | Жок | $(\pi n;\pi+\pi n)$ |
| 6.1 | $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $\pi+2\pi n$ | Жок | Жок |
| 6.2 | −1 | −1 | Жок | Жок |
| 6.3 | $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $2\pi n$ | Жок | Жок |
| 6.4 | 1 | 1 | Жок | Жок |

$$-\frac{\pi}{2}<-1<\pi-4<\pi-3<1<\pi-2<\frac{\pi}{2}$$

экендиги көрүнүп турат. Ошондуктан

$$\sin(-1)<\sin(\pi-4)<\sin(\pi-3)<\sin 1<\sin(\pi-2).$$



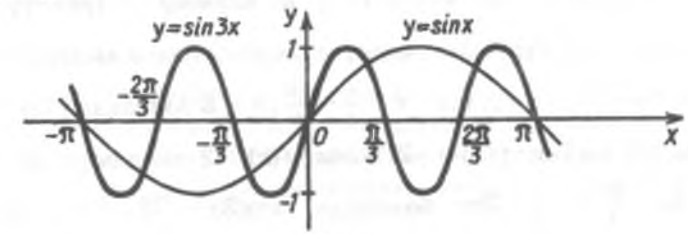



58-сүрөт

Мына ушинтип $\sin(-1)<\sin 4<\sin 3<\sin 1<\sin 2$. ●

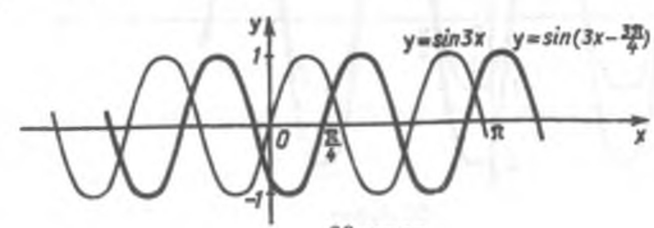
$f(x)=2\sin(3x-\frac{3\pi}{4})$ функциясын карайбыз (58-сүрөт). Бул функция төмөнкү удаалаш өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен алынат:

а) $y=\sin x$ функциясынын графигин абсциссалар огу боюнча үч эсе кысуу аркылуу $y=\sin 3x$ функциясынын графиги алынат (59-сүрөт);




59-сүрөт

б) $y=\sin 3x$ функциясынын графигин $(\frac{\pi}{4};0)$ векторуна көчүрүү аркылуу $y=\sin 3(x-\frac{\pi}{4})$ функциясынын, б.а. $y=\sin(3x-\frac{3\pi}{4})$ тин графигин алабыз 60-сүрөт.




60-сүрөт

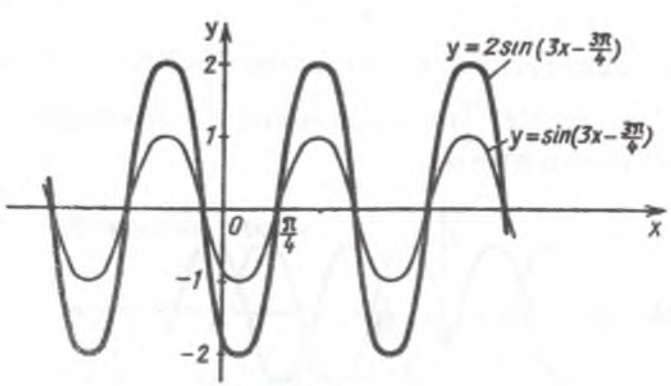
в) $y=\sin(3x-\frac{3\pi}{4})$ функциясынын графигин ординаталар огу боюнча эки эсе чоюп, $y=2\sin(3x-\frac{3\pi}{4})$ функциясынын графигин алабыз (61-сүрөт).

3-пункттагы өзгөртүп түзүүлөрдө ийри сызыктын «формасы» сакталат (окшош өзгөртүүлөрдөгү жана кыймылдагы сыяктуу эле). Ошондуктан синустун эле графигин синусоида деп аташпастан, аны октор боюнча кысуу (чоюу) жана андан кийинки кыймыл же окшош өзгөртүү аркылуу алынган ийри сызыктарды да аташат. Ушул эле айтылгандар, башка ийри сызыктар үчүн да, мисалы, парабола жана гипербола үчүн да сакталат.

$f(x)=A\sin(kx+b)$ жана $f(x)=A\cos(kx+b)$ түрүндөгү функциялардын касиеттеринин синустун (косинустун) касиеттерине окшоштугу жөнүндөгү жагдай, мындай функциялардын изилдөөсүн салыштырмалуу тез жүргүзүүгө мүмкүнчүлүк берет: негизгиси — алардын мезгилин жана маанилери 0 менен $\pm A$ га барабар болгон чекиттерди табуу.

○ 2-мисал. $f(x)=2\sin(3x-\frac{3\pi}{4})$ функциясын изилдейбиз жана анын графигин түзөбүз.

$f$ функциясынын мезгили $\frac{2\pi}{3}$ кө барабар (4-пунктту кара). Синус $\pi n, n\in Z$ түрүндөгү чекиттерде гана нөлгө айланат, ошондуктан $3x-\frac{3\pi}{4}=\pi n$, б.а. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$ болгондо $f(x)=0$ болот. Андан кийин $f(x)=-2$ жана $f(x)=2$ теңдемелерин чыгарып, $3x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ болгондо $\sin(3x-\frac{3\pi}{4})=-1$ экендигин




61-сүрөт



алабыз, мындан $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$; $3x-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ болгондо $\sin(3x-\frac{3\pi}{4})=1$ болот, мындан $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$. Алынган чекиттерди абсциссалар огунда белгилейбиз. Узундугу мезгилине барабар болгон кесиндини кароо жетиштүү. Биздин учурда, сол учу функциянын минумум чекити болгон $[\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{12}]$ кесиндисин алуу ыңгайлуу (62-сүрөт). Андан кийин, $[\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}]$ кесиндисинде −2ден 2ге чейин өсүүчү, $[\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4}]$ кесиндисинде 2ден −2ге чейин кемүүчү $f$ функциясынын графигин чиебиз. Мында график, абсциссалар огун $(\frac{\pi}{4};0)$ жана $(\frac{7\pi}{12};0)$ чекиттеринде кесүүгө тийиш. $f$ функциясынын графигинин эскизи 62-сүрөттөгү графикти абсциссалар огу боюнча $\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$ аралыктарына жылдыруу аркылуу алынат (58-сүрөт). ●

**2. Гармониялык термелүүлөр.**

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (1)$$

же

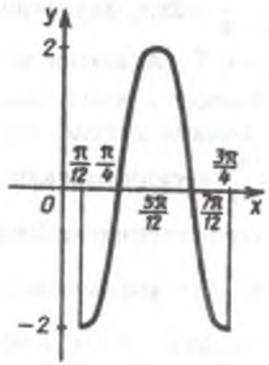
$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (2)$$

закону боюнча өзгөрүүчү чоңдуктар физикада маанилүү роль ойношот. Мисалы, пружинага илинген шариктин координатасы ушул закон боюнча өзгөрөт (149-сүрөт). Шарик *гармониялык термелүү* жасайт деп айтышат. (2) функцияны дагы (1) түрүндө жазууга болот:

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}).$$

(1) термелүүнү толук аныктоочу A, $\omega$ жана $\varphi$ параметрлеринин атайын аттары бар: $A$ ны *термелүүнүн амплитудасы*, $\omega$ ны *термелүүнүн циклдик (же тегеректик) жыштыгы*, $\varphi$ ни *термелүүнүн баштапкы фазасы* (адатта, $\varphi\in[0;2\pi)$ деп алынат) деп аташат. $A\sin(\omega t+\varphi)$ жана $A\cos(\omega t+\varphi)$ функцияларынын $\frac{2\pi}{\omega}$ га барабар болгон мезгилин, *гармониялык термелүүнүн мезгили* деп аташат.

(1) жана (2) функцияларынын касиеттерин механиканын төмөнкү мисалында көрсөтүү ыңгайлуу. $M$ чекити радиусу $R=A$




62-сүрөт

болгон айлана боюнча, $\omega$ бурчтук ылдамдыгы ($\omega > 0$ болгондо айлануу саат жебесине каршы, ал эми $\omega < 0$ болгондо, саат жебесинин багыты боюнча болот) менен кыймылдасын дейли, мында убакыттын $t = 0$ баштапкы моментинде $\vec{OM}$ вектору абсциссалар огунун оң багыты менен $\varphi$ бурчун түзөт (63-сүрөт). Чекиттин абсциссалар жана ординаталар окторуна болгон проекцияларынын координаталары болушкан $x(t)$ жана $y(t)$ функцияларын карайбыз.

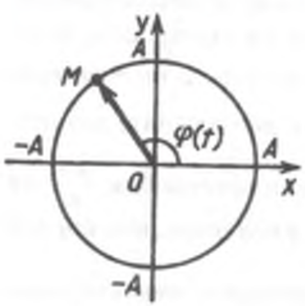
Убакыттын $t$ моментинде $\vec{OM}$ вектору огунун $Ox$ оң багыты менен $\varphi(t)$ бурчун түзөт, мында айлана боюнча болгон бир калыптагы кыймылдын закону боюнча $\varphi(t) = \varphi + \omega t$. Синустун жана косинустун аныктамасы боюнча

$$x(t) = A\cos\varphi(t), \text{ б.а. } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$y(t) = A\sin\varphi(t), \text{ б.а. } y(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Кинематикалык ой жүгүртүүлөргө таянып, бул функциялардын касиеттерин окуп үйрөнөбүз. Алардын мезгили, чекит бир толук жүрүш жасоого кеткен $T$ убактысына барабар болору түшүнүктүү. Айлананын узундугу $2\pi A$, ал эми чекиттин $v$ сызыктуу ылдамдыгы $\omega A$ га барабар, ошондуктан $T = \frac{2\pi A}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$.

$M$ чекити оң жактагы эң четки абалда болгон учурдагы убакыттын $t_0$ моментин карайбыз. Анда $x(t_0) = A$, $y(t_0) = 0$. Убакыттын




63-сүрөт

ушул моментинен баштап, $x(t)$ функциясы мезгилдин биринчи жарымында $A$ дан $-A$ га чейин кемийт жана мезгилдин экинчи жарымында $-A$ дан $A$ га чейин өсөт. Мында, чекит эң четки оң абалда болгон учурдагы убакыттын моменттери, $x(t)$ функциясынын максимум чекиттери болушат; чекиттин эң четки сол жактагы абалына минимум чекиттери жооп беришет, ал эми чекиттин жогорку жана төмөнкү абалдары бул функциянын нөлүнө туура келишет.





$A = 1$, $\omega = 1$ жана $\varphi = 0$ болгондо $x(t)$ жана $y(t)$ функциялары $\cos t$ жана $\sin t$ га барабар болорун эскертебиз. Чекиттин айлана боюнча кыймылын кароо менен, бул функциялардын силерге белгилүү касиеттерин алууга мүмкүн экендигин өз алдыңарча текшергиле.

### *Көнүгүүлөр*

**100.** Тригонометриялык функциялардын касиеттерин пайдаланып, төмөнкү туюнтмаларды мааниси туюнтманын маанисине барабар болгон эң кичине оң аргументтүү ошол эле тригонометриялык функция менен алмаштыргыла:

а) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5}$, $\sin\frac{28\pi}{3}$;  б) $\cos(-\frac{15\pi}{8})$, $\operatorname{ctg}(-\frac{8\pi}{5})$;

в) $\sin(-\frac{14\pi}{5})$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8}$;  г) $\cos\frac{20\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{35\pi}{9}$.

**101.** Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын жана маанилеринин областын тапкыла:

а) $f(x) = 3\cos 2x - 1$;  б) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg} 3x$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;  г) $f(x) = 1 + 0,5\sin\frac{x}{2}$.

**102.** Функциянын белгиси турактуу аралыктарын жана нөлдөрүн тапкыла:

а) $f(x) = -\sin 3x$;  б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$;

в) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$;  г) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$.

**103.** Функциянын өсүү, кемүү аралыктарын, максимум жана минимум чекиттерин тапкыла:

а) $f(x) = 4\cos 3x$;  б) $f(x) = 0,5\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

в) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;  г) $f(x) = 0,2\sin 4x$.

104—105 функцияларын изилдегиле жана графиктерин түзгүлө.

**104.** а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$;  в) $f(x) = -2\sin 2x$;

б) $f(x) = -1,5\cos 3x$;  г) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$.

**105.** а) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$;  б) $f(x) = -3\cos\frac{3x}{2}$;

в) $f(x) = -2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$;  г) $f(x) = 2,5\sin\frac{4x}{3}$.

**106.** Кыймылдагы нерсенин координатасы (сантиметр менен ченелет) көрсөтүлгөн закон боюнча өзгөрөт. Термелүүнүн амплитудасын, мезгилин, жыштыгын тапкыла.Эгерде:

а) $x(t) = 3{,}5\cos 4\pi t$, $t_1 = \frac{1}{12}\,c$;

б) $x(t) = 5\cos(3\pi t + \frac{\pi}{6})$, $t_1 = 4{,}5\,c$;

в) $x(t) = 1{,}5\cos 6\pi t$, $t_1 = 1\frac{1}{3}\,c$;

г) $x(t) = 0{,}5\cos(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{3})$, $t_1 = 8\,c$

болсо, нерсенин координатасын $t_1$ убакыт моментинде эсептегиле.

**107.** Эгерде токтун күчү (токтун күчү — ампер, убакыт — секунда менен өлчөнөт) төмөнкү закон менен өзгөрсө:

а) $I(t) = 0{,}25\sin 50\,\pi t$; б) $I(t) = 5\sin 20\,\pi t$;

в) $I(t) = 0{,}5\sin 10\,\pi t$; г) $I(t) = 3\sin 30\,\pi t$

болсо, токтун күчүнүн амплитудасын, мезгилин жана жыштыгын тапкыла.

**108.** Эгерде чыңалуу (чыңалуу вольт, убакыт секунда менен өлчөнөт) төмөнкү закон менен өзгөрсө:

а) $U(t) = 220\cos 60\,\pi t$; б) $U(t) = 110\cos 30\,\pi t$;

в) $U(t) = 360\cos 20\,\pi t$; г) $U(t) = 180\cos 45\,\pi t$ болсо,

чыңалуунун амплитудасын, мезгилин жана жыштыгын тапкыла.

**109.** Төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:

а) cos 4, cos 7, cos 9, cos(−12,5);

б) tg(− 8), tg 1,3, tg 4, tg 16;

в) sin 6,7, sin 10,5, sin (−7), sin 20,5;

г) ctg 3,5, ctg(−9), ctg 5, ctg 15.

**110.** Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = \frac{1}{1 - \sin x}$; б) $y = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}}$;

в) $y = \frac{1}{\cos x - 1}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x}$.

**111.** Функциянын маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$; б) $y = \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

в) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$; г) $y = \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.





112–113-функцияларды изилдегиле жана графиктерин түзгүлө.

**112.** а) $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3} - x)$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$; г) $f(x) = 1{,}5\cos(\frac{\pi}{6} - x)$.

**113.** а) $f(x) = \sin(2x - \frac{2\pi}{3})$; б) $f(x) = \operatorname{ctg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$;

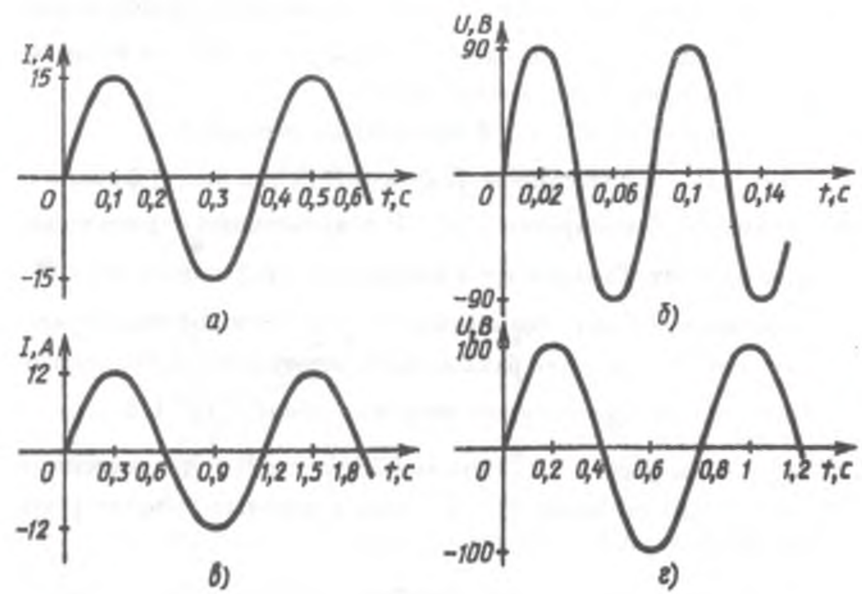
в) $f(x) = 4\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3})$; г) $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{4} - 3x)$.

**114.** 64-сүрөттөгү график боюнча ток күчүнүн (же чыңалуунун) амплитудасын, термелүүнүн мезгилин тапкыла. Ток күчүнүн же (чыңалуунун) убакытка көз карандылык законун жазгыла.

**115.** $x(t) = 5\cos(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3})$ закону боюнча гармониялык термелүү жасаган чекиттин жылышы, кыймыл башталгандан эсептегенде, $t(t > 0)$ убактысынын кайсы эң жакынкы моментинде:

а) максималдуу; в) 2,5ке барабар;

б) 0гө барабар; г) −5ке барабар болот?




64-сүрөт

## § 3. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

### 8. Арксинус, арккосинус жана арктангенс

**1. Тамыр жөнүндөгү теорема.** Теңдемелерди чыгарууда ыңгайлуу болгон өтө маанилүү бир ырастоодон баштайбыз.

Т е о р е м а *(тамыр жөнүндө).* ***$f$ функциясы $I$ аралыгында өсүүчү (же кемүүчү), ал эми $a$ саны – $f$ функциясынын бул аралыкта ала турган маанилеринин каалаганы болсун. Анда $f(x)=a$ теңдемеси $I$ аралыганда жалгыз тамырга ээ болот.***

Д а л и л д ө ө. $f$ өсүүчү функциясын карайбыз (кемүүчү функция учурунда ой жүгүртүү ушуга эле окшош). Теореманын шарты боюнча $I$ аралыгынан $f(b)=a$ боло турган $b$ саны табылат. $b$ саны $f(x)=a$ теңдемесинин жалгыз тамыры экендигин көрсөтөбүз. $I$ аралыгында $f(c)=a$ боло турган дагы бир $c\neq b$ саны бар деп божомолдойлу. Анда же $c<b$, же $c>b$ болот. Бирок $f$ функциясы $I$ аралыгында өсөт, ошондуктан $f(c)<f(b)$, же $f(c)>f(b)$ болот. Бул $f(c)=f(b)=a$ барабардыгына карама-каршы келет. Демек, алынган божомолдоо туура эмес жана $I$ аралыгында $f(x)=a$ теңдемесинин $b$ санынан башка тамыры жок.

○ 1 - м и с а л. $x^3+x=2$ теңдемесин чыгарабыз.

$f(x)=x^3+x$ функциясы $R$ де өсөт (бул эки өсүүчү функциянын суммасы). Ошондуктан $f(x)=2$ теңдемесинин бирден ашык тамыры болбойт. Тамыры $x=1$ экендигин көрүү кыйын эмес. ●

**2. Арксинус.** Синус функциясы $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесиндисинде өсөрүн жана $-1$ден $+1$ге чейинки бардык маанилерди аларын билесиңер. Натыйжада, тамыр жөнүндөгү теорема боюнча, $|a|\leq 1$ болгон ар кандай $a$ саны үчүн $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ аралыгында $\sin x=a$ теңдемесинин бир гана $b$ тамыры болот. Бул $b$ санын $a$ санынын арксинусу деп аташат жана $\arcsin a$ аркылуу белгилешет (65-сүрөт).

А н ы к т а м а. **$a$ санынын *арксинусу* деп $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ кесиндисинен алынган, синусу $a$ га барабар санды айтабыз.**



○ 2 - м и с а л. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ ни табабыз.

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ жана $\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ болгондуктан, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

3 - м и с а л. $\arcsin(-\frac{1}{2})$ ди табабыз.

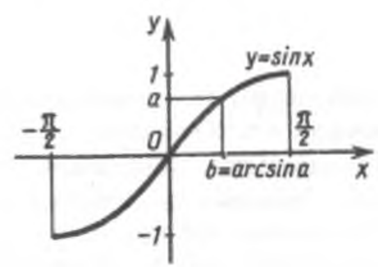
Синусу $-\frac{1}{2}$ болгон бурч ($[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ аралыгындагы), $-\frac{\pi}{6}$ га барабар. Ошондуктан $\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$. ●

**3. Арккосинус.** Косинус функциясы $[0;\pi]$ кесиндисинде кемийт жана $-1$ден $+1$ге чейинки бардык маанилерди алат. Ошондуктан $|a|\leq 1$ болгон каалагандай $a$ саны үчүн $[0;\pi]$ кесиндисинде $\cos x=a$ теңдемесинин бир гана $b$ тамыры болот. Бул $b$ санын $a$ санынын арккосинусу деп аташат жана $\arccos a$ аркылуу белгилешет (66-сүрөт).

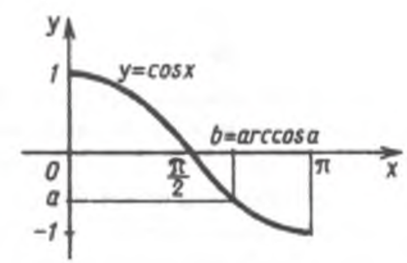
А н ы к т а м а. **$a$ санынын *арккосинусу* деп $[0;\pi]$ кесиндисинен алынган жана косинусу $a$ га барабар болгон санды айтабыз.**

○ 4 - м и с а л. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, анткени $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ жана $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$.

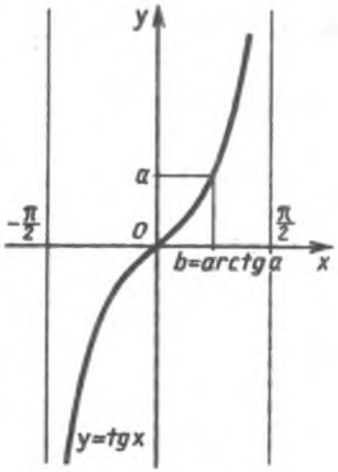
5 - м и с а л. $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}$, анткени $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ жана $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$. ●



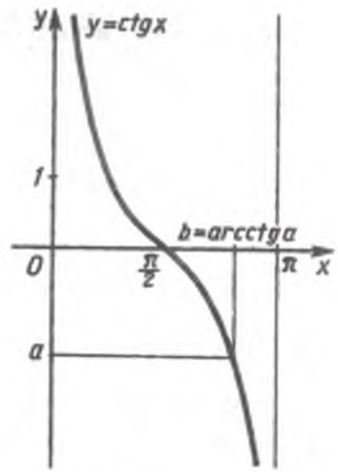

65-сүрөт




66-сүрөт




67-сүрөт




68-сүрөт

**4. Арктангенс.** Тангенс функциясы $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ интервалында өсөт жана $R$ деги бардык маанилерди алат. Ошондуктан, ар кандай $a$ саны үчүн $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ интервалында $\operatorname{tg}(x)=a$ теңдемесинин бир гана $b$ тамыры болот. Бул $b$ санын $a$ санынын арктангенси деп аташат жана arctg $a$ аркылуу белгилешет (67-сүрөт).

А н ы к т а м а. **$a$ санынын *арктангенси* деп $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ интервалынан алынган жана тангенси $a$ га барабар болгон санды айтабыз.**

○ 6 - м и с а л. $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, анткени $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ жана $\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

7 - м и с а л. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, анткени $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$ жана $-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. ●

**5. Арккотангенс.** Котангенс функциясы $(0;\pi)$ интервалында кемийт жана $R$ деги бардык маанилерди алат. Ошондуктан, ар кандай $a$ саны үчүн $(0;\pi)$ интервалында $\operatorname{ctg}x=a$ теңдемесинин бир гана $b$ тамыры болот. Бул $b$ санын $a$ санынын арккотангенси деп аташат жана arcctg $a$ аркылуу белгилешет (68-сүрөт).

А н ы к т а м а. **$a$ санынын *арккотангенси* деп $(0;\pi)$ интервалынан алынган жана котангенси $a$ га барабар болгон санды айтабыз.**





○ 8 - м и с а л. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$, анткени $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ жана $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$.

9 - м и с а л. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$, анткени $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$ ж а н а $\frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)$. ●

### *Көнүгүүлөр*

116—117 деги ар бир теңдеменин көрсөтүлгөн аралыкта канчадан тамыры бар?

**116.** а) $x^7=3$, $x\in(-\infty;\infty)$; б) $\frac{3}{x-1}=-5$, $x\in(-\infty;1)$;

в) $x^6=4$, $x\in(-\infty;0]$; г) $\frac{5}{x+2}=2$, $x\in(-2;\infty)$.

**117.** а) $(x-3)^3=-4$, $x\in(-\infty;\infty)$; б) $2\sin x=1{,}5$, $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

в) $(x+2)^4=5$, $x\in[-2;\infty)$; г) $0{,}5\cos x=-\frac{1}{4}$, $x\in[0;\pi]$.

Бирдик айланада $P_t$ чекитин, ага туура келген $t$ нын мааниси берилген барабардыкты канааттандыргандай кылып белгилегиле. $t$нын көрсөтүлгөн аралыкта жаткан маанисин тапкыла (118–120).

**118.** а) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; б) $\sin t=-\frac{1}{2}$, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

в) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; г) $\sin t=1$, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

**119.** а) $\cos t=-\frac{1}{2}$, $[0;\pi]$; б) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0;\pi]$;

в) $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\pi]$; г) $\cos t=0$, $[0;\pi]$.

**120.** а) $\operatorname{tg}t=-1$, $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$; б) $\operatorname{ctg}t=\sqrt{3}$, $(0;\pi)$;

в) $\operatorname{tg}t=\sqrt{3}$, $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$; г) $\operatorname{ctg}t=-1$, $(0;\pi)$.

121—123 көнүгүүлөрдү эсептегиле.

**121.** а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**122.** а) $\arccos(-\frac{1}{2})$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; г) $\arccos 1$.

**123.** а) $\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}})$; б) $\mathrm{arctg}(-1)$;

в) $\mathrm{arctg}\, 0$; г) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

124—125 теги туюнтмалар мааниге ээ болушабы?

**124.** а) $\arcsin(-\frac{2}{3})$; б) $\arccos\sqrt{5}$;

в) $\arcsin 1{,}5$; г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

**125.** а) $\arccos\pi$; б) $\arcsin(3-\sqrt{20})$;

в) $\arccos(-\sqrt{3})$; г) $\arcsin\frac{2}{7}$.

126—128 деги туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

**126.** а) $\arcsin 0 + \arccos 0$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin(-1) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**127.** а) $\arccos(-0{,}5) + \arcsin(-0{,}5)$;

б) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**128.** а) $\mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}\,3$; б) $\mathrm{arctg}\,1 - \mathrm{arctg}(-1)$;

в) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \mathrm{arctg}\,0$; г) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$.



**129.** Төмөнкү сандарды салыштыргыла:

а) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ жана $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos(-\frac{1}{2})$ жана $\mathrm{arctg}(-1)$;

в) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$ жана $\arcsin 1$; г) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ жана $\arcsin\frac{1}{2}$.

**130.** Калькулятордун же таблицанын жардамы менен төмөнкү туюнтмалардын маанисин тапкыла:
а) $\arcsin 0{,}3010$; $\mathrm{arctg}\,2{,}3$; б) $\arccos 0{,}6081$; $\mathrm{arctg}\,0{,}3541$;
в) $\arcsin 0{,}7801$; $\arccos 0{,}8771$; г) $\mathrm{arctg}\,10$; $\arcsin 0{,}4303$.

**131.** Төмөнкүлөрдү эсептегиле:

а) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \mathrm{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3})$;

в) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2}3 + \mathrm{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

**132.** $[-1;\ 1]$ кесиндисиндеги ар кандай $x_1$ жана $x_2$ сандары үчүн $x_1 < x_2$ барабарсыздыгынан:
а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$ барабарсыздыктары келип чыгарын далилдегиле.

**133.** Ар кандай $x_1$ жана $x_2$ сандары үчүн $x_1 < x_2$ барабарсыздыгынан:
а) $\mathrm{arctg}\, x_1 < \mathrm{arctg}\, x_2$; б) $\mathrm{arcctg}\, x_1 > \mathrm{arcctg}\, x_2$
барабарсыздыктарынын келип чыгарын далилдегиле.

134—135 деги сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла.

**134.** а) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-0{,}3)$, $\arcsin 0{,}9$;

б) $\arcsin(-0{,}5)$, $\arcsin(-0{,}7)$, $\arcsin\frac{\pi}{8}$;

в) $\arccos 0{,}4$, $\arccos(-0{,}2)$, $\arccos(-0{,}8)$;

г) $\arccos 0{,}9$, $\arccos(-0{,}6)$, $\arccos\frac{\pi}{5}$.

**135.** а) $\mathrm{arctg}\,100$, $\mathrm{arctg}(-5)$, $\mathrm{arctg}\,0{,}7$;
б) $\mathrm{arcctg}\,1{,}2$, $\mathrm{arcctg}\,\pi$, $\mathrm{arcctg}(-5)$;
в) $\mathrm{arctg}(-95)$, $\mathrm{arctg}\,3{,}4$, $\mathrm{arctg}\,17$;
г) $\mathrm{arcctg}(-7)$, $\mathrm{arcctg}(-2{,}5)$, $\mathrm{arcctg}\,1{,}4$.

## 9. Жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерди чыгаруу

**1. $\cos t = a$ теңдемеси.** Эгерде $|a| > 1$ болсо, анда бул теңдеме

$$\cos t = a \qquad (1)$$

чыгарылышка ээ болбой тургандыгы айкын, анткени ар кандай $t$ үчүн $|\cos t| \le 1$.

$|a| \le 1$ болсун, $\cos t = a$ боло турган $t$ сандарынын бардыгын табуу керек. $[0;\ \pi]$ кесиндисинде (1) теңдемесинин бир гана чыгарылышы болот — ал $\arccos a$ саны.

Косинус — жуп функция, демек, $[-\pi;\ 0]$ кесиндисинде (1) теңдемеси дагы эле жалгыз чыгарылышка ээ болот, ал $\arccos a$ саны. Мына ушинтип $\cos t = a$ теңдемеси, узундугу $2\pi$ болгон $[-\pi;\ \pi]$ кесиндисинде эки чыгарылышка ээ болот: $t = \pm\arccos a$ ($a$=1 болгондо алар дал келишет).

cos функциясынын мезгилдүүлүгүнүн натыйжасында калган бардык чыгарылыштары булардан $2\pi n$ ге ($n \in Z$) айырмаланышат, б.а. (1) теңдемесинин тамырларынын формуласы төмөнкүдөй болот:

$$t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

(Бул формуланы $|a| \le 1$ болгондо гана пайдаланууга мүмкүн экендигине көңүл бургула.)

(1) теңдеменин чыгарылышын бирдик айланада көрсөтүүгө болот.

Аныктама боюнча $\cos t$ — бул бирдик айлананын $P_t$ чекитинин абсциссасы. Эгерде $|a| < 1$ болсо, анда мындай чекиттер экөө (69-*а*, сүрөт); эгерде $a = 1$ же $a = -1$ болсо, анда мындай чекит бирөө (69-*б*, сүрөт).

$a = 1$ болгондо $\arccos a$ жана $-\arccos a$ сандары дал келишет (алар нөлгө барабар болушат), ошондуктан

$$\cos t = 1$$

теңдемесинин чыгарылышын

$$t = 2\pi n,\ n \in Z$$

түрүндө жазуу кабыл алынган.

$a = -1$ жана $a = 0$ болгондо (1) теңдемесинин чыгарылыштарын өзгөчө формада жазуу да кабыл алынган:

$t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ болгондо, $\cos t = -1$;

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ болгондо, $\cos t = 0$.



○ 1-мисал. $\cos x = \frac{1}{2}$ теңдемесин чыгарабыз. (2) формула боюнча

$$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ болгондуктан төмөнкүдөй жоопту алабыз:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2-мисал. $\cos x = -0{,}2756$ теңдемесин чыгарабыз. (2) формуласы боюнча

$$x = \pm\arccos(-0{,}2756) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$\arccos(-0{,}2756)$ маанисин калькулятордун жардамы менен табабыз; ал болжол менен 1,8500гө барабар. Ошентип,

$x = \pm x_0 + 2\pi n,\ n \in Z$, мында $x_0 \approx 1{,}8500$.

3-мисал. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдемесин чыгарабыз.

(2) формуласы боюнча

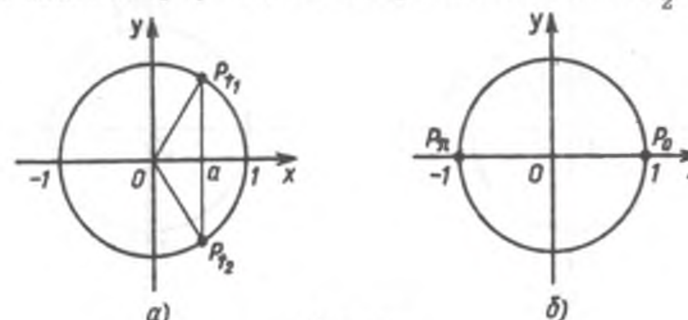
$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$, б.а.

$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, мындан $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z$. ●

**2. $\sin t = a$ теңдемеси.**

$$\sin t = a \qquad (3)$$

теңдемеси $|a| > 1$ болгондо чыгарылышка ээ эмес, анткени ар кандай $t$ үчүн $|\sin t| \le 1$. $|a| \le 1$ болгондо (3) теңдемеси $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ кесиндисинде жалгыз бир $t_1 = \arcsin a$ чыгарылышка ээ болот. $[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$ ке-




69-сүрөт

синдисинде sin функциясы кемийт жана $-1$ден $+1$ге чейинки бардык маанилерди алат. Тамыр жөнүндөгү теорема боюнча (3) теңдеме бул кесиндиде жалгыз тамырга ээ болот. Ал тамыр $\pi - \arcsin a$ га барабар болгон $t_2$ саны экендигин 70-*а*, сүрөттөн көрөбүз. Чындыгында, $\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$. Мындан тышкары,- $-\frac{\pi}{2} \le t_1 \le \frac{\pi}{2}$ болгондуктан $-\frac{\pi}{2} \le -t_1 \le \frac{\pi}{2}$ жана $\pi - \frac{\pi}{2} \le \pi - t_1 \le \pi + \frac{\pi}{2}$ болот, б. а. $t_2$ саны $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ кесиндисине таандык.

Мына ушинтип (3) теңдеме $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ кесиндисинде эки чыгарылышка ээ: $t_1 = \arcsin a$ жана $t_2 = \pi - \arcsin a (a = 1$ болгондо булар дал келишет). Синустун мезгили $2\pi$ ге барабар экенин эске алып теңдеменин бардык чыгарылыштарын жазуу үчүн мындай формулаларды алабыз:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \tag{4}$$

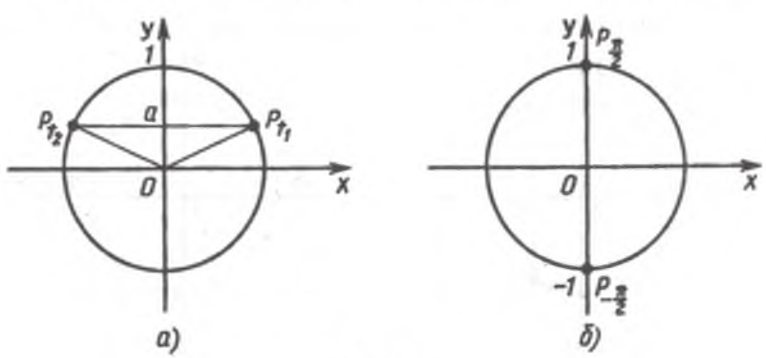
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \ n \in Z. \tag{5}$$

(3) теңдемесинин чыгарылыштарын эки формула менен эмес, бир формула менен жазуу ыңгайлуу:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z. \tag{6}$$

$k = 2n$ жуп болгондо (6) формуладан (4) формула менен жазылган бардык чыгарылыштарды, ал эми $k = 2n + 1$ — жуп эмес болгондо, (5) формуласы менен жазылган бардык чыгарылыштарды табууга мүмкүн экендигине ишенүү жеңил эле.

(3) теңдемесинин чыгарылыштарын бирдик айланада көрсөтүү ыңгайлуу (70-сүрөт). Аныктама боюнча $\sin t$ — бул бирдик айла-




70-сүрөт



нанын $P_t$ чекитинин ординатасы. Эгерде $|a| < 1$ болсо, анда мындай чекиттер экөө (70-*а*, сүрөт); $a = \pm 1$ болгондо, андай чекит бирөө (70-*б*, сүрөт).

Эгерде $a = 1$ болсо, анда $\arcsin a$ жана $\pi - \arcsin a$ сандары дал келишет (алар $\frac{\pi}{2}$ ге барабар), ошондуктан $\sin t = 1$ теңдемесинин чыгарылышын

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$$

түрүндө жазуу кабыл алынган.

$a = -1$ жана $a = 0$ болгондо, чыгарылыштардын төмөнкүдөй жазылышы кабыл алынган:

Эгерде $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$ болсо, $\sin t = -1$.

Эгерде $t = \pi n, \ n \in Z$ болсо, $\sin t = 0$.

○ 4 - м и с а л. Төмөнкү теңдемени чыгарабыз:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) формуласы боюнча

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \ k \in Z, \text{б.а.}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z.$$

5 - м и с а л. $\sin x = 0{,}3714$ теңдемесин чыгарабыз. (6) формула боюнча

$$x = (-1)^n \arcsin 0{,}3714 + \pi n, \ n \in Z.$$

Калькулятордун жардамы менен $\arcsin 0{,}3714 \approx 0{,}3805$ экендигин табабыз.

6 - м и с а л. $\sin(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдемесин чыгарабыз. Синус функциясы так функция. Ошондуктан $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (6) формула боюнча

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \pi k, \ k \in Z.$$

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ болгондуктан $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k(-\frac{\pi}{4}) + \pi k$,

$$x = \frac{\pi}{5} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z. \ ●$$

**3. $\mathrm{tg}\, t = a$ теңдемеси.** $a$ каалагандай болгондо $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ интервалында $\mathrm{tg} t = a$ боло турган бир гана $t$ саны болот, ал сан $\mathrm{arctg}\, a$.

Ошондуктан

$$\mathrm{tg}\, t = a \qquad (7)$$

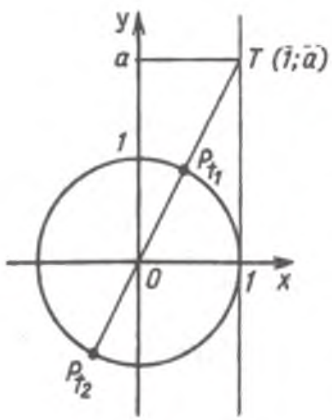
теңдемеси узундугу $\pi$ болгон $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ интервалында бир гана тамырга ээ болот. Тангенс мезгили $\pi$ болгон мезгилдүү функция болгондуктан, (7) теңдемесинин калган тамырлары табылган тамырдан $\pi n$, $(n \in Z)$ ге гана айырмаланат, б.а.

$$t = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \ n \in Z. \qquad (8)$$

$\mathrm{tg}\, t = a$ теңдемесинин чыгарылышын тангенстин сызыгын кароо менен сүрөттөп көрсөтүүгө болот (71-сүрөт). $\mathrm{tg}\, t$ – бул $OP_{t_1}$ түз сызыгы менен тангенстердин сызыгынын кесилишүү чекити болгон $T_1$ чекитинин ординатасы экендигин эске салабыз (1-пунктту кара). Каалагандай $a$ саны үчүн, тангенстер сызыгында ординатасы $a$ болгон бир гана чекит болот ($T(1; a)$ чекити). $OT$ түз сызыгы бирдик айлана менен эки чекитте кесилишет; бул учурда $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ интервалына оң жарым айлананын $t_1 = \mathrm{arctg} a$ болгон $P_{t_1}$ чекити туура келет.

○ 7 - м и с а л. $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ теңдемесин чыгарабыз.

(8) формуласы боюнча $x = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n$, $n \in Z$ чыгарылышын табабыз, ал эми $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ болгондуктан акыркы жообуна келебиз:



71-сүрөт

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z.$$

8 - м и с а л. $\mathrm{tg} x = 5{,}177$ теңдемесин чыгарабыз. (8) формуласынан

$$x = \mathrm{arctg}\, 5{,}177 + \pi n, \ n \in Z$$

келип чыгат. Калькулятордун жардамы менен $\mathrm{arctg}\, 5{,}177 \approx 1{,}3800$ экенин табабыз.

9 - м и с а л. $\mathrm{ctg} x = -\sqrt{3}$ теңдемесин чыгарабыз.

Бул теңдеме $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ теңдемесине тең күчтө, аны (8) формуласынын жардамы астында чыгарабыз:

$$x = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z. \ ●$$



### *Көнүгүүлөр*

136—143 төгү теңдемелерди чыгаргыла.

**136.** а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{1}{2}$;
в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = -1$.

**137.** а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$;
в) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; г) $2\cos x - 1 = 0$.

**138.** а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin x = -\frac{1}{2}$; г) $\sin x = -1$.

**139.** а) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$; б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$;
в) $2\sin x - 1 = 0$; г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$.

**140.** а) $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\mathrm{ctg}\, x = \sqrt{3}$;
в) $\mathrm{tg}\, x = 1$; г) $\mathrm{tg}\, x = 0$.

**141.** а) $\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$; б) $\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$;
в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; г) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x - 1 = 0$.

**142.** а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;
в) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; г) $\cos 4x = 0$.

**143.** а) $\sin x = -0{,}6$; б) $\mathrm{ctg}\, x = 2{,}5$;
в) $\cos x = 0{,}3$; г) $\mathrm{tg}\, x = -3{,}5$.

---

144—147 деги теңдемелерди чыгаргыла.

**144.** а) $\sin(-\frac{x}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$;  б) $\mathrm{tg}\,(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;  г) $\mathrm{ctg}\,(-\frac{x}{2})=1$.

**145.** а) $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}$;  б) $2\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3})=3$;  г) $\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})+1=0$.

**146.** а) $\cos(\frac{\pi}{6}-2x)=-1$;  б) $2\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})=\sqrt{3}$;

в) $\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=-1$;  г) $2\cos(\frac{\pi}{4}-3x)=\sqrt{2}$.

**147.** а) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;  б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$;

в) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4}$;  г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**148.** $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ жана $y=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ функцияларынын ар биринин графиги менен төмөндөгү:

а) $x=4{,}5\pi$; б) $y=-1$; в) $y=1$; г) $y=0$ түз сызыктарынын жалпы чекитинин координаталарын тапкыла.

**149.** $\cos(\frac{\pi}{3}-2x)=\frac{1}{2}$, $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$ теңдемелерин чыгаргыла жана алардын ар бири үчүн:

а) эң кичине оң тамырын;

б) $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ аралыгына тиешелүү тамырларды;

в) эң чоң терс тамырды;

г) $(-\pi;\ \frac{\pi}{2})$ аралыгына тиешелүү тамырды тапкыла.

**150.** $\mathrm{ctg}\,t=a$ теңдемесинин бардык чыгарылыштары $t=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$ формуласы боюнча табыларын далилдегиле.

## 10. Жөнөкөй тригонометриялык барабарсыздыктарды чыгаруу

Тригонометриялык функцияларды камтыган барабарсыздыктарды чыгаруу, эреже катары, $\sin t\le a$, $\cos t>a$, $\mathrm{tg}\,t\ge a$ ж. б. түрүндөгү жөнөкөй барабарсыздыктарды чыгарууга келтирилет.





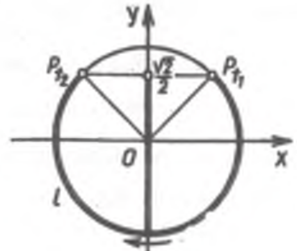
Аларды чыгаруунун жолдорун мисалдарда карап көрөбүз.

○ 1 - м и с а л. $\sin t\ge -\frac{1}{2}$ барабарсыздыгын чыгарабыз.

Берилген барабарсыздыкты канааттандырышкан $t$ нын маанилеринде, бирдик айлананын бардык $P_t$ чекиттери $-\frac{1}{2}$ ден чоң же барабар болгон ординаталарга ээ болот. Бардык мындай чекиттердин көптүгү — бул 72-сүрөттө баса белгиленген $l$ жаасы болот. $P_t$ чекитинин бул жаага тиешелүүлүк шартын табабыз. $P_{t_1}$ чекити оң жарым айланада жатат, ординатасы $-\frac{1}{2}$ ге барабар, демек, $t_1$ үчүн $t_1=\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$ маанисин алуу ыңгайлуу. $P_{t_1}$ чекитинен $P_{t_2}$ чекитине $l$ боюнча жүрүш, саат жебесине каршы багытта деп эсептейли. Анда $t_2>t_1$ жана $t_2=\pi-\arcsin(-\frac{1}{2})=\frac{7\pi}{6}$ болорун түшүнүү жеңил. Мына ушинтип, эгерде $-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{7\pi}{6}$ болсо, $P_t$ чекити $l$ жаасына тиешелүү болорун алабыз. Демек, барабарсыздыктын $2\pi$ узундуктагы $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ аралыгына тиешелүү болгон чыгарылыштары: $-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{7\pi}{6}$ болот. Синустун мезгилдүүлүгүнүн натыйжасында, калган чыгарылыштар табылган чыгарылыштарга $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ түрүндөгү сандарды кошуу аркылуу алынат. Анда $-\frac{\pi}{6}+2\pi n\le t\le\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ түрүндөгү жоопту алабыз.

2 - м и с а л. $\sin t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ барабарсыздыгын чыгарабыз. Бул барабарсыздык берилген барабарсыздыкты канааттандырышкан $t$ нын маанилеринде бирдик айлананын бардык $P_t$ чекиттери $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ден кичине болгон ординатага ээ болот дегенди билдирет. Бардык мындай чекиттердин көптүгү — 73-сүрөттө баса белгиленген $l$ жаасы болот. Ал жаанын учтары болушкан $P_{t_1}$ жана $P_{t_2}$ чекиттери каралып жаткан көптүккө тиешелүү эмес, анткени, алардын ординаталары $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ден кичине болбостон, ага барабар. $P_t$ чекитинин бул көптүккө тиешелүүлүк шартын табуу үчүн $t_1$ жана $t_2$ чекиттерин табабыз. $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ тү алабыз.


72-сүрөт




73-сүрөт

$P_{t_1}$ чекитинен $P_{t_2}$ чекитине $l$ жаасы боюнча жүрүү, саат жебесинин багыты боюнча болсун дейли; $t_2 < t_1$ жана $t_2 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\pi}{4}$. Барабарсыздыктын узундугу $2\pi$ болгон $[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ аралыктагы бардык чыгарылыштары: $-\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ болот. Синустун мезгилдүүлүгүн эске алсак, барабарсыздыктын бардык чыгарылыштарын

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

түрүндө алабыз.

3 - м и с а л. $\cos t < \frac{1}{2}$ барабарсыздыгын чыгарабыз.

Бирдик айлананын абсциссалары $\frac{1}{2}$ ден кичине болгон чекиттердин көптүгү $x = \frac{1}{2}$ түз сызыгынын сол жагында жатышат. Демек, мындай чекиттердин көптүгү 74-сүрөттө баса белгиленген $l$ жаасы болот (анын $P_{t_1}$ жана $P_{t_2}$ учтары бул көптүккө тиешелүү эмес). $t_1$ жана $t_2$ ни табабыз. $P_{t_1}$ чекити жогорку жарым айланада жайланышкан, $P_{t_1}$ дин абсциссасы $\frac{1}{2}$ ге барабар, демек, $t_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Чекит $P_{t_1}$ ден $P_{t_2}$ ге $l$ жаасы боюнча келгенде, саат жебесинин кыймылына каршы жүрүш жасалат, анда $t_2 > t_1$ жана $t_2 = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$. Чекит $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ болгон шартта баса белгиленген $l$ жаасына (анын учтарын кошпогондогу) тиешелүү болушат. Узундугу $2\pi$ болгон $[0;\ 2\pi]$ кесиндисине тиешелүү барабарсыздыктын чыгарылыштары: $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$. Косинус мезгилдүү болгондуктан, калган чыгарылыштары табылгандарга $2\pi n$, $n \in Z$



сандарын кошуу аркылуу алынат. Жыйынтыгында төмөнкү жоопко келебиз:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

4 - м и с а л. $\operatorname{tg} t \le 1$ барабарсыздыгын чыгарабыз.

Тангенстин мезгили $\pi$ ге барабар. Ошондуктан, адегенде берилген барабарсыздыктын $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ аралыгындагы бардык чыгарылыштарын табабыз, андан кийин, тангенстин мезгилдүүлүгүн пайдаланабыз. Берилген барабарсыздыкты канааттандырышкан $t$ нын маанилерине жооп беришкен оң жарым айлананын бардык $P_t$ чекиттерин бөлүп алуу үчүн, тангенстердин сызыгына кайрылабыз. Эгерде $t$ барабарсыздыктын чыгарылышы болсо, анда $T$ чекитинин $\operatorname{tg}t$ га барабар болгон ординатасы, 1ден кичине же барабар болот. Мындай чекиттердин көптүгү — $AT$ шооласы болот (75-сүрөт). Ушул шооланын чекиттерине туура келген $P_t$ чекиттеринин көптүгү, сүрөттө баса белгиленген $l$ жаасын берет ($P_{t_1}$ чекити каралып жаткан көптүккө тиешелүү, ал эми $P_{-\frac{\pi}{2}}$ ага тиешелүү эмес экендигине көңүл бургула). $P_t$ чекитинин $l$ жаасына тиешелүү болуу шартын табабыз. $t_1 \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ жана $\operatorname{tg} t_1 = 1$, демек, $t_1 = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$. Демек, $t$ мааниси $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{4}$ шартын канааттандырууга тийиш. Берилген барабарсыздыктын $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ аралыкка тиешелүү болгон бардык чыгарылыштары $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ болушат. Тангенстин мезгилдүүлүгүн эске алып төмөнкү жоопту алабыз:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \le \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

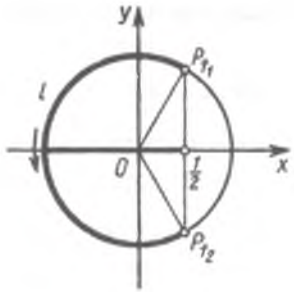
5 - м и с а л. $\cos 2x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$ барабарсыздыгын чыгарабыз. $2x$ ти $t$ менен белгилеп, $\cos t \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ни алабыз. 76-сүрөттө тиешелүү $l$ жаасы баса белгиленген. $t_1 = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{3\pi}{4}$ тү табабыз, мындан

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le t \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

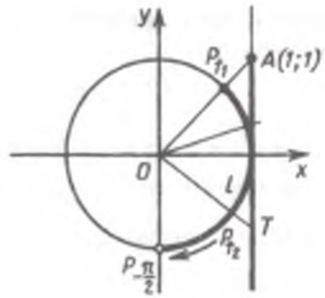
$x$ өзгөрмөсүнө өтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le 2x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi n \le x \le \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z.$$




74-сүрөт




75-сүрөт

6-мисал. $3\,\text{tg}\,(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})<\sqrt{3}$ барабарсыздыгын чыгарабыз. Берилген барабарсыздыкты өзгөртүп түзүп,

$$\text{tg}\,(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})<\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\text{tg}\,(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})<\frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{tg}\,(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})>-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

барабарсыздыгын алабыз. $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$ тү $t$ аркылуу белгилейбиз, анда $\text{tg}\,t>-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 77-сүрөттө, тиешелүү $l$ жаасы баса белгиленген. $t_1=\text{arctg}\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$ болгондуктан $-\frac{\pi}{6}+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n$ ди алабыз. $x$ өзгөрмөсүнө өтөбүз:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$ ●

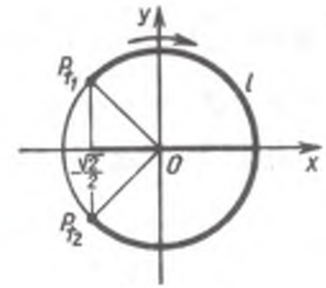
### *Көнүгүүлөр*

151—153-төрдө берилген барабарсыздыкты канааттандырышкан $t$ нын маанилерин канааттандырган $P_t$ чекиттерин бирдик айланада белгилегиле. $t$ нын барабарсыздыкты канааттандыруучу жана көрсөтүлгөн аралыкка тиешелүү болгон маанилеринин көптүгүн тапкыла.

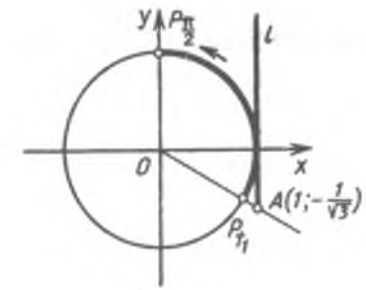
**151.** а) $\sin t>\frac{1}{2},\ t\in[0;\ \pi]$; б) $\sin t\le-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t\in[-\pi;\ 0]$;

в) $\sin t>\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\in[0;\ \pi]$; г) $\sin t<-\frac{1}{2},\ t\in[-\pi;\ 0]$.






76-сүрөт




77-сүрөт

**152.** а) $\cos t>\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\in[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; б) $\cos t<-\frac{1}{2},\ t\in[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$;

в) $\cos t>\frac{1}{2},\ t\in[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; г) $\cos t<-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t\in[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$.

**153.** а) $\text{tg}\,t>-\sqrt{3},\ t\in(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$; б) $\text{tg}\,t<\frac{1}{\sqrt{3}},\ t\in(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$;

в) $\text{tg}\,t>\frac{\sqrt{3}}{3},\ t\in(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$; г) $\text{tg}\,t<-1,\ t\in(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$.

154—157-барабарсыздыктарды чыгаргыла.

**154.** а) $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x\ge\frac{1}{2}$; г) $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**155.** а) $\cos x\ge-\frac{1}{2}$; б) $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**156.** а) $\text{tg}\,x\le\sqrt{3}$; б) $\text{tg}\,x>-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\text{tg}\,x\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\text{tg}\,x<-1$.

**157.** а) $2\cos x-1\ge0$; б) $2\sin x+\sqrt{2}\ge0$;

в) $2\cos x-\sqrt{3}\le0$; г) $3\,\text{tg}\,x+\sqrt{3}\ge0$.

---

158—163-барабарсыздыктарды чыгаргыла.

**158.** а) $\sin 2x<\frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\frac{x}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\text{tg}\,5x>1$.

**159.** а) $2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \le 1$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,(3x+\frac{\pi}{6}) < 1$;

в) $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) \ge 1$; г) $2\cos(4x-\frac{\pi}{6}) > \sqrt{3}$.

**160.** а) $\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}$; б) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $4\sin 2x\cos 2x \ge \sqrt{2}$; г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos x-\sin x\sin\frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**161.** а) $\mathrm{ctg}\,x \ge \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,(\frac{\pi}{4}-2x) > 1$;

в) $\mathrm{ctg}\,3x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3\,\mathrm{ctg}\,(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}) > -\sqrt{3}$.

**162.** а) $3\sin\frac{x}{4} \ge 2$; б) $4\cos\frac{x}{3} < -3$;

в) $5\mathrm{tg}\,2x \le 3$; г) $0{,}5\sin 4x < -0{,}2$.

**163.** Төмөнкү барабарсыздыктардын көрсөтүлгөн аралыкка тиешелүү болгон чыгарылыштарын тапкыла:

а) $\sin x \ge -\frac{1}{2}$, $x \in (-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6})$; б) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2};\ 0]$;

в) $\mathrm{tg}\,x \ge -1$, $x \in (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}]$; г) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0;\ \pi]$.

## 11. Тригонометриялык теңдемелерди жана теңдемелер системаларын чыгаруунун мисалдары

9-пунктта жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерди кантип чыгарыш керек экендиги көрсөтүлгөн эле. Татаалыраак тригонометриялык теңдемелерди чыгаруу, тригонометриялык функцияларды билүүнү талап кылат. Кээ бир мисалдарды карайлы.

○ 1 - м и с а л. $2\sin^2 x+\sin x-1=0$ теңдемесин чыгарабыз. Жаңы $y=\sin x$ өзгөрмөсүн киргизебиз. Анда берилген теңдемени $2y^2+y-1=0$ түрүндө жазууга болот. Биз квадраттык теңдемени алдык. Анын тамырлары $y_1=\frac{1}{2}$ жана $y_2=-1$ болот. Натыйжада $\sin x=\frac{1}{2}$ же $\sin x=-1$. Биринчи учурда төмөндөгү чыгарылышты алабыз:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ \text{б.а.}\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Экинчи учурда:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$





2 - м и с а л. $6\sin^2 x+5\cos x-2=0$ теңдемесин чыгарабыз. $\sin^2 x$ ти $1-\cos^2 x$ менен алмаштырып $\cos x$ ке карата квадраттык теңдемеге келебиз: $6(1-\cos^2 x)+5\cos x-2=0$, мындан $-6\cos^2 x+5\cos x+4=0$, б.а. $6\cos^2 x-5\cos x-4=0$. 1-мисалдагыдай эле $\cos x=y$ жаңы өзгөрмөсүн киргизебиз. Анда $6y^2-5y-4=0$ болот, мындан $y=-\frac{1}{2}$ же $y=1\frac{1}{3}$ болот. $\cos x=1\frac{1}{3}$ теңдемеси чыгарылышка ээ эмес, анткени $1\frac{1}{3}>1$. $\cos x=-\frac{1}{2}$ теңдемесин чыгарып төмөнкүнү табабыз:

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

3 - м и с а л. $\mathrm{tg}\,x+2\mathrm{ctg}\,x=3$ теңдемесин чыгарабыз. $\mathrm{tg}\,x$ ти $y$ аркылуу белгилейбиз. $\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ болгондуктан $y+\frac{2}{y}=3$ теңдемесин алабыз, ал $y^2-3y+2=0$ квадраттык теңдемесине келтирилет ($y\ne 0$ шарты учурунда). Анын тамырлары $y=2$ жана $y=1$.

1) $\mathrm{tg}\,x=2$, $x=\mathrm{arctg}\,2+\pi k$, б.а. $x=x_0+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, мындан $x_0=\mathrm{arctg}\,2\approx 1{,}1072$.

2) $\mathrm{tg}\,x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

4 - м и с а л. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$ теңдемесин чыгарабыз.

$\cos x=0$ болгондо аргументтин маанилери бул теңдеменин чыгарылыштары болушпайт, анткени эгерде $\cos x=0$ болсо, $3\sin^2 x=0$ барабардыгы аткарылууга тийиш, ал эми косинус жана синус бир эле учурда нөлгө барабар боло алышпайт. Ошондуктан теңдеменин эки жагын тең $\cos^2 x$ ке (же $\sin^2 x$ ке) бөлүп берилген теңдемеге тең күчтүү $3\,\mathrm{tg}^2 x-4\mathrm{tg}\,x+1=0$ теңдемесин алабыз, мындан $\mathrm{tg}x=1$ же $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{3}$. Натыйжада $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, же $x=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

5 - м и с а л. $6\sin^2 x+4\sin x\cos x=1$ теңдемесин чыгарабыз.

Теңдеменин оң жагындагы 1ди $\sin^2 x+\cos^2 x$ менен алмаштырабыз. Тиешелүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзгөндөн кийин $5\sin^2 x+4\sin x\cos x-\cos^2 x=0$ экендигин алабыз. Ушуга окшош 4-мисалдагы ыкманы пайдаланабыз. Жыйынтыгында $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,x=-1$ди алабыз. Натыйжада $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, же $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

6 - м и с а л. $\sin x - \sin^2 2x = 0$ теңдемеси $\sin 2x$ ти $2\sin x \cos x$ менен алмаштыргандан кийин $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$ түрүнө келет.

Сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз: $\sin x(\sin x - 2\cos x) = 0$, мындан $\sin x = 0$, б.а. $x = \pi n$, $n \in Z$, же $\sin x - 2\cos x = 0$, мындан $\operatorname{tg} x = 2$ жана $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$, б.а. $x = x_0 + \pi n$, $n \in Z$, мындан $x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1072$.

4-мисалдагыдай эле, эки жагын $\cos^2 x$ ке бөлүп, $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0$ теңдемесин алууга болот. Эгерде $\sin^2 x$ ке бөлсөк, $\sin x = 0$ болгон $x$ тер берилген теңдеменин чыгарылыштары болорун эсепке алуу керек. Ошондуктан, $\sin^2 x$ ке бөлүүдөн алынган $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} = 0$ теңдемесинин тамырларына, $\sin x = 0$ теңдемесинин тамырларын бириктирүү керек. ●

Көптөгөн башка теңдемелер, мисалы, $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ же $\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - 5\sin x \cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$ ж.б. теңдемелери да, анын оң жана сол жактарын даражасы теңдеменин даражасына барабар болгон, косинустун (синустун) даражасына бөлүү аркылуу чыгарылат. Алдын ала, $\cos x = 0$, ($\sin^n x$ ке бөлгөндө $\sin x = 0$) болгондогу $x$ тин маанилери берилген теңдеменин чыгарылыштары болушарын текшерүү керек. Алсак, экинчи даражадагы теңдемени $\cos^2 x$ (же $\sin^2 x$) ке, ал эми үчүнчү даражадагы теңдемени $\cos^3 x$ (же $\sin^3 x$)ке бөлүп, анан $\operatorname{tg} x$ (же $\operatorname{ctg} x$) ти $y$ менен алмаштырып, алгебралык теңдемени алышат.

○ 7 - м и с а л. $\cos 6x + \cos 2x = 0$ теңдемесин чыгарабыз.

Косинустардын суммасын көбөйтүндүгө өзгөртүп түзүп $2\cos 4x \cos 2x = 0$ дү алабыз. Эгерде $\cos 4x = 0$ же $\cos 2x = 0$ болсо, бул теңдеме туура болот, б.а.

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z, \text{ же } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

8-м и с а л. Төмөндөгү теңдемелер системасын чыгаралы:

$$\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

Биринчи теңдемеден: $y = x - \frac{5\pi}{3}$ тү табабыз. Анда $2\sin y =$

$= 2\sin(x - \frac{5\pi}{3}) = 2(\sin x \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \sin\frac{5\pi}{3}) = 2(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) =$

$= \sin x + \sqrt{3}\cos x$ болот. Системанын экинчи теңдемеси $\sin x =$





$= \sin x + \sqrt{3}\cos x$ түрүнө ээ болот, мындан $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, мында $n \in Z$. Андан ары, $y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3}$ $\pi n - \frac{7\pi}{6}$, $=$ $n \in Z$.

Ж о о б у: $(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n - \frac{7\pi}{6})$, $n \in Z$. ●

### *Көнүгүүлөр*

164—168-теңдемелерди чыгаргыла.

**164.** а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;
в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$.

**165.** а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$.

**166.** а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$;
в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

**167.** а) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; г) $2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

**168.** а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $4\cos^2 x - 3 = 0$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; г) $4\sin^2 x - 1 = 0$.

---

169—174-теңдемелерди чыгаргыла.

**169.** а) $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
в) $9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
г) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$.

**170.** а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$; б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$;
в) $\sin 2x - \cos x = 0$; г) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$.

**171.** а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 2$;
в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; г) $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x$.

**172.** а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; б) $\sin^4\frac{x}{4} - \cos^4\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;
в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$; г) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$.

**173.** а) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; б) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$;
в) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; г) $1 - \sin 2x = (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2$.

**174.** а) $\cos 5x - \cos 3x = 0$; б) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;

в) $\sin 5x - \sin x = 0$; г) $\cos 3x + \cos x = 4\cos 2x$.

175—176-теңдемелердин системасын чыгаргыла.

**175.** а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1. \end{cases}$

**176.** а) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

## Тарыхтан маалыматтар

**1. Бурчтарды ченөө бирдиктеринин келип чыгышы тууралуу.** Бурчтардын градустук чени эбак эле, жаңы эрага чейин Байыркы Вавилондо пайда болгон. Жрецтер (илимге берилген адамдар деген мааниде) Күн өзүнүн бир күндүк жолун 180 «кадамда» өтөт, демек, бир «кадам» жайылган бурчтун $\frac{1}{180}$ бөлүгүнө барабар деп эсептешкен. Вавилондо эсептөөнүн алтымыштык системасы кабыл алынган, б.а. ар кандай сан, азыркы биздин ондук системада кабыл алынган 10дун даражалары аркылуу жазылбастан, 60тын даражаларынын суммасы түрүндө жазылган. Ошондуктан, бурчтарды ченөөнүн бир кыйла майда чен бирдиктерин киргизүү үчүн, бир «кадам» удаасы менен 60 бөлүккө майдаланган.

Бурчтарды ченөөнүн Вавилондук системасы жетишээрлик ыңгайлуу болгондуктан, аны Грециянын жана Римдин математиктери сактап калышкан. Бурчтук чоңдуктардын аттары үчүн биз колдонуп жүргөн терминдердин уңгусу «градус», латынча gradus (кадам, тепкич) деген сөздөн улам келип чыгат. minutus латынчадан которгондо «кичирейтилген» дегенди билдирет. secunda «экинчи» деп которулат. Бул: градусту 60 бөлүккө майдалоо, б.а. мүнөттөр — бул градустун биринчи бөлүгү; мүнөттү 60 секундага бөлүү — градустун экинчи бөлүгү дегенди билдирет. Аз пайдаланылуучу, секунданын $\frac{1}{60}$ бөлүгү болгон аталыш — терцина, латынча tercina же «үчүнчү» (градустун үчүнчү бөлүгү) дегенди билдирет.



Азыркы кабыл алынып жүргөн бурчтардын чоңдугун белгилөө системасы XVI жана XVII кылымдардын баш жагында кеңири жайылтылган. Ал системаны Н. К о п е р н и к жана Т. Б р а г е сыяктуу белгилүү астрономдор да колдонушкан. Бирок, К. П т о л е м е й (биздин эранын II кылымы) өз учурунда эле, градустун санын (ал аны жөн эле бөлүктөрү деп да атаган) тегерекче, мүнөттүн санын — штрих, ал эми секунданыкын — кош штрих менен белгилеген.

Бурчтун башка чен бирдиги — *радиан* — жакында эле киргизилген. «Радиан» деген терминди камтыган биринчи басылып чыгарылган китепче (ал экзамендик билеттер болгон), 1873-жылы Англияда пайда болгон. Адегендеги белгилөөлөрдө радиандык чен экендиги атайын көрсөтүлүп турган (мисалы, $\frac{\pi^R}{2}$ деп $\frac{\pi}{2}$ радиандык бурчту белгилешкен), бирок бат эле $R$ (же r) индекси ташталып коюлган. «Радиан» деген терминдин өзү латындын radius (шиш, нур) деген сөзүнөн келип чыгат. Эгерде бир радиандык бурчтун аныктамасын эске түшүрсөк (жаасынын узундугу айлананын радиусуна барабар болгон борбордук бурч), анда мындай бурчту атоо үчүн, «рад» деген уңгунун тандалып алынышы, өзүнөн-өзү түшүнүктүү болот.

**2. Тригонометриянын тарыхы жөнүндө.** «Тригонометрия» деген сөз, биринчи жолу (1505-ж.) немец теологу жана математиги Питискустун китебинин мазмунунан жолугат. Бул сөз грекчеден келип чыккан: τριγωνον — үч бурчтук, μετρεω — өлчөм (чен). Башка сөз менен айтканда, тригонометрия үч бурчтуктарды өлчөө жөнүндөгү илим. Аты салыштырмалуу жакында эле пайда болгону менен, азыркы тригонометрияга тиешелүү түшүнүктөр жана фактылар мындан эки миң жыл мурда белгилүү болгон.

Синус жөнүндөгү түшүнүктүн узак тарыхы бар. Үч бурчтуктун жана айлананын ар түрдүү катыштары (мындайча алганда, тригонометриялык функциялары), биздин эрага чейинки III кылымдардагы Байыркы Грециянын улуу математиктери — Е в к л и д д и н, А р х и м е д д и н, А п п о л о н и й  П е р г с к и й д и н эмгектеринде эле кездешет. Рим доорунда бул катыштар, атайын аттарга ээ болушпаса дагы, жетишерлик системалуу түрдө М е н е л а й (биздин эранын I кылымы) тарабынан изилденген. $\alpha$ бурчунун азыркы синусу, $\alpha$ борбордук бурчун керип турган хорданын жардамы, же эки эселенген жаанын хордасы катарында каралып (78-сүрөт) үйрөнүлгөн.

Андан кийинки мезгилдерде, узак убакыт бою, математиканы Индия жана араб окумуштуулары активдүү өнүктүрүшкөн. IV—V кылымдарда, индиялык улуу окумуштуу А р и а б х а т ы н ы н (476—550 жылд. тегереги) астрономия боюнча эмгектеринде атайын термин пайда болгон. Индиядагы жердин биринчи спутниги (жандоочусу) ушул адамдын аты менен аталган. Ал $MA$ кесиндисин (78-сүрөт) *ардхаджива* (*ардха* — жарым, *джива* — жаанын жиби, бул хорданы элестетет) деп атаган. Кийинчерээк, *джива* деген кыскача ат кирип кеткен. IX кылымда араб математиктери тарабынан *джива* (же *джиба*) деген сөз, арабдардын *джайб* (томпоктук) деген сөзү менен алмаштырылган. XII кылымда арабдардын математикалык тексттерин которгондо бул сөз латынча *синус* (sinus — ийилүү, ийрилеңүү) деген сөз менен алмаштырылган.

*Косинус* сөзү алда канча кийин чыккан сөз. Косинус — латындын complementy sinus, б.а. «кошумча синус» ( же башкача «кошумча жаанын синусу»; $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ экендигин эстегиле) — дегенди туюндурган сөздөрүнүн кыскартылышы. Биз тригонометриялык функциялар менен иштөөдө «үч бурчтуктарды өлчөө» маселесинин чегинен бир кыйла сыртка чыгып кеткен болобуз. Ошондуктан, белгилүү математик Ф. К л е й н (1849—1925) «Тригонометриялык» функциялар жөнүндөгү илимди башкача — *гониометрия* (латынча *gonio* «бурч» дегенди билдирет) деп атоону сунуш кылган. Бирок бул ат кабыл алынып, орун ала албады.

Тангенстер көлөкөнүн узундугун аныктоо маселесин чыгаруу менен байланыштуу пайда болгон. *Тангенс* (ошондой эле, *котангенс, секанс* жана *косеканс*) X кылымда араб математиги Абу-л-Вафа тарабынан киргизилген. Ал биринчи жолу тангенс жана котангенстин маанилеринин таблицасын түзгөн. Бирок, бул ачылыштар узак убакыт бою европалык математиктерге белгисиз калган жана XIV кылымда тангенстер, адегенде, англиялык окумуштуу Т. Б р а в е р д и н, кийинчерээк немец математиги жана астроному Р е г и о м о н т а н (1467-ж.) тарабынан кайрадан ачылган. «Тангенс» деген ат, латындын tanger (жануу) деген сөзүнөн келип чыгып 1583-жылы пайда болгон. Tangens «жанышуучу» сыяктуу которулат (тангенстин сызыгы — бирдик айланага жаныма экендигин эске салгыла).


$$\sin\alpha = \frac{MA}{R} = \frac{AA'}{2R}$$

78-сүрөт





arcsin жана arctg тин азыркы белгилеништери 1772-жылы, Веналык математик Ш е р ф е р д и н жана белгилүү француз окумуштуусу Ж. Л. Л а г р а н ж д ы н эмгектеринде пайда болгон. Бирок, мындан бир кыйла мурдараак, буларды башкача символдор менен белгилеп Д. Б е р н у л л и карагандыгы белгилүү. Ошондой болсо дагы, бул символдор XVIII кылымдын аягында гана жалпы таанылууга укук алып, кабыл алынган «арк» деген приставка латындын *arcus* (жаа) деген сөзүнөн келип чыккан, бул болсо, arcsin$x$ түшүнүгүнүн мааниси менен толук айкалышкан, анткени arcsin$x$ деген бул синусу $x$ ке барабар болгон бурч (же жаа деп айтса да болот) деп түшүнүлөт.

Тригонометрия узак убакыт бою геометриянын бөлүгү катары өнүгүп келген, б.а. биз азыр тригонометриялык функциялардын термини менен формулировкалай турган факт, геометриялык түшүнүктөрдүн жана ырастоолордун жардамы менен формулировкаланган. Эң чоң практикалык кызыгууну пайда кылган астрономиянын маселелерин чыгаруу зарылчылыгы (мисалы, кеменин (суднo) жүргөн ордун аныктоого, тутулууларды алдын ала айтууга байланышкан ж.б. маселелерди чыгаруу) тригонометриянын өнүгүүсүнө эң зор түрткү болгон. Астрономдорду, сферада жаткан чоң тегеректерден түзүлгөн сфералык үч бурчтуктардын жактары менен бурчтарынын арасындагы байланыш кызыктырган. Байыркы замандагы математиктер үчүн, силер IX класста окуган тегиздиктеги үч бурчтуктарды чыгаруу маселелерине караганда, бир кыйла татаал болгон сфералык геометриянын маселелерин чыгаруу маселелери менен иштөө жеңил болгондугун байкайбыз (сфералык геометрия жөнүндөгү китептерди окуп көргүлө).

Тригонометриянын силерге белгилүү болгон көп формулалары, геометриялык түрдө байыркы грек, индия, араб математиктери тарабынан ачылган. (Чынында, тригонометриялык функциялардын айырмасынын формулалары XVII кылымда гана белгилүү болду, тригонометриялык функциялар менен болгон эсептөөлөрдү жөнөкөйлөтүү үчүн, ал формулаларды англиялык математик Непер чыгарган. Ал эми синусоиданын биринчи сүрөтү 1634-жылы пайда болгон.)

К. Птолемей түзгөн синустун биринчи таблицасы принципиалдуу мааниге ээ болгон (узак убакыт бою ал хордалар таблицасы деп аталып келген): бир катар колдонмо маселелерди, биринчи кезекте астрономиянын маселелерин чыгаруунун практикалык каражаты пайда болгон.

Биз даяр таблицаларды же калькуляторду пайдалануу менен бирге бир кезде таблицалар ойлонуп табыла элек учурдун болгондугу жөнүндө көп деле ойлонуп отурбайбыз. Аларды түзүү үчүн

**Эйлер Леонард**

**(1707—1783) —**

XVIII кылымдагы эң зор математик. Швейцарияда туулган. Узак жылдар бою Россияда жашаган жана иштеген. Петербург илимдер академиясынын мүчөсү. Эйлердин эбегейсиз илимий мурасы, математикалык анализге, геометрияга, сандардын теориясына, вариациялык эсептөөгө, механикага жана математиканын башка колдонулуштарына тиешелүү болгон мыкты жыйынтыктарды өз ичине камтыйт.

чоң көлөмдөгү эсептөөлөрдү гана жүргүзүү талап кылынбастан, таблицаларды түзүү жолун да ойлоп табууга туура келген. Птолемейдин таблицасы бешинчи ондук белгисин кошо алганга чейин так.

Түбү швейцариялык, көп жылдар бою Россияда иштеген жана Петербург илимдер академиясынын мүчөсү болгон, XVIII кылымдагы өтө чоң математик Л. Э й л е р (1707—1783), тригонометрияны азыркы түрүнө чейин жеткирген. Эйлер биринчи жолу, тригонометриялык функциялардын белгилүү функциясын киргизген, каалаган бурчтун функциясын караган, келтирүүнүн формулаларын алган. Мунун бардыгы Эйлердин көп жылдык өмүрүндөгү математикада жасаганга үлгүргөн иштеринин кичине гана үлүшү: ал 800дөн ашык иш калтырган, математиканын ар түрдүү областтарына тиешелүү болгон, азыр классикалык болуп калган көп теоремаларды далилдеген. (1776-жылы көзү көрбөй калгандыгына карабастан, өмүрүнүн акыркы күндөрүнө чейин улам жаңы эмгектерин оозеки айтып (диктовать этип) жаздырууну уланта берген.) Эгерде силер, тригонометриялык функциялар менен геометриялык формада иштөөгө аракеттенип көрсөңөр, б.а. Эйлерге чейинки көптөгөн муундагы математиктер жасаган сыяктуу иштеп көрсөңөр, анда тригонометрияны системалаштыруудагы Эйлердин сиңирген эмгегин баалай аласыңар. Эйлерден кийин тригонометрия эсептөө формасын алды: ар түрдүү фактылар тригонометриянын формулаларын формалдуу пайдалануу жолу менен далилдене баштады, далилдөөлөр бир кыйла компакттуу жана жеңил болуп калышты.



**Декарт Рене**

**(1596—1650)—**

французданук улуу философ, математик. Аналитикалык геометрияны түзүүчүлөрдүн бири. Өзгөрмөлүү чоңдук түшүнүгүн киргизген. Анын идеялары көп сандаган улантуучуларды — «картезианчыларды» тапкан (Декарттын латындаштырылган аты — Картезий). Негизги эмгектери — «Геометрия», «Ыкма жөнүндө ой жүгүртүү».

**3. Функция түшүнүгүнүн тарыхынан.** Силер VII класстан бери тааныш болгон функция түшүнүгү математикада салыштырмалуу жакында эле пайда болду. Бул түшүнүктү киргизүүнүн максатка ылайыктуулугун түшүнүү үчүн жана биринчи жетишерлик так аныктаманы алыш үчүн, бир канча муундагы мыкты математиктердин күчүн зарп кылууга туура келген. XVII кылымдагы математикада болгон революциялык өзгөрүштөр, ар түрдүү өлкөлөрдүн жана элдердин көп сандагы окумуштууларынын эмгектери аркылуу пайда болгон. Бирок, биринчи кезекте П. Ф е р м а н ы н (1601—1665), Р. Д е к а р т т ы н (1596—1650), И. Н ь ю т о н д у н (1643—1727), Г. В. Л е й б н и ц т и н (1646—1716) ысымдарын атоого туура келет. Байыркы Грециянын геометрлеринин классикалык ыкмаларынан айырмаланып, геометриялык маселелерди чыгарууга алгебранын активдүү тартылышы менен мүнөздөлгөн, аналитикалык геометриянын пайда болушу аркылуу XVII кылымдын 30-жылдарында функция түшүнүгүнүн пайда болушуна зарыл өбөлгөлөр түзүлгөн. Геометриянын маселелерин координаталык ыкма менен чыгарып, силер чындыгында, аналитикалык геометриянын ыкмаларын пайдаланып жатасыңар. Француз математиктери П. Ферма жана Р. Декарт дээрлик бир эле мезгилде (бири биринен көз карандысыз), тегиздиктеги координаталар системасынын киргизилиши жана фигуралардын өзүлөрүнүн теңдемелери аркылуу берилиши, көптөгөн геометриялык маселелерди, геометриялык фигуралардын теңдемелерин изилдөөгө келтирүүгө мүмкүнчүлүк берерин байкашкан. «Геометрия», «ыкма жөнүндө ой жүгүртүү» аттуу китептеринде жаңы ыкманын кенен баяндамасын берген Декарттын урматына, тик бурчтуу координаталар системасы, кийинчерээк *декарттык* деп аталып калган. Ошол эле мезгилде алгебра жана *«тамгалуу эсептөөлөр»* дагы түзүлгөн. Мунун жардамы менен, азыр силер, алгебралык туюнтмаларды өзгөртүп түзүп теңдемелерди, тексттүү жана башка маселелерди чыгарып жатасыңар.

Англиялык улуу окумуштуу, математик жана физик И. Ньютон кыймылдагы чекиттин координаталарынын убакытка көз карандылыгын изилдөө менен, функцияны изилдөө жумушун жүргүзгөн. Бул түшүнүктү ал киргизбесе да, Ньютон анын маанисин ачык билген. Алсак, 1676-жылы «Мен фигураларды кароодон баш тартпасам, бардыгын жөнөкөй гана ординаталарды изилдөөгө алып келбесем, албетте, бул жалпы жыйынтыктарды ала албас элем» деп жазган (мында ординаталарды изилдөө деген, чындыгында, функциянын убакытка көз карандылыгын изилдөө).

«Функция» деген терминдин өзү биринчи жолу немецтик улуу математик жана философ Г. Лейбництин кол жазмасынан (1673-жыл) жана кийинчерээк басылып чыккан эмгегинен (1692-жыл) кезигет. function деген латын сөзү «бүтүрүү», «аткаруу» сыяктуу которулат. (fungor деген этиш дагы «туюндуруу», «билдирүү» деп которулат). Лейбниц бул түшүнүктү тегиздиктеги чекиттин абалы менен байланышкан ар түрдүү параметрлердин аттары үчүн киргизген. Лейбниц жана анын окуучусу — швейцариялык математик И. Бернулли, өз ара кат алышууларында, акырындык менен функцияны аналитикалык туюнтма деп түшүнүү керек экендигине келишет жана 1718-жылы мындай аныктама берет: «Өзгөрмөлүү чоңдуктун функциясы деп ошол өзгөрмөлүүдөн жана турактуулардан каалагандай жол менен түзүлгөн эсептелүүчү чоңдукту айтабыз».

Л. Эйлер өзүнүн «анализге киришүү» деген китебинде (1748-жыл) функциянын аныктамасын мындай формулировкалайт: «Өзгөрмөлүү сандан жана сандардан же турактуу сандардан кандайдыр бир жол менен түзүлгөн аналитикалык туюнтма, өзгөрмөлүү сандын функциясы болот».

Функциянын азыр кабыл алынып жүргөн белгиленишин да Эйлер киргизген.

Берилиш ыкмаларына байланышпаган функциянын азыркы учурдагы аныктамасы, бири-биринен көз карандысыз орус математиги Н. И. Лобачевский (1834-жыл) жана немец математиги Л. Дирихле (1837-жыл) тарабынан берилген. Бул аныктамалардын негизги идеясы төмөнкүдөй болгон: $x$ тин ар бир маанисине $y$ тин мааниси кандай жол менен туура келтирилгендиги анча мааниге ээ эмес (атап айтканда, туура келүүчүлүк, аналитикалык туюнтманын берилиши аркылуу болушу мил-





**Ньютон Исаак**

**(1643 — 1727) —**
**англиялык улуу окумуштуу, Г. Лейбниц менен бир мезгилде математикалык анализдин негизин иштеп чыккан. Классикалык механиканын түзүүчүсү. Оптикадагы, физика менен механикадагы көрүнүктүү ачылыштар Ньютонго тиешелүү. Анын негизги эмгеги — «натуралдык философиянын математикалык башталышы» табият таануунун өнүгүшүнө зор таасир тийгизген.**

деттүү түрдө эмес), негизгиси мындай туура келүүчүлүктүн бар экендиги.

Аныкталуу жана маанилеринин областтары ар кандай болгон (сандардан болушу сөзсүз эмес — 26-бетти кара) функциянын азыркы аныктамасы, жакында эле өтүп жаткан жүз жылдыктын биринчи жарымында көптүктөр теориясынын түзүүчүсү Г. Канторд ун (1845—1918) эмгектеринен кийин калыптанган.

Мына ушинтип, функция түшүнүгүнүн өнүгүү жолу татаал жана узак болгондугун көрдүңөр. Жаңы абстракттуу түшүнүктү киргизүү зарылчылыгын сезе билүү үчүн, көптөгөн конкреттүү маселелерди чыгаруу процессинде ал түшүнүктү бөлө билүү, анын мазмунун мүмкүн болушунча так чагылдыруучу аныктаманы берүү талап кылынат. Функция түшүнүгүнүн тарыхы В.И. Лениндин «...абстракциялар жаратылышты тереңирээк, туурараак, *толугураак* чагылдырышат. Кадыресе көрүп билүүдөн абстракттуу ой жүгүртүүгө *жана андан иш жүзүнө —чындыкты* таанып билүүнүн диалектикалык жолу мына ушундай». (Ленин В. И. Чыгармалардын толук жыйнагы.— 29-том. 152—153-беттер, орус тилиндегиси.)

Математиктер функция жөнүндөгү түшүнүккө, математиканын конкреттүү жана татаал маселелерин, анын колдонулуштарын иштей баштоо аркылуу келишкен. Бул изилдөөнүн жаңы кубаттуу аппараты болгон — дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдү түзүү процессинде ишке ашкан. Ал аппараттын элементтери менен силер кийинки главада таанышасыңар. Эйлер борбордук түшүнүгү функция деп жарыялаган («чексиздиктин бүткүл анализи, өзгөрмөлүү чоңдуктар жана алардын функциясынын тегерегинде айланат») интегралдык жана дифференциалдык эсептөөлөрдүн ачылышы, математиканын мүмкүнчүлүгүн кескин түрдө кеңейтти.

XVII кылымда математикада болгон терең төңкөрүштүн ачык мүнөздөмөсүн, Карл Маркс жана Фридрих Энгельс беришкен, атап айтканда минтип жазышкан: «Математикадагы бурулуш пункт болуп декарттык *өзгөрмөлүү чоңдук* эсептелген. Ошонун негизинде математикага кыймыл, демек, *диалектика* кирген, натыйжада *дифференциалдык жана интегралдык эсептөө тез эле зарыл* болуп калган». (Маркс К., Энгельс Ф. Чыгармалар жыйнагы. — Том 20.—573-бет, орус тилиндегиси.)

### Кайталоо үчүн суроолор жана маселелер

**1.** 1) 1 радиан бурч деген эмне? Бурчтун градустук жана радиандык ченлерин байланыштыруучу формулаларды жазгыла.

2) а) $18^\circ$; б) $-250^\circ$; в) $-360^\circ$; г) $225^\circ$ бурчтарды радиандык чен менен туюндургула.

3) а) $\pi$; б) $-2{,}5$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) 3 бурчтарды радиандык чен менен туюндургула.

**2.** 1) $\alpha$ санынын синусунун жана косинусунун аныктамаларын бергиле.

2) Бирдик айланадан $P_\alpha$ чекитин белгилегиле. Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө барабар болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ нын маанилерин (калькуляторду же таблицаларды пайдаланбастан) тапкыла:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$.

3) Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө барабар болсо, $\sin\alpha$ жана $\cos\alpha$ нын маанилерин тапкыла:

а) $23^\circ 24'$; б) $-1{,}7$; в) $-108^\circ 6'$; г) 0,8.

**3.** 1) $\alpha$ санынын тангенсинин жана котангенсинин аныктамаларын бергиле. $\alpha$ нын кандай маанилеринде $\operatorname{tg}\alpha$ жана $\operatorname{ctg}\alpha$ аныкталышкан?

2) Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө барабар болсо, $\operatorname{tg}\alpha$ жана $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилерин (калькуляторду же таблицаларды пайдаланбастан) тапкыла:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$.





3) Эгерде $\alpha$ төмөнкүлөргө барабар болсо, $\operatorname{tg}\alpha$ жана $\operatorname{ctg}\alpha$ нын маанилерин тапкыла:

а) 1,7; б) $-0{,}4$; в) 2,3; г) $-0{,}5$.

**4.** 1) Бир эле аргументтин тригонометриялык функцияларынын маанилерин байланыштырган формулаларды жазгыла.

2) Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

б) $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$;

в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

г) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

3) Теңдештиктерди далилдегиле:

а) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

**5.** 1) $P_\alpha$ чекити кайсы координаталык чейректе жаткандыгына байланыштуу $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ жана $\operatorname{ctg}\alpha$ лардын белгилерин көрсөткүлө. Бул белгилерди атагыла.

2) Белгисин аныктагыла:

а) $\sin(-212^\circ)$ жана $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{9}$; б) $\cos 305^\circ$ жана $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\cos(-105^\circ)$ жана $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{9}$; в) $\sin(-324^\circ)$ жана $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}$.

3) Тригонометриялык функциялардын биринин берилген мааниси жана $\alpha$ таандык болгон интервал боюнча башка негизги үч тригонометриялык функциялардын маанилерин тапкыла:

а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=-3, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{7}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

**6.** 1) Келтирүүнүн формулаларын эсте тутуу үчүн мнемониялык эрежени формулировкалагыла. Келтирүүнүн бир нече формуласын жазгыла.

2) Төмөнкүлөрдү эң кичине оң аргументтүү тригонометриялык функциянын маанисине келтиргиле:

а) $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{21}{13}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{8\pi}{3}$.

3) Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

б) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin(\alpha-\frac{3\pi}{2})\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})}$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}+\sin\frac{37\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}$;

г) $\frac{\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}$.

7. 1) Синустун, косинустун, тангенстин суммасынын (айырмасынын) формулаларын жазгыла.

2) Төмөнкү туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)$, эгер $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ жана $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$ жана $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)$, эгер $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ жана $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\sin 75^\circ$ жана $\operatorname{tg}75^\circ$.

3) Теңдештикти далилдегиле:

а) $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)=2\operatorname{tg}2x$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=\sqrt{3}$;

г) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

8. 1) Кош аргументтин формулаларын жазгыла.

2) Төмөнкүлөрдү эсептегиле:

а) эгерде $\cos\alpha=-\frac{4}{5}\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin2\alpha$ ны;

б) эгерде $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha<0$ болсо, $\operatorname{tg}2\alpha$ ны;





в) эгерде $\sin\alpha=\frac{15}{17}$ болсо, $\cos2\alpha$ ны;

г) эгерде $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\operatorname{tg}2\alpha$ ны.

3) Теңдештикти далилдегиле:

а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}(2\cos^2\alpha-1)=\sin2\alpha$; б) $\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

в) $1-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\sin2\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos2\alpha)=\sin2\alpha$.

9. 1) Синустардын (косинустардын) суммасынын жана айырмасынын формулаларын жазгыла.

2) Калькуляторду же таблицаны пайдаланбастан эсептегиле:

а) $\cos117^\circ+\cos63^\circ$; б) $\frac{\sin70^\circ-\sin10^\circ}{\cos40^\circ}$;

в) $\cos\frac{19\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\sin112^\circ+\sin248^\circ$.

3) Теңдештикти далилдегиле:

а) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

б) $(\sin2\alpha+\sin4\alpha)^2+(\cos2\alpha+\cos4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$;

в) $\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta}{\cos2\alpha+\cos2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

г) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha=4\sin3\alpha\cos2\alpha\cos\alpha$.

10. 1) Жарым аргументтин формулаларын жазгыла.

2) Төмөнкүлөрдү тапкыла:

а) эгерде $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ни;

б) эгерде $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ни;

в) эгерде $\sin\alpha=-\frac{3}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\frac{\alpha}{2}$ ни;

г) эгерде $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болсо, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ ни.

3) Төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$; б) $\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

**11.** 1) Сан функциясы, анын аныкталуу жана маанилеринин областы деген эмне?

2) Функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла:

а) $y = \dfrac{3x+1}{x^2 - 7x + 12}$; б) $y = \dfrac{1}{\sin x}$;

в) $y = \sqrt{4 - x^2}$; г) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3) Функциялардын маанилеринин областын тапкыла:

а) $y = 3\cos x - 1$; б) $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$; в) $y = 2 - \sin x$; г) $y = 3 - x^4$.

**12.** 1) Функциянын графиги деген эмне?

2) Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y = \dfrac{2}{x-1}$; б) $y = 2 - \cos x$;

в) $y = \sqrt{x+2}$; г) $y = \sin x - 1$.

3) $f$ функциясынын графигинин координаталык октор менен кесилишин тапкыла:

а) $f(x) = x^3 - 4x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$;

в) $f(x) = 1 - x^4$; г) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

**13.** 1) $P$ көптүгүндө өсүүчү (кемүүчү) функциялардын аныктамаларын бергиле.

2) Графиги 79-сүрөттө көрсөтүлгөн функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.

3) Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла:

а) $y = 1 + 0{,}5 \cos x$; б) $y = -\dfrac{3}{x-1}$;

в) $y = 2x^2 + 4x$; г) $y = 1{,}5 \sin x - 1$.

**14.** 1) Функциянын максимум жана минимум чекиттеринин аныктамасын бергиле. Функциянын экстремуму деген эмне?

2) Графиги 79-сүрөттө көрсөтүлгөн функциянын максимум жана минимум чекиттерин көрсөткүлө.

3) Функциянын максимум жана минимум чекиттерин тапкыла:

а) $y = (x-3)^2 + 2$; б) $y = \cos^2 x$;

в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = \sin^2 x$.

**15.** 1) Функцияны изилдөөдө кандай маселелер чечилет?

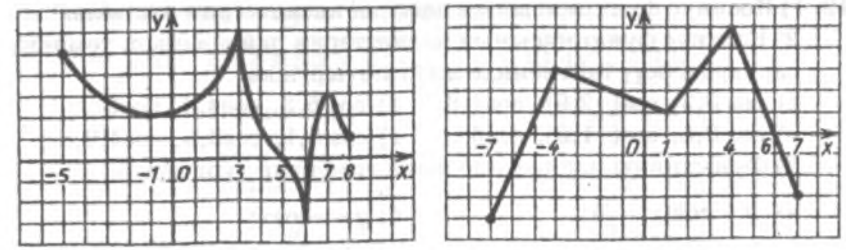
2) Функцияны изилдөөнү жүргүзгүлө:

а) $y = \sin x - 2$; б) $y = -\dfrac{6}{x-3}$;

в) $y = x^2 - 4x + 3$; г) $y = 2\cos x + 1$.

3) Бул функциялардын графиктерин түзгүлө.






79-сүрөт

**16.** 1) Жуп жана так функциялардын аныктамасын бергиле. Алардын графиктери кандай касиеттерге ээ?

2) Төмөнкү функциялардын кайсынысы жуп, кайсынысы так экендигин тактагыла:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; б) $y = x + x^5$;

в) $y = x\cos x$; г) $y = 3x^2 + x^6$.

3) Эгерде:

а) $x \in (-\infty;\ 0]$ болгондо, $f(x) = \cos x - 1$; $f$ — так;

б) $x \in [0;\ \infty]$ болгондо, $f(x) = (x-1)^3$; $f$ — жуп;

в) $x \in (-\infty;\ 0]$ болгондо, $f(x) = \sin x$; $f$ — жуп;

г) $x \in [0;\ \infty)$ болгондо, $f(x) = 4x - x^2$; $f$ — жуп экендиги белгилүү болсо, $f$ функциясынын графигин түзгүлө.

**17.** 1) Мезгилдүү функция, функциянын мезгили деген эмне?

2) Функция кандай эң кичине оң мезгилге ээ:

а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$;

в) $y = \sin x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$?

3) Функциянын эң кичине оң мезгилин тапкыла:

а) $y = \sin \dfrac{x}{2}$; б) $y = \cos(4x+1)$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \cos \dfrac{x}{3}$.

**18.** 1) Синус функциясынын негизги касиеттерин атагыла.

2) Синус функциясынын касиеттерин пайдаланып, төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:

а) $\sin 0{,}3$; $\sin 1{,}1$, $\sin(-1{,}2)$; б) $\sin 4$, $\sin 3{,}6$ $\sin 2$;

в) $\sin 0{,}4$, $\sin(-0{,}9)$, $\sin 1{,}4$; г) $\sin 4{,}3$, $\sin 2{,}9$, $\sin 1{,}9$.

3) Функцияны изилдегиле жана графигин түзгүлө:

а) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin \dfrac{x}{3}$;

в) $y = 1 + 1{,}5\sin x$; г) $y = \sin 2x$.

**19.** 1) Косинус функциясынын негизги касиеттерин атагыла.
2) Косинус функциясынын касиеттерин пайдаланып, төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:
а) $\cos 0{,}3$, $\cos(-2{,}9)$, $\cos 1{,}8$; б) $\cos 5{,}3$, $\cos 4{,}4$, $\cos 6{,}2$;
в) $\cos 0{,}5$, $\cos(-1{,}3)$, $\cos 3$; г) $\cos 6{,}1$, $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}9$.
3) Функцияны изилдегиле жана графигин тургузгула:
а) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$; б) $y = -\cos x$;
в) $y = 2\cos x - 1$; г) $y = \cos\frac{x}{2}$.

**20.** 1) Тангенс функциясынын негизги касиеттерин атагыла.
2) Тангенс функциясынын касиеттерин пайдаланып, төмөнкү сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла:
а) $\mathrm{tg}(-0{,}4)$, $\mathrm{tg}\ 1{,}2$, $\mathrm{tg}\ 0{,}8$; б) $\mathrm{tg}\ 2{,}8$, $\mathrm{tg}\ 3{,}9$, $\mathrm{tg} 1{,}6$;
в) $\mathrm{tg}\ 0{,}6$, $\mathrm{tg}\ (-1{,}3)$, $\mathrm{tg}(-0{,}7)$; г) $\mathrm{tg}\ 4{,}3$, $\mathrm{tg}\ 1{,}7$, $\mathrm{tg}\ 2{,}5$.
3) Функцияны изилдегиле жана графигин түзгүлө:
а) $y = -\mathrm{tg}x$; б) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$;
в) $y = 2\mathrm{tg}x$; г) $y = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{4})$.

**21.** 1) Тамыр жөнүндөгү теореманы формулировкалагыла.
2) Сандын арксинусунун аныктамасын бергиле. Арксинус кандай сандар үчүн аныкталган?
3) Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:
а) $\arcsin(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;
в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 1$; г) $\arcsin 0 - \arcsin(-\frac{1}{2})$.

**22.** 1) Арккосинустун, арктангенстин аныктамаларын бергиле.
2) Сандын арксинусу жана арктангенси кайсы сандар үчүн аныкталышкан?
3) Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:
а) $\arccos(-1) + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$;
в) $\mathrm{arctg}(-1) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos 0 - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**23.** 1) $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$ жөнөкөй тригонометриялык теңдемелерин чыгаруунун формулаларын жазгыла.
$a$ нын кандай маанилеринде бул теңдемелер чыгарылышка ээ болушат?
2) Төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла:
а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x + 1 = 0$;
в) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$; г) $2\cos x - 1 = 0$.



**24.** Төмөнкү теңдемелерди чыгаргыла:
1) а) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$; б) $\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}x + 3 = 0$;
в) $2\cos^2 x - 5\cos x = 3$; г) $2\sin^2 x + \sin x = 0$;
2) а) $6\sin^2 x - 2\sin 2x = 1$. б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $4\sin x\cos x = \sqrt{3}$; г) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$.

**25.** Төмөнкү барабарсыздыктарды чыгаргыла (берилген барабарсыздыкты $x$ канааттандырган учурда, $P_x$ чекиттеринин көптүгүн бирдик айланада алдын ала көрсөткүлө):
1) а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos x + 1 < 0$;
в) $\mathrm{tg}x < \sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\sin x + 1 > 0$;
2) а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$; б) $(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 \le \frac{1}{2}$;
в) $2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$; г) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

# ТУУНДУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

## § 4. ТУУНДУ

### 12. Функциянын өсүндүсү

Бизди көбүнчө кандайдыр бир чоңдуктун мааниси эмес, анын **өзгөрүшү** кызыктырат. Мисалы, пружинанын серпилгичтүүлүк күчү, пружинанын узарышына пропорционалдуу; жумуш — бул энергиянын өзгөрүшү, орточо ылдамдык — бул которулуштун, ал которулуш болуп өткөн убакыт аралыгына болгон катышы, ж.б.

$f$ функциясынын кандайдыр бир турактуу $x_0$ чекитиндеги маанисин $x_0$ чекитинин аймагында жаткан ар түрдүү $x$ чекиттериндеги маанилери менен салыштырууда: «аргументтин өсүндүсү» жана «функциянын өсүндүсү» түшүнүктөрүн пайдаланып, $f(x)-f(x_0)$ айырмасын $x-x_0$ айырмасы аркылуу туюндуруу ыңгайлуу. Булардын маанисин түшүндүрөбүз.

$x$ чекити турактуу $x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагында жаткан каалаган чекит болсун. $x-x_0$ айырмасы *көз каранды эмес өзгөрмөнүн (же аргументтин) $x_0$ чекитиндеги өсүндүсү* деп аталат жана $\Delta x$ аркылуу белгиленет. Мына ошентип,

$$\Delta x = x - x_0$$

мындан, $x = x_0 + \Delta x$ келип чыгат.

Башталгыч $x_0$ мааниси «$\Delta x$ өсүндүсүн алды» деп да айтышат. Мунун натыйжасында $f$ функциясынын мааниси

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

чоңдугуна өзгөрөт.

Бул айырма *$f$ функциясынын $\Delta x$ өсүндүсүнө* туура келүүчү, *$x_0$ чекитиндеги өсүндүсү* деп аталат жана $\Delta f$ символу менен белгиленет («дельта эф» деп окулат), б.а. аныктама боюнча

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \qquad (1)$$

мындан

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

$x_0$ турактуу болгондо, $\Delta f$ өсүндүсү $\Delta x$ тен функция экендигине көңүл бургула.

$\Delta f$ ти көз каранды өзгөрмөнүн өсүндүсү деп да аташат жана $y = f(x)$ функциясы үчүн $\Delta y$ аркылуу белгилешет.





○ 1-мисал. Эгерде $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ жана: а) $x = 1{,}9$; б) $x = 2{,}1$ болсо, $x_0$ чекитиндеги $\Delta x$ жана $\Delta f$ өсүндүлөрүн табабыз:

а) $\Delta x = x - x_0 = 1{,}9 - 2 = -0{,}1;$

$\Delta f = f(1{,}9) - f(2) = 1{,}9^2 - 2^2 = -0{,}39;$

б) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}1 - 2 = -0{,}1;$

$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = 2{,}1^2 - 2^2 = 0{,}41.$

2-мисал. Эгерде аргументтин өсүндүсү $\Delta x$ ке барабар болсо, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги $\Delta f$ өсүндүсүн табабыз.

(1) формула боюнча:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

3-мисал. Кыры $a$ болгон куб берилген. Эгерде анын кырынын узундугун ченөөдө $\Delta x$ каталыгы кетирилсе, анда бул кубдун көлөмүн эсептөөдө кетирилген $\Delta V$ каталыгын табабыз. Өсүндүнүн аныктамасы боюнча $x = a + \Delta x$, анда

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \ ●$$

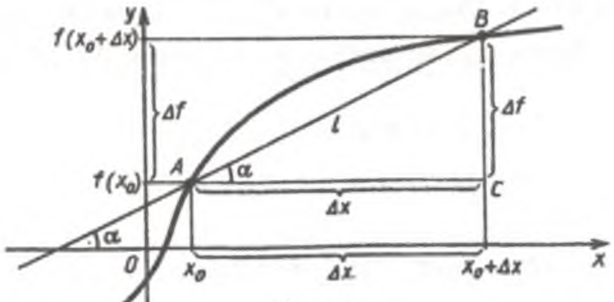
$\Delta x$ жана $\Delta f$ ($\Delta f$ өсүндүсүн ошондой эле $\Delta y$ аркылуу белгилешет) өсүндүлөрүнүн геометриялык маанисин 80-сүрөттү кароо менен түшүнүүгө болот.

$f$ функциясынын графигинин каалаган эки чекити аркылуу өткөн $l$ түз сызыгы, $f$ тин графигинин *кесүүчүсү* деп аталат. ($x_0$; $y_0$) жана ($x$; $y$) чекиттери аркылуу өтүүчү кесүүчүнүн $k$ бурчтук коэффициенти $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ го барабар. Бурчтук коэффициентти $\Delta x$ жана $\Delta y$ өсүндүлөрү аркылуу туюндуруу ыңгайлуу (80-сүрөт):

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

($y = kx + b$ түз сызыгынын бурчтук коэффициенти, ал сызыктын абсцисса огу менен түзгөн $\alpha$ бурчунун тангенсине барабар экендигин эске салабыз.)

Өсүндүлөрдүн киргизилген белгилөөлөрүнүн жардамы менен, убакыттын $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ аралыгындагы кыймылдын орточо ылдамдыгын туюндуруу да ыңгайлуу. Эгерде чекит түз сызык боюнча




80-сүрөт

кыймылдаса жана анын $x(t)$ координатасы белгилүү болсо, анда

$$V_{орт.}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Бул формула $\Delta t < 0$ ($[t_0 + \Delta t; t_0]$ аралыгы үчүн) да туура. Чынында эле, бул учурда чекиттин которулушу $x(t_0) - x(t_0 + \Delta x)$ ке барабар болот; убакыт аралыгынын узактыгы — $\Delta t$ га барабар болот, натыйжада

$$V_{орт.}(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Ушуга окшош эле, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ катышын, *функциянын өзгөрүшүнүн*, учтары $x_0$ жана $x_0 + \Delta x$ болгон аралыктагы *орточо ылдамдыгы* деп аташат.

### *Көнүгүүлөр*

**177.** а) Тик бурчтуктун жактары 15 м жана 20 м. Эгерде: 1) анын кичине жагы 0,11 м ге чоңойтулса;
2) анын чоң жагы 0,2 м ге чоңойтулса, тик бурчтуктун периметринин жана аянтынын өсүндүсүн тапкыла.
а) Тегеректин радиусу 2 см. Эгерде анын радиусун ченөөдө: 1) 0,2 см; б) $\Delta R$; 3) 0,1 см; 4) $h$ каталык кетирилсе, тегеректин аянтын эсептөөдө кетирилген каталыкты тапкыла.

**178.** Эгерде:

а) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}1$;

б) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}2$;

в) $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}01$;

г) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$

болсо, $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги өсүндүсүн тапкыла.



**179.** Эгерде:

а) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{3}$;

б) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}6$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

г) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, $x_0 = 1{,}22$, $x = 1{,}345$

болсо, $x_0$ чекитиндеги $\Delta x$ жана $\Delta f$ өсүндүлөрүн тапкыла.

**180.** Эгерде:

а) $f(x) = 1 - 3x^2$; б) $f(x) = ax + b$;

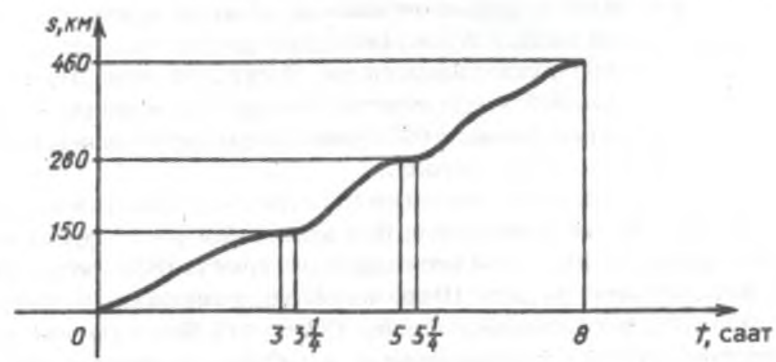
в) $f(x) = 2x^2$; г) г) $f(x) = -\frac{1}{x}$

болсо, $f$ функциясынын $x$ чекитиндеги өсүндүсүн $x_0$ жана $\Delta x$ аркылуу туюндургула.

**181.** 81-сүрөттө автобустун кыймылынын графиги чийилген. Убакыттын төмөнкү аралыктары үчүн, кыймылдын орточо ылдамдыгын тапкыла:
а) [0;3]; б) [3;5]; в) [3,25;5,25]; г) [0; 8].

**182.** Чекит координаталык түз сызык боюнча кыймылдайт жана убакыттын каалаган $t$ моментинде анын координатасы $3 + 12t - t^2$ ка барабар. Убакыттын төмөнкү $I$ аралыгы үчүн, чекит канчага жана кайсы багытка которулат (жылат):
а) [2;2,5]; б) [7;8]; в) [4;5]; г) [6;8]?
Анын орточо ылдамдыгы эмнеге барабар?

**183.** Бурчтук коэффициенттери:
а) −1 жана 2; б) $\frac{1}{2}$ жана −3; в) 3 жана −2; г) $-\frac{1}{2}$ жана −2




81-сүрөт

болгон жана (1;3) чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктарды түзгүлө. Ар бир учурда бул түз сызыктар, абсциссалар огу менен кандай бурч (кең же тар) түзөрүн тактагыла.

**184.** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ функциясынын графигинин абсциссалары $x_1$ жана $x_2$ болгон чекиттер аркылуу өтүүчү кесүүчүсүнүн бурчтук коэффициентин тапкыла. Эгерде:

а) $x_1=0,\ x_2=1;$ б) $x_1=-1,\ x_2=-2;$

в) $x_1=1,\ x_2=2;$ г) $x_1=-1,\ x_2=0$

болсо, кесүүчү $Ox$ огу менен кандай (кең же тар) бурч түзөт?

---

**185.** Кубдун $x$ кыры $\Delta x$ өсүндүсүн алды. Кубдун толук бетинин аянтынын өсүндүсүн тапкыла.

**186.** а) $f(x)=-x^3+3x;$ б) $\frac{1}{x^2-1};$

в) $f(x)=x^3-2x;$ г) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

болгондо, $\Delta f$ жана $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ти $x_0$ жана $\Delta x$ аркылуу туюндургула жана алынган туюнтмаларды өзгөртүп түзгүлө.

**187.** Эгерде: а) $x(t)=v_0\,t-\frac{g\,t^2}{2};$ б) $x(t)=-at+b;$

в) $x(t)=\frac{g\,t^2}{2};$ г) $x(t)=at+b$

болсо, түз сызык боюнча кыймылдоочу чекиттин, убакыттын $[t_0;\ t_0+\Delta t]$ аралыгы үчүн, орточо ылдамдыгын тапкыла.

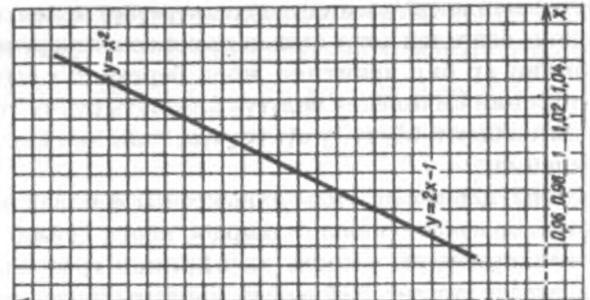
## 13. Туунду жөнүндө түшүнүк

**1. Функциянын графигине жаныма жөнүндө түшүнүк.** Силерге белгилүү болгон бардык функциялардын графиктери, иш жүзүндө, жылма ийрилер түрүндө чийилген эле. Мындай ийрилер, геометриялык жактан кандай түзүлгөндүгүн, конкреттүү мисалда — $y=x^2$ функциясынын графигинде (82-сүрөт), аргументтин маанилери 1ге жакын болгондо карап көрөлү.

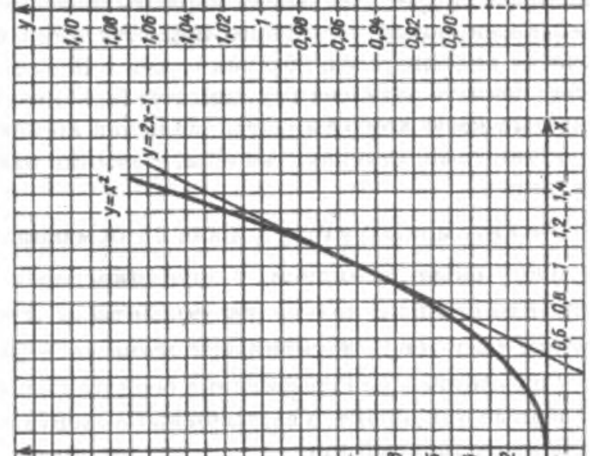
Ал үчүн, масштаб, бирдигин (82-сүрөттөгү масштабга салыштырганда) 10 эсе чоңойтобуз; бул масштабда $y=x^2$ функциясынын графигин [0,5; 1,5] кесиндисинде түзөбүз (83-сүрөт). Андан кийин, масштабды дагы 10 эсе чоңойтуп, функциянын графигин [0,95; 1,05] кесиндисинде түзөбүз (84-сүрөт). Бул сүрөттөн, аргументтин 1 ге жакын маанилеринде, $y=x^2$ функциясынын графиги, иш жүзүндө, $y=2x-1$ түз сызыгынын кичинекей кесиндисинен



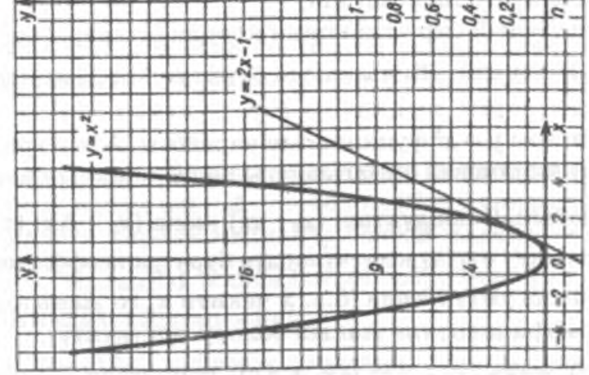





84-сүрөт




83-сүрөт




82-сүрөт

айырмаланбастыгын көрөбүз, б.а. графиктин чекиттери бул түз сызыкты бойлото «тизилип» калган сыяктуу.

Ушуга окшош эле, ар кандай жылма ийри так ушундай касиетке ээ: анын ар кандай кичине бөлүгү, иш жүзүндө, кандайдыр бир $l$ түз сызыгынын кесиндисинен айырмаланбайт. (ЭЭМда колдонулуучу, график түзүүчүлөр, жылма функциялардын графиктерин, ар бир чекитте кичинекей кесиндилерди жүргүзүү менен, чекиттер боюнча «чиерин» белгилей кетүү кызык экендигин эскертмекчибиз.) Жылма ийрининин ар бир чекитине жооп берген түз сызык (б.а. кесиндиси, ийрининин кичинекей бөлүгүн алмаштыруучу түз сызык) толук аныкталган болот. Муну түшүнүү үчүн, кийинки көрсөтмөлүүлүккө кайрылабыз.

Синусоиданы, параболаны же гиперболаны ж.б. ларды сүрөткө тез тартуу үчүн, трафарет (калып) даярдоо керек дейли. Ал үчүн, алдын ала миллиметрдик кагазда ал ийрининин графиги мүмкүн болушунча тагыраак түзүлөт. Кайчынын жардамы менен трафаретти кылдат кесип алсак, анын чеги бизге керектүү ийри болоруна өзүңөр эле ишене аласыңар. Ар бир чекиттеги кайчынын абалы (ал абал, ар бир чекитте изделген түз сызыкты берет) толук аныкталган: кайчынын кесүү хордасындагы абалынан ар кандай четтөөсү, трафареттин томпоктугунун же иймектигинин пайда болушуна алып келет.

$(x_0;\ f(x_0))$ чекити аркылуу өтүүчү жана $x$ тин маанилери $x_0$ гө жакын болгондогу анын кесиндиси, $f$ функциясынын графиги менен иш жүзүндө биригип калган түз сызыкты, *$f$ функциясынын графигинин* $(x_0;\ f(x_0))$ чекитиндеги *жанымасы* деп айтышат. Демек, $f$ функциясынын графигинин берилген чекитиндеги жанымасынын абалын так аныктоо зарылчылыгы жөнүндөгү маселенин пайда болушу табигый иш.

$l$ түз сызыгынын бир чекитинин координаталары белгилүү — ал $(x_0;\ f(x_0))$ чекити. Жанымасынын бурчтук коэффициенти $k$ ны табуу калды.

Мисал катары $y = x^2$ функциясын карайбыз. Анын графигинин $x_0$ чекитинин кичинекей аймагындагы бөлүгү $l$ жанымасынын кесиндисине жакын. Ошондуктан $(x_0;\ x_0^2)$ жана $(x_0 + \Delta x;\ (x_0 + \Delta x)^2)$ чекиттери аркылуу өтүүчү кесүүчүлөрдүн бурчтук коэффициенттери, $\Delta x$ нөлгө чексиз умтулганда (б.а. $x$ чекити $x_0$ гө жакындаганда), $k$ бурчтук коэффициентине жакын болору түшүнүктүү.

$(x_0,\ y(x_0))$ жана $(x_0 + \Delta x;\ y(x_0 + \Delta x))$ чекиттери аркылуу өтүүчү кесүүчүнүн $k(\Delta x)$ бурчтук коэффициенти, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ке барабар (12-пункт), мында $\Delta y$ деген $y$ тин $x_0$ чекитиндеги аргументтин $\Delta x$ өсүндүсүнө туура келүүчү өсүндүсү. $y = x^2$ функциясы үчүн

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x. \qquad (1)$$





Жанымасынын бурчтук коэффициентин табуу үчүн, $\Delta x$ нөлгө жакындаганда, $k(\Delta x)$ кандай мааниге жакындаарын билүү калды, $k(\Delta x)$ тин мааниси $2x_0$ гө жакын экендиги көрүнүп турат. Демек, $\Delta x$ тин эң кичине маанилеринде кесүүчүнүн бурчтук коэффициенти $2x_0$ гө жакын болот. $x_0 = 1$ болгондо $k = 2$ни алабыз. Изделген жанымa (1;1) чекити аркылуу өткөндүктөн жанымасынын теңдемеси $y = 2x - 1$ болот деген жыйынтыкка келебиз. Ушул эле жыйынтыкка, пункттун башталышында жалаң көрсөтмөлүүлүк ой жүргүзүү менен келген элек.

**2. Кыймылдын кирпик какканчакты ылдамдыгы.** Бизге физикадан белгилүү болгон маселеге кайрылабыз. Чекиттин түз сызык боюнча болгон кыймылын карайбыз. Убакыттын $t$ моментиндеги чекиттин $x$ координатасы $x(t)$ болсун. Физикадагы сыяктуу эле, кыймыл үзгүлтүксүз жана салмак менен болот деп эсептейли, башка сөз менен айтканда, сөз чыныгы турмуштагы кыймыл жөнүндө бара жатат. Аныктык үчүн, сөз шоссенин түз сызыктуу бөлүгү боюнча болгон автомобилдин кыймылы жөнүндө болуп жатат деп эсептейбиз.

Маселе мындай коюлат: белгилүү $x(t)$ көз карандылыгы боюнча, убакыттын $t$ моментинде кыймылдагы автомобилдин ылдамдыгын (бул ылдамдык кирпик какканча болгон ылдамдык экендигин силер билесиңер) аныктагыла. Эгерде $x(t)$ көз карандылык сызыктуу болсо, жообу жөнөкөй: убакыттын ар бир моментинде ылдамдык, өтүлгөн жолдун убакытка болгон катышы болот. Эгерде кыймыл бир калыпта болбосо, маселе татаалыраак.

Убакыттын ар бир моментинде, автомобиль кандайдыр бир белгилүү (ошол момент үчүн) ылдамдык менен кыймылдаары түшүнүктүү.

Убакыттын $t_0$ моментинде спидометр фотосүрөткө тартып, бул ылдамдыкты жеңил эле табууга болот. (Спидометрдин көрсөтүүсү, $t$ моментиндеги кирпик какканча болгон ылдамдык болот.) Белгилүү болсо, $v_{\text{кирп.как.}}(t_0)$ ылдамдыгын табуу үчүн физика сабагында силер мындай жасагансыңар.

$t_0$ дөн $t_0 + \Delta t$ га чейинки узактыгы $|\Delta t|$ болгон убакыттын аралыгында орточо ылдамдык белгилүү (12-пункт):

$$v_{\text{орт.}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Биз нерсенин кыймылы салмактуу (бирдей) деп эсептедик. Ошондуктан: эгерде $\Delta t$ эң кичине болсо, анда убакыттын бул аралыгында ылдамдык, иш жүзүндө өзгөрбөйт деп эсептөөгө болот. Анда орточо ылдамдык (бул аралыктагы), иш жүзүндө, биз издеп жаткан $\upsilon_{\text{кирп.как.}}(t_0)$ маанисинен айырмаланбайт. Бул жагдай, кирпик какканча болгон ылдамдыкты аныктоонун төмөнкү жолун айтып берет: $\upsilon_{\text{орт.}}(\Delta t)$ ны таап туруп, нөлгө жакын болгондо, бул чоңдук кандай мааниге жакын экендигин карап көрүү керек.

Конкреттүү мисал карайлы. $\upsilon_0$ ылдамдыгы менен жогору карай ыргытылган нерсенин кирпик какканча болгон ылдамдыгын табабыз. $t$ моментинде анын бийиктиги $h(t)=\upsilon_0 t-\frac{gt^2}{2}$ белгилүү формуласы боюнча табылат.

1) Эң мурда $\Delta h$ ты табабыз:

$$\Delta h(t)=\upsilon_0(t_0+\Delta t)-\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\upsilon_0 t_0+\frac{gt_0^2}{2}=\upsilon_0\Delta t-g\,t_0\Delta t-\frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

2) $$\upsilon_{\text{орт.}}(\Delta t)=\frac{(\upsilon_0-g\,t_0)\,\Delta t-g\,\frac{(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t}=\upsilon_0-g\,t_0-\frac{g\Delta t}{2}. \qquad (3)$$

3) Эми $\Delta t$ ны нөлгө умтултуу менен кичирейтебиз (кыскача, $\Delta t$ нөлгө умтулат деп коюшат. Бул $\Delta t\to 0$ деп жазылат).

Бул учурда $-\frac{g\Delta t}{2}$ мааниси дагы нөлгө умтуларын түшүнүү жеңил эле, б.а. $\Delta t\to 0$ учурда $-\frac{g\,t}{2}\to 0$.

Ал эми $\upsilon_0$ жана $-gt_0$ чоңдуктары, демек, $\upsilon_0-gt_0$ турактуу болгондуктан (3) формуладан: $\Delta t\to 0$ учурда,

$$\upsilon_{\text{орт.}}(\Delta t)\to\upsilon_0$$

болорун алабыз.

Мына ушинтип, убакыттын $t_0$ моментинде чекиттин кирпик каккычактагы ылдамдыгы төмөнкү формула боюнча табылат:

$$\upsilon_{\text{кирп.как.}}(\Delta t)=\upsilon_0-g\,t_0.$$

**3. Туунду.** Параболанын абсциссасы $x_0=1$ болгон чекитиндеги жанымасынын бурчтук коэффициентин эсептөө жана $\upsilon_0$ ылдамдыгы менен жогору карай ыргытылган нерсенин кирпик каккычактагы ылдамдыгын табуу жөнүндөгү каралган эки маселе ар түрдүү формулировкаланышты. Бирок, эки учурда тең, биз бир эле схема боюнча иштедик. $f$ функциясынын туундусуна жана анын аныкталуу областынын каалаган $x_0$ чекитине пайдалансак, бул схема төмөнкүдөй болууга тийиш.





1) $f$ функциясын берген формуланын жардамы менен $x_0$ чекитинде анын өсүндүсүн табабыз:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *айырмалуу катышы* үчүн

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

туюнтмасын түзөбүз, анан жөнөкөйлөтүү, $\Delta x$ ке кыскартуу ж.б. өзгөртүп түзүүлөрүн жүргүзөбүз.

3) Эгерде $\Delta x$ нөлгө умтулат деп эсептесек, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ кандай санга умтуларын тактайбыз.

Мына ушинтип табылган сан, кээде (физикага окшоштурулуп) *$f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги өзгөрүү ылдамдыгы же $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусу* (бул көбүрөөк кабыл алынган) деп аталат.

Аныктама. $\Delta x$ **нөлгө умтулганда**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

**айырмалуу катышы умтула турган сан $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусу деп аталат.**

$f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусу $f'(x_0)$ деп белгиленет («$x_0$ дөн эф штрих» деп окулат).

○ 1-мисал. $f(x)=x^3$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусун табабыз.

Жогорудагы схема боюнча аракеттенебиз.

1) $\Delta f=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\quad(\Delta x\neq 0)$.

3) Эми $3x_0^2$ кошулуучусунун турактуу экендигин белгилейбиз, ал эми $\Delta x\to 0$ учурда, $3x\Delta x\to 0$ жана $(\Delta x)^2\to 0$ умтулары түшүнүктүү, демек, $3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\to 0$ экендигин алабыз. Натыйжада

$$f'(x_0)=3x_0^2$$

2-мисал. $f(x)=kx+b$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусун ($k$ жана $b$ турактуу) табабыз.

1) $\Delta f = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$.

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k$.

3) $k$ — турактуу, $\Delta x$ кандай гана болбосун $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ турактуу болгондуктан, $\Delta x \to 0$ да $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to k$.

Мына ушинтип, $(kx + b)' = k$. ●

$x_0$ чекитинде туундуга ээ болгон функцияны, ошол чекитте *дифференцирленүүчү* деп айтабыз. $f$ функциясы дифференцирленүүчү чекиттердин көптүгү $D_1$ болсун. Ар бир $(x \in D_1)$ $x$ ке $f'(x)$ санын туура келтирип, аныкталуу областы $D_1$ болгон жаңы функцияны алабыз. Бул функция $y = f(x)$ функциясынын туундусу деп аталат жана $f'$ же $y'$ деп белгиленет. Берилген $f$ функциясынын туундусун табууну аны дифференцирлөө деп айтабыз.

Биз бул пунктта дифференцирлөөнүн төмөнкү формулаларын алдык:

$$(x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,\ (kx + b)' = k.$$

$(kx + b)' = k$ формуласында, $k = 0$, $b = C$, мында $C$ каалаган турактуу деп эсептеп, $C' = 0$ экендигин, б.а. турактуунун туундусунун нөлгө барабар экендигин алабыз.

### *Көнүгүүлөр*

**188.** а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x_0 = 3$, $x_0 = 2$, $x_0 = -1$;

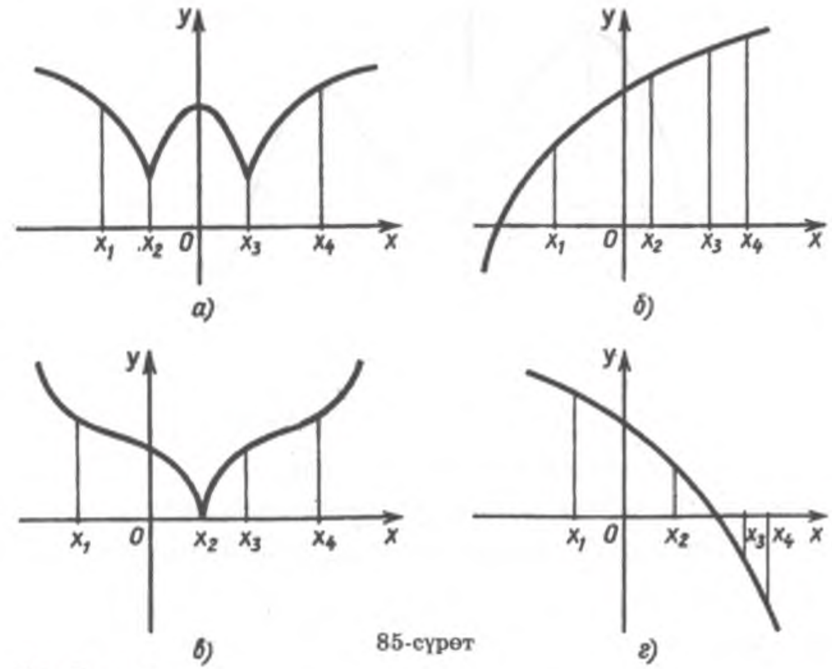
б) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$

болсо, $f$ функциясынын графигин түзгүлө жана анын абсциссасы $x_0$ болгон чекитине жаныма жүргүзгүлө. Сүрөттү пайдаланып, бул жаныманын бурчтук коэффициентинин белгисин аныктагыла.

**189.** Функциянын графигинин (85-сүрөт) абсциссалары $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ болгон чекиттер аркылуу жүргүзүлгөн жанымасынын (эгерде алар бар болушса) бурчтук коэффициентинин белгисин аныктагыла. Бул жаныма абсциссалар огу менен кандай (тар же кең) бурч түзөт? Мындай чекиттердин аймагында функциянын графиги «жылма» ийри болобу?

**190.** Функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын жазгыла (86-сүрөт). Графикте белгиленген чекиттердин ар бириндеги жаныманын бурчтук коэффициентинин белгисин аныктагыла.






85-сүрөт

**191.** Эгерде:

а) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x$ саны 0,5ке; 0,1ге, 0,01ге барабар;

б) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x$ саны 0,5ке; 0,1ге, 0,01ге барабар болсо, $x_0$ чекитинде $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ти эсептегиле.

**192.** Эгерде:

а) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 8x_0 + 4\Delta x$, $x_0$ саны 2ге; $-1$ ге барабар;

б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$, $x_0$ саны 1ге; $-2$1ге барабар;

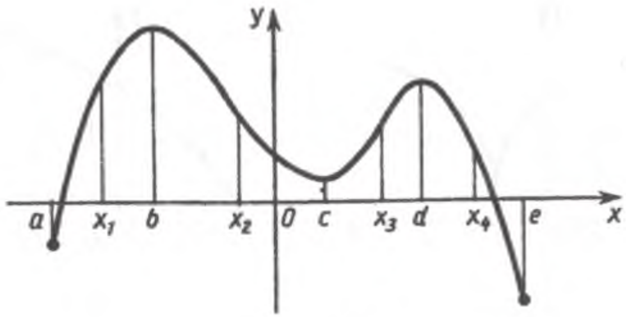
в) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0 - 2\Delta x$, $x_0$ саны 4кө барабар; 1ге барабар;

г) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -2x_0 + \Delta x$, $x_0$ саны 1ге; 2ге барабар болсо, $\Delta x \to 0$ учурда, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ катышы кандай санга умтулат?

**193.** Эгерде:

а) $f(x) = x^3$, $x_0$ саны 2ге; 1,5ке барабар;

б) $f(x) = 4 - 2x$, $x_0$ саны 0,5ке, $-3$кө барабар;




86-сүрөт

в) $f(x) = 3x - 2$, $x_0$ саны 5ке, −2ге барабар;

г) $f(x) = x^2$, $x_0$ саны 2,5ке; −1ге барабар

болсо, 13-пунктта алынган дифференцирлөө формулаларын пайдаланып, $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

---

**194.** Эгерде:

а) −1; 2 чекиттеринде $f(x) = x^2 - 3x$;

б) 0; 1 чекиттеринде $f(x) = 2x^3$;

в) −2; 1 чекиттеринде $f(x) = \frac{1}{x}$;

г) 3; 0 чекиттеринде $f(x) = 4 - x^2$

болсо, туундунун аныктамасын пайдаланып, $f$ функциясынын туундусун тапкыла.

**195.** Эгерде:

а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = 0$; г) $x_0 = 2$

болсо, $f(x) = x^2$ функциясынын графигинин, абсциссасы $x_0$ болгон чекити аркылуу өтүүчү жанымасынын теңдемесин тапкыла.

**196.** Эгерде:

а) $x(t) = -t^2 + 8t$, $t_0 = 6$; б) $x(t) = 3t^3 + 2$, $t_0 = 2$;

в) $x(t) = \frac{t^2}{4}$, $t_0 = 4$; г) $x(t) = 5t - 3$, $t_0 = 10$

болсо, аныктамадан пайдаланып, $x(t)$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин кирпик какканча болгон ылдамдыгын, $t_0$ моментинде тапкыла.





## 14. Функциянын үзгүлтүксүздүгү жана пределге өтүү жөнүндө түшүнүк

$t_0$ чекитиндеги кирпик какканча болгон ылдамдыкты аныктоо маселесине кайрылабыз (13-пункттагы (3) формуланы кара). $v_{орт.}(\Delta t) = v_0 - g\,t_0 - g \cdot \frac{\Delta t}{2}$ функциясы $\Delta t = 0$ болгондо аныкталган эмес. Бирок, $|\Delta t|$ кичирейгенде, $v_{орт.}(\Delta t) - L$ айырмасы, мында $L = v_0 - g\,t_0$ нөлгө жакындайт. Дал ошондуктан $\Delta t \to 0$ учурда, $v_{орт.}(\Delta t) \to v_0 - g\,t_0$ деп жазган болчубуз.

Жалпысынан, $x$ эгерде $x_0$ гө умтулганда $f(x) - L$ айырмасы жетишерлик кичине болсо, *$f$ функциясы $L$ санына умтулат* деп айтышат, б. а. $|\Delta x|$ кичирейгенде, $|f(x) - L|$ айырмасы, ар кандай берилген $h > 0$ санынан кичине болсо, мында $\Delta x = x - x_0$, *$f$ функциясы $L$ санына умтулат* деп айтабыз. (Кирпик каккычактагы ылдамдыкты аныктоо маселесиндеги сыяктуу эле, $x = x_0$ мааниси каралбайт.)

Албетте, $x \to x_0$ дун ордуна $\Delta x \to 0$ деп жазууга болот.

$f$ функциясы боюнча $L$ санын табууну *пределге өтүү* деп аташат. Силер, пределге өтүүнүн төмөнкү негизги эки учуру менен иштейсиңер.

Биринчи учур — бул $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ айырмалуу катышта пределге өтүү, б.а. туундуну табуу. Бул учур менен силер мурунку пунктта тааныштыңар.

Экинчи учур, функциянын үзгүлтүксүздүк түшүнүгү менен байланышкан. Эгерде $x \to x_0$ учурда, $f(x) \to f(x_0)$ болсо, анда функцияны $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз деп аташат. Мында $f(x) - L = f(x) - f(x_0) = \Delta f$ болгондуктан $|\Delta x|$ кичине болгондо, $|\Delta f|$ тин кичине болорун алабыз, б.а. $x_0$ чекитиндеги аргументтин кичине өзгөрүшүнө функциянын маанилеринин да кичине өзгөрүшү туура келет. Силерге белгилүү элементардык функциялардын бардыгы, өзүлөрүнүн аныкталуу областтарынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз. Мындай функциялардын графиги, аныкталуу областына толук камтылган ар бир аралыкта, үзгүлтүксүз ийрилер менен сүрөттөлүшөт. Силер дайыма пайдаланып жүргөн, функциянын графигин «чекиттер» боюнча түзүү ыкмасы, мына ушуга негизделген. Бирок, тагыраак айтсак, каралып жаткан функциянын, чындыгында эле үзгүлтүксүз экендигин алдын ала тактоо керек. Жөнөкөй учурларда, мындай изилдөө, үзгүлтүксүздүктүн аныктамасынын негизинде жүргүзүлөт.

○ 1 - м и с а л. $f(x) = kx + b$ сызыктуу функциясы сан түз сызыгынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болорун далилдейбиз.

$|\Delta x|$ кичине болгондо, $|\Delta f|$ ар кандай берилген $h > 0$ санынан кичине болорун көрсөтүү керек. Бирок, $k \neq 0$ болгондо ($k = 0$ болгондо каалаган $\Delta x$ ти алууга болот), $|\Delta x| < \frac{h}{|k|}$ деп алсак,

$$|\Delta f| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = |(k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b)| = |k||\Delta x|$$

жана $|\Delta f|$ болсо, $h > 0$ дөн кичине болот.

2 - м и с а л. $f(x) = \sqrt{x}$ функциясы $x_0 > 0$ болгондо, $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин далилдейбиз.

Адегенде $\Delta x$ ти $|\Delta x| \le x_0$ болгондой кылып тандап алабыз; анда $\sqrt{x} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$ аныкталат. $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ айырмасын баамдайбыз:

$$|\Delta f| = \left|\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\right| < \frac{|\Delta x|}{\sqrt{x_0}}.$$

Эгерде $|\Delta x|$ ти $\sqrt{x_0}h$ тан кичине кылып алсак (жана жогоруда белгиленген сыяктуу $x_0$ дөн кичине кылып алсак), $|\Delta f|$ тин $h > 0$ дөн кичине болорун көрүү жеңил. ●

▽ Кирпик каккычактагы ылдамдыкты аныктоо маселесинде, $v_{кирп.как.}(t_0)$ саны, нөлдө $v_{кирп.как.}$ саны менен «толукталган» $v_{орт.}(\Delta t)$ функциясы, бул чекитте үзгүлтүксүз болгондой кылып табылган эле. Ушул эле абал, жаныманын бурчтук коэффициентин аныктоо маселесинде да бар:

эгерде $g(0) = 2x_0$ деп эсептесек, $g(\Delta x) = 2x_0 + \Delta x$ функциясы бул чекитте үзгүлтүксүз болуп калат. ▲

Мурунку пункттагы мисалдардан, пределге өтүү — жаңы амалы белгисиз чоңдуктарды табуу үчүн жаңы каражат болуп кызмат кыларын көрөбүз. Бул амалды, биз ушул главада кеңен колдонобуз. Математикалык анализдин курстарында далилденүүчү, пределге өтүү эрежелерин бөлүп көрсөтөбүз.

1 - э р е ж е. *Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $\Delta x \to 0$ учурда, $\Delta f \to 0$.*

2 - э р е ж е. *Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде туундуга ээ болсо, анда $\Delta x \to 0$ учурда, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$.*





1-жана 2-эрежелер, $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү жана $x_0$ чекитиндеги туундусу жөнүндөгү аныктамалардан дароо эле келип чыгышат.

3 - э р е ж е. *$x \to x_0$ учурда, $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ болсун. Анда $x \to x_0$ (б.а. $\Delta x \to 0$ учурда):*

а) $f(x) + g(x) \to A + B$;

б) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ *учурда*).

$f$ жана $g$ үзгүлтүксүз функциялары үчүн

$$A = f(x_0),\ B = g(x_0)$$

болот жана бул эрежелер, $x_0$ чекитиндеги үзгүлтүксүз функциялардын суммасы, көбөйтүндүсү жана катышы (катышы үчүн $g(x_0) \neq 0$), $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз болот дегенди билдирет.

Пределге өтүү эрежелери, функциянын үзгүлтүксүздүгүн далилдөөдө жана дифференцирлөөнүн формулаларын чыгарууда кеңири колдонулат.

○ 3 - м и с а л. $h(x) = 10x + \sqrt{x}$ функциясы $(0; \infty)$ аралыгынын ар кандай $x$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин далилдейбиз.

$f(x) = 10x$ жана $g(x) = \sqrt{x}$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү 1- жана 2-мисалдарда далилденген. Натыйжада эки үзгүлтүксүз функциянын суммасы катарында $h$ функциясы үзгүлтүксүз болот (3-*а*, эреже).

4-м и с а л. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ экендигин далилдейбиз, мында $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Каалагандай $x_0$ чекити үчүн $\Delta f = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}}$ (2-мисалды кара).

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}}$.

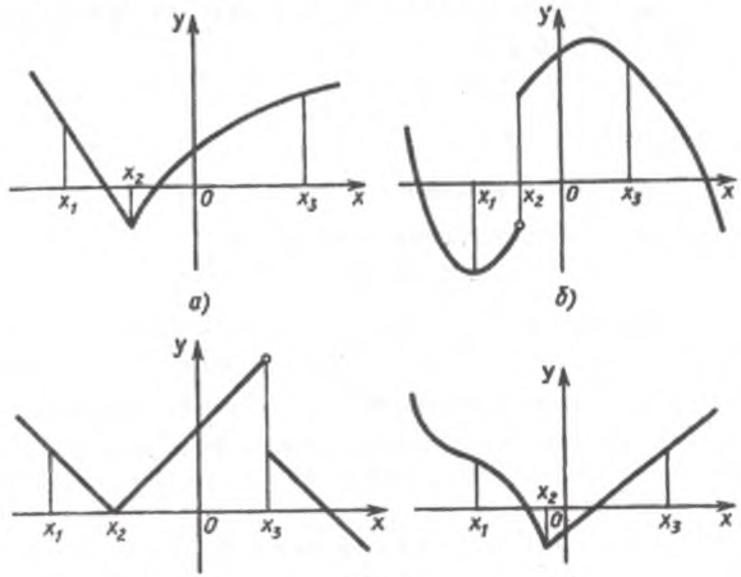
3) $\Delta x \to 0$ болгондо 1-эреже боюнча $\sqrt{x_0 + \Delta x} \to \sqrt{x_0}$ болот, анткени $\sqrt{x}$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз (2-мисал), ошондуктан $\Delta x \to 0$ болгондо (3, а-эреже боюнча) $\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x} \to 2\sqrt{x_0}$

жана $\Delta x \to 0$ болгондо $\frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \Delta x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (3, в-эреже боюнча)

Мына ушинтип, ар кандай оң $x$ үчүн $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ●

### *Көнүгүүлөр*

**197.** Графиги 87-сүрөттө чийилген функция $x_1$, $x_2$, $x_3$ чекиттеринин ар биреөндө үзгүлтүксүз болобу?




в) 87-сүрөт г)

**198.** а) $f(x)=\begin{cases} x-1,\ x\le -1 & \text{болгондо,}\\ 1-x^2,\ x>-1 & \text{болгондо;}\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 4,\ x<0 & \text{болгондо,}\\ 4-x^2,\ x\ge 0 & \text{болгондо;}\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 2-x,\ x\le 1 & \text{болгондо,}\\ 2x-1,\ x>1 & \text{болгондо;}\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x<1 & \text{болгондо,}\\ \dfrac{1}{x},\ x\ge 1 & \text{болгондо}\end{cases}$

$f$ функциясынын графигин түзгүлө. Бул функциянын аныкталуу областында функция үзгүлтүксүз болбой турган чекиттер барбы?

**199.** а) $f(x)=x^3-4x$, $(-\infty;\ \infty)$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, $[2;\ \infty)$;

в) $f(x)=x^2+2x-1$, $[-10;\ 20)$; г) $f(x)=5x-\sqrt{x}$, $(0;\ \infty)$

болсо, берилген аралыктардын ар бир чекитинде $f$ функциясы үзгүлтүксүз болобу?



**200.** Эгерде:

а) $f(x)=x^2-3x+4$, $x\to 0$, $x\to 2$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\to 1$, $x\to 4$;

в) $f(x)=4-\dfrac{x}{2}$, $x\to -2$, $x\to 0$;

г) $f(x)=4x-\dfrac{x^2}{4}$, $x\to -1$, $x\to 4$

болсо, $f$ функциясы кандай санга умтулат?

**201.** $x\to 3$кө умтулганда, $f(x)\to 1$, $g(x)\to -2$ ге умтулары белгилүү. $x\to 3$ да төмөнкү функциялар кандай санга умтулат:

а) $3f(x)\ g(x)$; б) $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$;

в) $4f(x)-g(x)$; г) $(3-g(x))\ f(x)$?

**202.** $x\to -1$ге умтулганда, $f(x)\to 3$, $g(x)\to -0{,}5$ ке умтулары белгилүү. $x\to -1$да төмөнкү функциялар умтула турган санды тапкыла:

а) $\dfrac{f(x)}{(g(x))^2}$; б) $(f(x)-g(x))^2$;

в) $(f(x))^2+2g(x)$; г) $\dfrac{(g(x))^2}{f(x)-2}$.

---

**203.** Төмөнкү функциялар кандай сандарга умтулушат:

а) $x\to 4$ да, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x-3}$;

б) $x\to -1$ да, $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2-2x+7}$;

в) $x\to 2$ да, $f(x)=\dfrac{5-2x}{2+x}$;

г) $x\to -1$ да, $f(x)=\dfrac{x^3-9}{x+3}$?

**204.** Эгерде квадраттын жагы 0,01 дм тактык менен ченелсе, анын периметри кандай тактыкта табылган?

**205.** Туура үч бурчтуктун периметрин 0,03 дм тактык менен табуу үчүн, анын жагын кандай тактыкта ченөө керек?

**206.** Айлананын узундугун 0,06 дм ге чейинки тактыкта эсептөө үчүн, анын радиусун кандай тактыкта ченөө керек?

**207.** $x\to a$ да, $f(x)\to A$, $g(x)\to B$га умтулары белгилүү. Пределге өтүү эрежесин пайдаланып, төмөнкүлөрдү далилдегиле:

а) $Cf(x) \to C \cdot A$, мында C — турактуу;

б) $f(x) - g(x) \to A - B$;

в) $(f(x))^2 - (g(x))^2 \to A^2 - B^2$;

г) $(f(x))^n \to A^n$, мында $n \in Z$.

## 15. Туундуну эсептөөнүн эрежелери

**1. Дифференцирлөөнүн негизги эрежелери.** Туундуларды эсептөөнүн бир нече эрежесин чыгарабыз. Бул пунктта $u$ жана $v$ функцияларынын $x_0$ чекитиндеги маанилери жана туундулары, кыскачалатып максатында: $u(x_0) = u$, $v(x_0) = v$, $u'(x_0) = u'$, $v'(x_0) = v'$, деп белгиленет.

1-эреже. *Эгерде $u$ жана $v$ функциялары $x_0$ чекитинде дифференцирленишсе, анда алардын суммасы да ошол чекитте дифференцирленет жана*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Кыскача: *сумманын туундусу туундулардын суммасына барабар* деп айтылат.

1) Далилдөө үчүн, адегенде функциялардын суммасынын өсүндүсүн каралып жаткан чекитте эсептейбиз:

$$\Delta(u + v) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$

$$= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) $u$ жана $v$ функциялары $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү, б.а. $\Delta x \to 0$ да, $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$.

Анда $\Delta x \to 0$ да, $\frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} \to u' + v'$. (14-пункттагы пределге өтүүнүн 3, а-эрежесин кара), б.а. $(u + v)' = u' + v'$.

Лемма. *Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда ал ошол чекитте үзгүлтүксүз болот:*

$\Delta x \to 0$ да, $\Delta f \to 0$, б.а. $\Delta x \to 0$ да $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$.

Чындыгында, $\Delta x \to 0$ да, $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f(x_0) \cdot 0$, анткени,





$\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$. Мына ушинтип, $\Delta x \to 0$ да $\Delta f \to 0$, б.а. $\Delta x \to 0$ дифференцирленүүчү функциялар үчүн да

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0).$$

2-эреже. *Эгерде $u$ жана $v$ функциялары $x_0$ чекитинде дифференцирленишсе, анда алардын көбөйтүндүсү да ошол чекитте дифференцирленет жана*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

▽ 1) Адегенде көбөйтүндүнүн өсүндүсүн табабыз:

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)\, v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\, v(x_0) =$$

$$= (u(x_0) + \Delta u)\,(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)\, v(x_0) =$$

$$= u(x_0)\, v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)\, v(x_0) =$$

$$= \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) $u$ жана $v$ функциялары $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү болушкандыктан, $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$, $\Delta u \to 0$.

Ошондуктан $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \to u'v(x_0) + u(x_0)v' + 0 \cdot v' = u'v(x_0) + u(x_0)\, v'$.

б.а. $(uv)' = u'v + uv'$, талап кылынган далилденди. ▲

Натыйжа. *Эгерде $u$ функциясы $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү, ал эми $C$ — турактуу болсо, анда $Cu$ функциясы да ошол чекитте дифференцирленүүчү болот жана*

$$(Cu)' - Cu'.$$

Кыскача: *турактуу көбөйтүүчүнү туундунун белгисинин сыртына чыгарууга болот* деп айтылат.

Далилдөө үчүн 13-пункттан белгилүү болгон $C' = 0$ барабардыгын жана 2-эрежени пайдаланабыз:

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'.$$

3-эреже. *Эгерде $u$ жана $v$ функциялары $x_0$ чекитинде дифференцирленишсе жана $v$ функциясы бул чекитте нөлгө барабар болбосо, анда $\frac{u}{v}$ катышы да $x_0$ чекитинде дифференцирленет жана*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

▽ Адегенде $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ формуласын чыгарабыз.

1) $\frac{1}{v}$ функциясынын өсүндүсүн табабыз:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta x)}.$$

3) Мындан $\dfrac{\Delta(\frac{1}{v})}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta v)}$.

1) $\Delta x \to 0$ учурда $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$ ($x_0$ чекитинде $v$ дифференцирленүүчү болгондуктан), $\Delta v \to 0$ (далилденген лемма боюнча). Ошондуктан

$$\frac{\Delta(\frac{1}{v})}{\Delta x} \to \frac{-v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}, \text{ б.а. } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Эми функциялардын көбөйтүндүсүнүн туундусун табуу эрежелеринен пайдаланып, тийиндинин туундусун табабыз.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = (u \cdot \frac{1}{v})' = u' \cdot \frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

○ 1 - м и с а л. Функциялардын туундуларын табабыз:

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$;  б) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ болгондуктан, $(x^2 - \frac{1}{x})' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$;

б) $$\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3+1) - x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{2x(x^3+1) - x^2((x^3)'+1')}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}. \ ●$$

**2. Даражалуу функциянын туундусу.** $n$ — бирден чоң каалаган натуралдык сан болгон учурдагы, $x^n$ даражалуу функциясынын туундусун эсептөө формуласы мындай:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$





$x^2$ функциясынын туундусунун формуласы эбак эле белгилүү: $(x^2)' = 2x$.

Көбөйтүндүнү дифференцирлөө формуласынан пайдаланып төмөнкүнү алабыз:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2(x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2;$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Эми

$$(x^2)' = 2x^{2-1};\ (x^3)' = 3x^{3-1};\ (x^4)' = 4x^{4-1}$$

экендигин байкайбыз, б.а. $n$=2, 3 жана 4 үчүн (1) формула далилденди. Ушуга окшош эсептөөлөрдү улантып, (1) формуланын $n$=5, 6 ж.б. үчүн да туура экендигине ишенебиз.

▽ (1) формуласынын каалаган натуралдык $n > 4$ үчүн туура экендигин далилдейбиз.

(1) формула, $n = k$ болгондо туура деп болжолдойбуз, б.а.

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Анда (1) формула $n = k+1$ болгондо да туура экендигин көрсөтөбүз. Чындыгында,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k(x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k =$$
$$= kx^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Ошондуктан (1) формула $n = 4$ болгондо туура болгондуктан анын $n = 5$ болгондо да туура экендиги келип чыгат, анда ал $n = 6$ болгондо да туура, демек, $n = 7$ ж.б. каалаган натуралдык $n$ үчүн да туура болот (так далилдөөсү математикалык индукция методуна негизделген). ▲

Эгерде $n = 1$ же $n = 0$ болсо, анда $x \neq 0$ болгон учурда бул формула да туура. Чындыгында, $x \neq 0$ болгондо (1) формула боюнча

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1.$$

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0.$$

Бул болсо, мурунку пункттан белгилүү болгон $x$ жана 1 функцияларынын туундуларынын маанилери менен дал келет.

Акырында, $n$ — бүтүн терс сан болсун, анда $n$=$-m$, мында $m$ натуралдык сан. Тийиндини дифференцирлөө эрежесин жана натуралдык $m$ үчүн далилденген (1) формуланы пайдаланып, $x \neq 0$ болгондо

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} =$$
$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

экендигин алабыз.

Натыйжада мындай жыйынтык жасоого болот:

*Ар кандай бүтүн n жана ар кандай x үчүн* ($n \le 1$ *болгондо* $x \ne 0$)

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

○ 2 - м и с а л. а) $f(x) = x^{-5}$; б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$

функцияларынын туундуларын табабыз.

а) $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$;

б) $(3x^7 - \frac{5}{x^3})' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7x^6 - 5(-3)x^{-4} = 21x^6 + \frac{15}{x^4}$. ●

Даражалуу функциянын дифференцирленүүчүлүгүнөн жана туундуларды эсептөө эрежелеринен *бүтүн рационалдык функциялар (көп мүчөлөр) жана бөлчөктүү — рационалдык функциялар өзүлөрүнүн аныкталуу областтарынын ар бир чекитинде дифференцирленишет.*

### *Көнүгүүлөр*

208—211 функциялардын туундуларын тапкыла:

**208.** а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

**209.** а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

**210.** а) $y = \frac{1 + 2x}{3 - 5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x - 1}$;

в) $y = \frac{3x - 2}{5x + 8}$; г) $y = \frac{3 - 4x}{x^2}$.

**211.** а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

**212.** Берилген чекиттерде $f$ функциясынын туундусунун маанилерин эсептегиле:

а) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$;

б) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, $x = 0,01$, $x = 4$;

в) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $f(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$, $x = -3$, $x = 0$.





**213.** Эгерде:

а) $f(x) = 2x^2 - x$; б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 - 4$; г) $f(x) = 2x - 5x^2$

болсо, $f'(x) = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

**214.** Эгерде:

а) $f(x) = 4x - 3x^2$; б) $f(x) = x^3 + 1,5x^2$;

в) $f(x) = x^2 - 5x$; г) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

болсо, $f'(x) < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

---

**215.** Төмөнкү функциялардын туундуларын тапкыла:

а) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$; б) $f(x) = (\frac{3}{x} + x^2)(2 - \sqrt{x})$;

в) $f(x) = \frac{5 - x^6}{1 - x^3}$; г) $f(x) = \sqrt{x}\,(3x^5 - x)$.

**216.** Төмөнкү функциялардын туундусун нөлгө айландыруучу $x$ тин маанилерин тапкыла:

а) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$; б) $f(x) = 2x^4 - x^8$;

в) $f(x) = x^4 + 4x$; г) $f(x) = x^4 - 12x^2$.

**217.** Эгерде:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$; б) $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$;

в) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$; г) $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^3$

болсо, $f'(x) < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

**218.** Туундусу

а) $2x + 3$; б) $16x^3 - 0{,}4$; в) $8x - 2$; г) $9x^2 - \frac{1}{2}$

болгон, жок дегенде бир функцияны формула аркылуу жазгыла.

**219.** Эгерде:

а) $f_1(x)$ жана $f_2(x)$ функцияларынын ар биринин $x_0$ чекитинде туундусу жок болсо;

б) $f_1(x)$ функциясы $x_0$ чекитинде туундуга ээ болсо, ал эми $f_2(x)$ туундуга ээ эмес болсо, $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ функциясы $x_0$ чекитинде туундуга ээ болот деп айтуу туурабы?

## 16. Татаал функциянын туундусу

**1. Татаал функция.** Мисалдан баштайбыз.

○ 1 - м и с а л. $x$ тин берилген маанилери боюнча

$$z = h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

формуласы менен берилген $h$ функциясынын ага туура келүүчү $z$ тин маанисин табуу талап кылынсын.

Ал үчүн адегенде берилген $x$ боюнча

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

тын маанисин, андан кийин ошол $y$ боюнча

$$z = g(y) = \sqrt{y}$$

тин маанисин эсептөө керек.

Ошентип, $f$ функциясы $x$ ти $y$ ке, ал эми $g$ функциясы $y$ ти $z$ ке туура келтирет. $h$ функциясы $g$ жана $f$ функцияларынан түзүлгөн *татаал функция* деп айтылат жана төмөнкүчө жазылат:

$$h(x) = g(f(x)).$$

Ар кандай $x$ чекитиндеги $h(x) = g(f(x))$ татаал функциянын маанисин эсептөө үчүн, адегенде «ички» $f$ функциясынын бул чекиттеги $y$ маанисин, андан кийин $g(y)$ ти эсептешет.

$g(f(x))$ татаал функциясынын аныкталуу областы кандай? Бул — $f(x)$ функциясы $g$ функциясынын аныкталуу областына кирсин үчүн $f$ функциясынын аныкталуу областынан алынган бардык $x$ тердин көптүгү болот.

Каралып жаткан мисалда $f$ тин аныкталуу областы бүткүл сан түз сызыгы болот. Эгерде $f(x)$ мааниси $g(y) = \sqrt{y}$ функциясынын аныкталуу областына тиешелүү болсо, $h(x)$ мааниси аныкталган болот. Ошондуктан $y \geq 0$ барабарсыздыгынын аткарылышы талап кылынат, б.а. $1 - x^2 \geq 0$, демек, $g(f(x))$ функциясынын аныкталуу областы $[-1; 1]$ кесиндиси болот. ●

**2. Татаал функциянын туундусунун формуласы.** Силер мурунку пункттарда рационалдуу функциянын, айрым учурда көп мүчөнүн туундусун табууну үйрөндүңөр. Бирок $f(x) = (2x + 3)^{100}$ функциясынын туундусун эсептөө маселеси, көп мүчөнүн туундусун табууга келтирилгени менен, эң чоң көлөмдөгү ишти аткарууну талап кылат: $(2x + 3)^{100}$ функциясын көп мүчө түрүндө жазуу жана алынган сумманын 101 кошулуучусун дифференцирлөө керек. Татаал функциянын туундусун эсептөө эрежесин далилдеп, бул жана башка маселелердин чыгарылышын бир кыйла жөнөкөйлөтүүгө болот.





*Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде туундуга ээ болсо, ал эми $g$ функциясы $y_0 = f(x_0)$ чекитинде туундуга ээ болсо, анда $h(x) = g(f(x))$ татаал функциясы дагы $x_0$ чекитинде туундуга ээ болот жана*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \qquad (1)$$

▽ (1) формуланы далилдөө үчүн (мурдагыдай эле), $\Delta x \neq 0$ учурда $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ бөлчөгүн карап, $\Delta x \to 0$ кезде $\frac{\Delta h}{\Delta x} \to g'(y_0)\, f'(x_0)$ экендигин белгилөө керек. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ белгилөөсүн киргизебиз. Анда

$$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) =$$

$$= g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \Delta g.$$

$\Delta x \to 0$ учурда $\Delta y \to 0$, анткени $x_0$ чекитинде $f$ функциясы дифференцирленет.

Мындан ары, далилдөөнү $x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагында $\Delta f \neq 0$ болгон $f$ функциялары үчүн гана жүргүзөбүз. Анда $\Delta x \to 0$ учурда

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(y_0) \cdot f'(x_0),$$

анткени $\Delta x \to 0$ учурда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, ал эми $\Delta y \to 0$, учурда $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y_0)$, бул $\Delta x \to 0$ учурда аткарылат (бул жөнүндө жогоруда айтылган).

○ 2-м и с а л. Жогоруда коюлган маселеге кайрылалы да, $h(x) = (2x + 3x)^{100}$ функциясынын туундусун табалы.

$h$ функциясын $h(x) = g(f(x))$ татаал функциясы түрүндө жазабыз, мында $g(y) = y^{100}$, $y = f(x) = 2x + 3$ болот. $f'(x) = 2$, $g'(y) = 100y^{99}$ болгондуктан,

$$h'(x) = 2 \cdot 100y^{99} = 200(2x + 3)^{99}.$$

3-м и с а л. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ функциясынын туундусун табабыз.

$h(x) = g(f(x))$, мында $y = f(x) = 3x^2 + 1$, $g(y) = \sqrt{y}$ болгондуктан $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ жана $y' = f'(x) = 6x$, мындан

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}. \bullet$$

***Көнүгүүлөр***

220—221 татаал $h(x) = g(f(x))$ функциясы $f$ жана $g$ элементардык функциялардан түзүлсө, ал функцияларды формула менен бергиле.

**220.** а) $h(x) = \cos 3x$; б) $h(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

в) $h(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $h(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$.

**221.** а) $h(x) = (3 - 5x)^5$; б) $h(x) = \sqrt{\cos x}$;

в) $h(x) = (2x + 1)^7$; г) $h(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

222—223 функциялардын ар биринин аныкталуу областын тапкыла.

**222.** а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$;

в) $y = \sqrt{0,25 - x^2}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{4x + 5 - x^2}}$.

**223.** а) $y = \sqrt{\cos x}$; б) $y = \frac{1}{\sin(x - \frac{\pi}{6})}$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \sqrt{\sin x}$.

224—225 функцияларынын туундуларын тапкыла.

**224.** а) $f(x) = (2x - 7)^8$; б) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^3}$;

в) $f(x) = (9x + 5)^4$; г) $f(x) = \frac{1}{(6x-1)^5}$.

**225.** а) $f(x) = (3 - \frac{x}{2})^{-9}$; б) $f(x) = (\frac{1}{4}x - 7)^8 - (1 - 2x)^4$;

в) $f(x) = (4 - 1,5x)^{10}$; г) $f(x) = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$.





**226.** Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; б) $y = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$;

в) $y = \sqrt{\sin x - 0,5}$; г) $y = \sqrt{\frac{1}{x}} + 1$.

**227.** $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = x^2$ жана $p(x) = \sin x$ функциялары берилген. Эгерде:

а) $h(x) = f(g(x))$; б) $h(x) = g(p(x))$;

в) $h(x) = g(f(x))$; г) $h(x) = p(f(x))$

болсо, $h$ татаал функциясын формула менен бергиле.

**228.** $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ жана $p(x) = \sqrt{x}$ функциялары берилген. Эгерде:

а) $h(x) = f(g(x))$; б) $h(x) = f(p(x))$;

в) $h(x) = p(g(x))$; г) $h(x) = p(f(x))$

болсо, $h$ татаал функциясын формула менен бергиле; анын аныкталуу областын тапкыла.

**229.** а) $g(x) = 2x$; б) $g(x) = \sqrt{x}$;

в) $g(x) = 3x + 2$; г) $g(x) = x^2 + 1$, $x \le 0$

болсо, $f(g(x)) = x$ боло турган $f$ функциясын тапкыла.

**230.** а) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$; б) $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}$;

в) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$; г) $f(x) = (3 - x^3)^5 + \sqrt{2x - 7}$

болсо, функциянын туундусун тапкыла.

## 17. Тригонометриялык функциялардын туундулары

**1. Синустун туундусунун формуласы.** *Синус функциясы каалаган чекитте туундуга ээ болорун жана*

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (1)$$

экендигин далилдейбиз.

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ формуласын пайдаланып, төмөнкүнү табабыз:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}).$$

(1) формуланы чыгаруу үчүн,

а) $\Delta x \to 0$ учурда $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$;

б) $\Delta x \to 0$ учурда $\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \to \cos x_0$

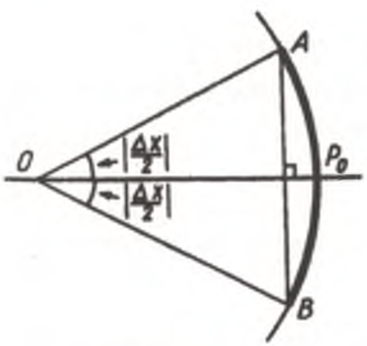
экендигин көрсөтүү жетиштүү.

Бул ырастоого таянып, (1) формуланы алабыз. Чындыгында, $\Delta x \to 0$ учурда

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

▽ Биз жогоруда таянган а) жана б) пункттарындагы ырастоолор геометриялык айкын мааниге ээ.

а) Бирдик айланага $P_0$ чекитинен оңго жана солго карай узундугу $\frac{|\Delta x|}{2}$ болгон $P_0A$ жана $P_0B$ жааларын ченеп коёбуз (88-сүрөт). Анда $AB$ жаасынын узундугу $|\Delta x|$ ке, ал эми $AB$ хордасынын узундугу $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$ ге барабар. $|\Delta x|$ жетишээрлик кичине болгондо, $AB$ хордасынын узундугу менен, ал керип турган $AB$ жаасынын узундугунун айырмасы жокко эсе болот. (Геометрия курсунда айлананын узундугунун формуласын чыгарууда бул фактыдан силер пайдаланган элеңер. Чындыгында, $n$ дин чоң маанилеринде $P_n \approx C$ жакындаштырылган барабардыгынын туура экендиги белгилүү, мында $P_n$ — ичтен сызылган туура $n$ — бурчтуктун периметри, $C$ — айлананын узундугу. Демек, мындай көп бурчтуктун жактарынын узундугу болжол менен ал жак керип турган жаанын узундугуна барабар.) Натыйжада, $x \to 0$ учурда



88-сүрөт

$$\frac{AB}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|} = \left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right| \to 1.$$





б) $AB$ хордасынын узундугу $AB$ жаасынын узундугунан кичине экендигин байкайбыз, б.а. $2\sin\frac{|\Delta x|}{2} < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}$.

Косинустардын айырмасынын формуласын жана ушул барабарсыздыкты пайдаланып, төмөндөгүнү табабыз:

$$\left|\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - \cos x_0\right| = \left|-2\sin\frac{\Delta x}{4}\sin(x_0 + \frac{\Delta x}{4})\right| \le \left|2\sin\frac{\Delta x}{4}\right| \le \frac{\Delta x}{2}.$$

Бирок, $\Delta x \to 0$ учурда $\frac{|\Delta x|}{2} \to 0$. Ошондуктан $\Delta x \to 0$ учурда,

$$\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \to \cos x_0. \ ▲$$

○ **М и с а л.** Татаал функцияны дифференцирлөө формуласы боюнча

$$(\sin(ax + b))' = a\cos(ax + b). \ ●$$

**2. Косинусту, тангенсти жана котангенсти дифференцирлөө формулалары.** $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ *функциялары, өзүлөрүнүн аныкталуу областтарынын ар бир чекитинде туундуга ээ боло тургандыгын жана*

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{3}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{4}$$

формулаларынын тууралыгын далилдейбиз.

(2) формуланын чыгарылышы $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ барабардыктарына жана төмөнкү татаал функциянын дифференцирлөө эрежесине негизделген:

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = -\sin x.$$

(3) жана (4) формулаларынын тууралыгын далилдөө үчүн тийиндинин туундусун табуу формуласын жана синустун, косинустун туундуларынын чыгарган формулаларын пайдаланабыз:

$$(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

*Көнүгүүлөр*

231—233 функцияларынын ар биринин туундусун тапкыла.

**231.** а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$;
в) $y = -0{,}5\sin x$; г) $y = 0{,}5 + 1{,}5\sin x$.

**232.** а) $y = 3\cos x$; б) $y = x + 2\cos x$;
в) $y = 1 - \cos x$; г) $y = 2\sin x + 1{,}5\cos x$.

**233.** а) $y = \sqrt{3} - 3\operatorname{tg} x$; б) $y = \cos x - \operatorname{tg} x$;
в) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; г) $y = 2\operatorname{tg} x - \sin x$.

**234.** Эгерде:
а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi)$; б) $f(x) = x - \operatorname{tg}(-2x)$;
в) $f(x) = 3\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2})$; г) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$
болсо, $f'(0)$ жана $f'(\pi)$ ни тапкыла.

**235.** Эгерде:
а) $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$; б) $f(x) = x - \operatorname{tg} x$;
в) $f(x) = 2\sin x - 1$; г) $f(x) = x - \cos x$
болсо, $f'(x) = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

---

236—238 функцияларынын ар биринин туундусун тапкыла.

**236.** а) $f(x) = x^3\sin 2x$; б) $f(x) = x^4 + \operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$; г) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

**237.** а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
в) $f(x) = \cos^2 x$; г) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

**238.** а) $f(x) = \cos 2x\sin x + \sin 2x\cos x$;
б) $f(x) = \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}$;
в) $f(x) = \sin 5x\sin 3x + \cos 5x\cos 3x$;
г) $f(x) = \sin 3x\cos 3x$.

**239.** Эгерде:
а) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}x$; б) $f(x) = 2x + \cos(4x - \pi)$;
в) $f(x) = \cos 2x$; г) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$
болсо, $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ болгон чекиттерди тапкыла.





**240.** Эгерде:
а) $f'(x) = 1 - \sin x$; б) $f'(x) = 2\cos 2x$;
в) $f'(x) = -\cos x$; г) $f'(x) = 3\sin x$
болсо, жок дегенде бир функцияны формула менен бергиле.

## § 5. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮКТҮН ЖАНА ТУУНДУНУН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

### 18. Үзгүлтүксүздүктүн колдонулушу

**1. Функциянын үзгүлтүксүздүгү.** Силер 14-пунктта функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүк түшүнүгү менен таанышкансыңар. Эгерде, $f$ функциясы $I$ аралыгынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болсо, аны *$I$ аралыгында үзгүлтүксүз* деп айтышат ($I$ аралыгын *$f$ функциясынын үзгүлтүксүздүк аралыгы* деп аташат). Бул аралыктын бир чекитинен ага жакын экинчи чекитине өткөндө функциянын мааниси аз өзгөрүлөт; $f$ функциясынын бул аралыктагы графиги үзгүлтүксүз сызык болот, аны «карандашты кагаздан ажыратпастан чийүүгө болот» деп айтышат. (Жок эле дегенде, мектеп курсунда окулуучу үзгүлтүксүз функциялар үчүн, иш мына ушундай.)

15-пунктта, $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз функциянын ошол чекитте үзгүлтүксүз болору көрсөтүлгөн. Бардык бөлчөктүү — рационалдык жана негизги тригонометриялык функциялар, өзүлөрүнүн аныкталуу областтарынын бардык чекиттеринде дифференцирленүүчү, натыйжада, бул функциялар ошол чекиттердин ар биринде үзгүлтүксүз.

Мисалы, $f(x) = x^2$ функциясынын бүткүл түз сызыгы, ал эми $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясынын $(-\infty; 0)$ жана $(0; \infty)$ аралыктарындагы дифференцирленүүчүлүгүнөн ал функциялардын, ошол тиешелүү аралыктардагы үзгүлтүксүздүгү келип чыгат.

Үзгүлтүксүз функциянын төмөнкү касиеттерин белгилейбиз:

*Эгерде $f$ функциясы $(a; b)$ аралыгында үзгүлтүксүз болуп, ал аралыкта нөлгө айланбаса, анда ал ошол интервалда белгисин туруктуу сактайт.* Бул ырастоонун көрсөтмөлүү интерпретациясы (түшүндүрмөсү) бар. $(a;b)$ интервалынын $x_1$ жана $x_2$ чекиттери $f(x_1) < 0$, ал эми $f(x_2) > 0$ аткарылгандай болуп табылышты дейли.

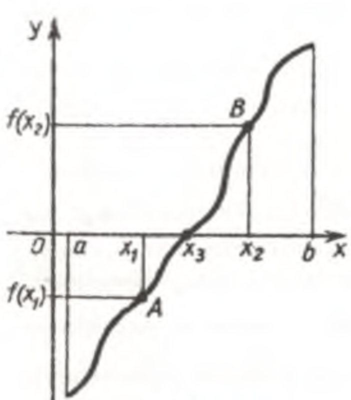
Анда $y = 0$ түз сызыгы менен ажыратылган $A(x_1; f(x_1))$ жана $B(x_2; f(x_2))$ чекиттерин бириктирүүчү үзгүлтүксүз ийри ($f$ функциясынын графиги), бул түз сызыкты берилген интервалдын кандайдыр бир $x_3$ чекитинде кесип өтөт (89-сүрөт), б.а. $f(x_3) = 0$. ($A$ жана $B$ чекиттерин $(a;b)$ интервалы аркылуу сүрөттөлгөн суунун ар түрдүү жээктеринде жайланышкан деп элестетели. Турист $A$ чекитинен $B$ чекитине баруу үчүн, сөзсүз, суунун кандайдыр бир жеринен өтүшү керек экендиги түшүнүктүү.) Бул шартка каршы келет: $f$ функциясы $(a;b)$ интервалында нөлгө айланбайт.

**2. Интервалдар методу (ыкмасы).** Бир өзгөрмөлүү барабарсыздыкты чыгаруу ыкмасы *(интервалдар методу)*, үзгүлтүксүз функциялардын ушул пунктта каралган касиеттерине негизделген (анын толук далилдөөсү математикалык анализ курсунда жүргүзүлөт). Аны баяндайбыз.

$f$ функциясы $I$ интервалында үзгүлтүксүз жана бул интервалдын чектүү сандагы чекиттеринде нөлгө айлансын дейли. Бул чекиттер аркылуу $I$ аралыгы, ар биринде $f$ турактуу белгисин сактай турган интервалдарга ажырайт. Бул белгини аныктоо үчүн, ар бир интервалдын кандайдыр бир чекитинде функциянын маанисин эсептөө жетиштүү.

О 1 - м и с а л. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ барабарсыздыгын чыгарабыз.

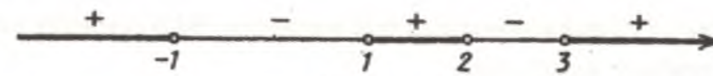
$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$ функциясы (бул бөлчөктүү — рационалдуу функция) өзүнүн аныкталуу областынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз, −1 жана 1 чекиттеринде нөлгө айланат. Бул функциянын аныкталуу областы — бөлүмүнүн нөлдөрүн кошпогондогу, б.а. 2 жана 3 чекиттерин кошпогондогу бүткүл сан түз сызыгы. Бул чекиттер жана −1,1 чекиттери $f$ тин аныкталуу областын беш аралыкка ажыратат (90-сүрөт). Ал аралыктардын ар биринде $f$ функциясы үзгүлтүксүз жана нөлгө айланбайт. Сүрөттөгү ар бир интервалда $f$ тин тиешелүү белгилери коюлган, аларды интервалдардын ички чекиттеринде функциянын маанилерин табуу аркылуу аныктайбыз. Берилген барабарсыздыкта ба-



89-сүрөт







90-сүрөт

рабардык белгиси да тургандыктан, −1 жана 1 чекиттери ($f$ функциясынын нөлдөрү) барабарсыздыктын чыгарылыштары болушат. Сүрөттү карап чыгып, жообун мындай жазууга болот: барабарсыздыктын чыгарылыштарынын көптүгү — бул $(-\infty; -1]$, $[1; 2)$ жана $(3; \infty)$ аралыктарынын биригүүсү.

2 - м и с а л. $x^3 + 2x - 2 = 0$ теңдемесинин тамырларынын бирин 0,1 ге чейинки тактык менен табабыз.

$f(x) = x^3 + 2x - 2$ функциясы үзгүлтүксүз, ошондуктан учтарында $f$ функциясы ар түрдүү белгидеги маанилерди алуучу, 0,2 узундуктагы кесиндини табуу жетиштүү. $f(1) = 1 > 0$, $f(0) = -2 < 0$ болору түшүнүктүү, ошондуктан теңдеменин тамыры бар жана ал $[0;1]$ кесиндисине тиешелүү болот. $f(0,6) = 0,6^3 + 2 \cdot 0,6 - 2 = -0,584 < 0$ жана $f(1) > 0$, демек, тамыр $[0,6;1]$ кесиндисинде жатат. Акырында, $f(0,8) = 0,112 > 0$, ал эми $f(0,6) < 0$ болгондуктан тамыр $[0,6; 0,8]$ кесиндисинде жайланышкан болот. Эми биз аны таба алабыз: 0,1ге чейинки тактык менен $x_0 \approx 0,7$. ●

**3. Үзгүлтүксүз эмес болуп эсептелген функциянын мисалы.** Ушуга чейин силер кездештирген функциялардын бардыгы, өзүлөрүнүн аныкталуу областтарынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болушту. Бирок, муну бардык эле функциялар үчүн туура деп эсептөөгө болбойт. Мисал келтиребиз. $f(x) = \{x\}$ функциясын карайбыз, мында, $x$ санынын бөлчөк бөлүгү $\{x\}$($f(x) = \{x\}$ тин графиги 91-а, сүрөттө чийилген) жана абсциссалар огунун ар кандай бүтүн сандуу чекитин, мисалы, $x = 2$ни алабыз.

$x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз функциянын негизги касиети ($\Delta x \to 0$ кезде, $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$) бул учурда аткарылбайт. Чындыгында эле, $\Delta x \to 0$ дейли. Эгерде $\Delta x > 0$ болсо, анда $\{x_0 + \Delta x\}$ нөлгө жакын болот. Эгерде $\Delta x < 0$ болсо, анда $\{x_0 + \Delta x\}$ тин маанилери 1ге жакын болушат. Ошол эле учурда, $f(x) = \{x\}$ функциясы $x = n$ ден башка, мында $n$ — бүтүн сан, чекиттердин бардыгында үзгүлтүксүз.

$f(x)=\{x\}$ функциясынын бул касиетин, 91-*а*, сүрөттү кароо менен түшүнүү жеңил эле.

**4. Берилген чекитте үзгүлтүксүз, бирок дифференцирленбей турган функциянын мисалы.** $f(x)=|x|$ функциясы мына ушундай функциянын мисалы боло алат. Бул функция нөл чекитинде үзгүлтүксүз, бирок дифференцирленбейт.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{эгерде } x\ge 0,\\ -x & \text{эгерде } x<0\end{cases}$$

экендигин эске салабыз.

$f(x)=|x|$ функциясы ар кандай чекитте (анын ичинде нөлдө да) үзгүлтүксүз экендиги ачык.

Бул функциянын графигин карайбыз. Ар кандай $x>0$ үчүн $x_0>0$ чекитинин кандайдыр бир аймагында бул функция $x$ ке барабар, мына ошондуктан мындай, чекиттерде анын туундусу $x'$ ке барабар, б.а. $x>0$ болгондо $|x|'=1$, $x<0$ болгондо $|x|=-x$ болгондуктан $x$ тин терс маанилеринде $|x|'=-1$. 0 чекитинде $f(x)=|x|$ функциясы туундуга ээ болбойт.

$\nabla$ Муну карама-каршы ыкма менен далилдейбиз. $f(x)=|x|$ функциясы нөлдө туундуга ээ болсун дейли, б.а. $\Delta x\to 0$ учурда $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ катышы кандайдыр бир $A$ санына умтулат дейли. Анда $|\Delta x|$ тин жетишерлик кичине маанилери үчүн $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ тин маанилери $A$ га жакын болушат, алсак, $\Delta x$ тин кичине маанилеринде $\left|\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}-A\right|<1$ барабарсыздыгы аткарылууга тийиш.

$\Delta x>0$ болгондо $|1-A|<1$ барабарсыздыгы аткарылат, мындан $-1<-1-A<1$, б.а.

$$0<A<2. \qquad (1)$$

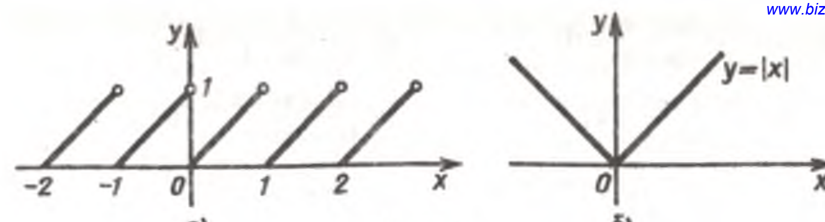
$\Delta x<0$ болгондо $|-1-A|<1$ барабарсыздыгы аткарылат, мындан $-1<-1-A<1$, б.а.

$$-2<A<0. \qquad (2)$$

(1) жана (2) барабарсыздыктары бири бирине карама-каршы. Демек, $f(x)=|x|$ функциясы нөлдө туундуга ээ болот деген божомолдообуз туура эмес. ▲








*а)* 91-сүрөт *б)*

Мына ушинтип, $|x|'=\begin{cases}1, & \text{эгерде } x>0,\\ \text{жок}, & \text{эгерде } x=0,\\ -1, & \text{эгерде } x<0 \text{ болсо.}\end{cases}$

### *Көнүгүүлөр*

**241.** Эгерде:

а) $f(x)=x^4-x+1$; б) $f(x)=\begin{cases}x\le 0 \text{ болгондо } x+1\\ x>-1 \text{ болгондо } x^2-x;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}x<0 \text{ болгондо } 1-x^2\\ x\ge 0 \text{ болгондо } 5-2x;\end{cases}$ г) $f(x)=2x-x^2-x^3$

болсо, $f$ функциясы $x_1=0$ жана $x_2=-1$ чекиттеринде үзгүлтүксүз болобу?

**242.** а) $f(x)=x^3-2x^2$; б) $f(x)=\frac{x^3+27}{3x+x^2}$;

в) $f(x)=2x^4-3x^2+4$; г) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}$

функцияларынын үзгүлтүксүздүк аралыктарын тапкыла.

**243.** а) $1{,}4-10x^2-x^3=0$; б) $1+2x^2-100x^4=0$;

в) $x^3-5x+3=0$; г) $x^4+2x-0{,}5=0$

ар бир теңдеменин $[0;1]$ кесиндисине тиешелүү тамыры бар экендигин далилдегиле жана аны 0,1 ге чейинки тактык менен тапкыла.

244—245-барабарсыздыктарды чыгаргыла.

**244.** а) $x^2-5x+4>0$; б) $\frac{x+3}{x^2+4x-5}\ge 0$;

в) $x^2-3x-4\le 0$; г) $\frac{x^2-7x+6}{x-2}<0$.

**245.** а) $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3} \ge 0$; б) $\frac{8}{x^2-6x+8} < 1$;

в) $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+4} \ge 1$; г) $\frac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)} < 0$.

**246.** а) $f(x)=\sqrt{x-\frac{4}{x-3}}$; б) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x^2-4}+1}$;

в) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{x}}$; г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{8}{x^2-1}}$

функцияларынын аныкталуу областтарын тапкыла.

---

**247.** Эгерде:

а) $f(x)=\begin{cases} 4-x, & \text{эгерде} \quad x<4, \\ (x-m)^2, & \text{эгерде} \quad x \ge 4; \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-m}$;

в) $f(x)=\begin{cases} 3x^2+m, & \text{эгерде} \quad x \le 0, \\ x+2, & \text{эгерде} \quad x>0; \end{cases}$ г) $f(x)=\frac{5-x}{x^4+m}$

болсо, $f$ функциясы $m$ дин кандай маанилеринде бүткүл сан түз сызыгында үзгүлтүксүз болот?

248—249-барабарсыздыктарды чыгаргыла:

**248.** а) $x^4-10x^2+9 \le 0$; б) $x^4-8 \ge 7x^2$;

в) $x^4-5x^2+6>0$; г) $5x^2-4>x^4$.

**249.** а) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8) \le 0$; б) $\sqrt{x^2-4}\,(x-3)<0$;

в) $x^2(3-x)(x+2)>0$; г) $\frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2} \ge 0$.

**250.** а) $f(x)=\sqrt{9x-x^3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}$;

в) $f(x)=\sqrt{16x-x^3}$; г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{27}{x^3}}$

функцияларынын аныкталуу областтарын тапкыла.

## 19. Функциянын графигине жаныма

**1. Жаныма.** Функциянын графигине жүргүзүлгөн жаныма түшүнүгү менен силер таанышсыңар. $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү $f$ функциясынын графиги $x_0$ го жакын жерлерде жаны-

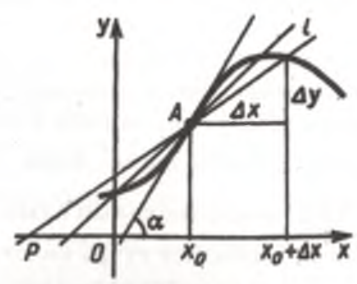




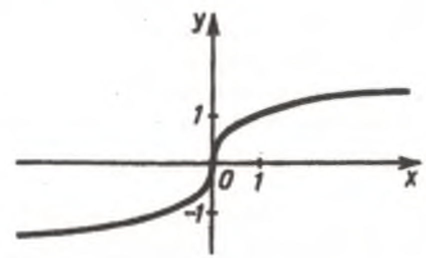
манын кесиндисинен дээрлик айырмаланбайт, демек, $(x_0;\ f(x_0))$ жана $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$ чекиттери аркылуу өтүүчү $l$ кесүүчүсүнүн кесиндисине да жакын. Мындай кесүүчүлөрдүн каалаганын карасак, ал $A(x_0;\ f(x_0))$ чекити аркылуу өтөт (92-сүрөт). $A$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыкты бир маанилүү берүү үчүн анын бурчтук коэффициентин көрсөтүү керек. Кесүүчүнүн $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ бурчтук коэффициенти $\Delta x \to 0$ учурда, $f'(x_0)$ санына умтулат (аны жаныманын бурчтук коэффициенти катары кабыл алабыз). $\Delta x \to 0$ *учурдагы кесүүчүнүн пределдик абалы жаныма* болору айтылат.

$\triangledown$ Эгерде $f'(x_0)$ жок болсо, анда же жаныма жок болот ((0;0) чекитиндеги $y=|x|$ функциясындагы сыяктуу, 91-*б*, сүрөт), же жаныма вертикалдуу $y=\sqrt[3]{x}$ функциясынын графигинин (0;0) чекитиндеги сыяктуу, 93-сүрөт). $\blacktriangle$

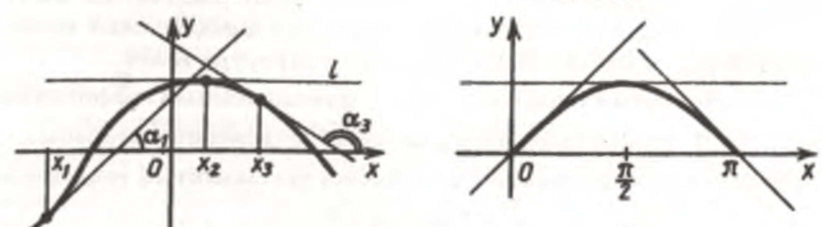
Мына ушинтип, $x_0$ чекитинде $f$ функциясынын туундуга ээ болушу, графиктин $(x_0;\ f(x_0))$ чекитинде вертикалдуу эмес жаныманын болушу менен эквиваленттүү, мында, *жаныманын бурчтук коэффициенти* $f'(x_0)$ го барабар. *Туундунун геометриялык мааниси* мына ушунда.




92-сүрөт




93-сүрөт




а) б)

94-сүрөт

***$x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү $f$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн жаныма деген — бул $(x_0; f(x_0))$ чекити аркылуу өтүүчү жана бурчтук коэффициенти $f'(x_0)$ болгон түз сызык.***

$f$ функциясынын графигинин $x_1$, $x_2$, $x_3$ чекиттерине жанымалар жүргүзөбүз (94-*а*, сүрөт) жана ал жанымалардын абсциссалар огу менен түзгөн бурчтарын белгилейбиз. (Бул бурч, октун оң багытынан түз сызыкка чейин оң багытта эсептелет.) $\alpha_1$ бурчу тар, $\alpha_3$ кең, ал эми $\alpha_2$ бурчу нөлгө барабар экендигин көрөбүз, анткени $l$ түз сызыгы $Ox$ огуна параллель. Тар бурчтун тангенси оң, кең бурчтун тангенси терс, $\operatorname{tg} 0 = 0$. Ошондуктан $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_3) = 0$.

Айрым чекиттерде жанымаларды түзүү, графиктердин эскиздерин тагыраак түзүүгө мүмкүнчүлүк берет. Мисалы, синус функциясынын графигинин эскизин түзүү үчүн, алдын ала $0; \frac{\pi}{2}$ жана $\pi$ чекитинде синустун туундусу 1; 0 жана −1ге барабар экендигин табабыз. $(0;0)$, $(\frac{\pi}{2};1)$ жана $(\pi;0)$ чекиттери аркылуу өтүүчү, бурчтук коэффициенттери 1; 0 жана −1 болгон түз сызыктарды түзөбүз (94-*б*, сүрөт). Бул түз сызыктар жана $Ox$ огунан түзүлгөн трапецияга, $x$ чоңдугу 0 гө, $\frac{\pi}{2}$ ге жана $\pi$ ге барабар болгондо, синустун графиги тиешелүү түз сызыктарды жаный турган кылып графикти ичтен сызуу гана калат.

Синустун графиги нөлдүн жетишээрлик чоң аймагында $y = x$ түз сызыгынан практикалык жактан айырмаланбай тургандыгын белгилейбиз. Мисалы, октор боюнча масштабдар, бир санына 1 см кесинди туура келгендей болуп тандалып алынды дейли. Анда,

$\sin 0{,}5 \approx 0{,}479425$, $|\sin 0{,}5 - 0{,}5| \approx 0{,}02$ жана тандалып алынган масштабда бул узундугу 0,2 мм болгон кесиндиге туура келет. Ошондуктан $y = \sin x$ функциясынын $(-0{,}5; 0{,}5)$ интервалындагы графиги $y = x$ түз сызыгынан (вертикаль багыт боюнча) 0,2 мм ге ашык эмес чоңдукка гана айырмаланат, бул болсо болжол менен жүргүзүлүүчү сызыктын энине (жоондугуна) туура келет.

**2. Жаныманын теңдемеси.** Эми $f$ функциясынын графигинин $A(x_0; f(x_0))$ чекитиндеги жанымасынын теңдемесин чыгарабыз.

Бурчтук коэффициенти $f'(x_0)$ болгон түз сызыктын теңдемеси

$$y = f'(x_0) \cdot x + b$$

түрүндө болот.



$b$ ны эсептөө үчүн, жаныманын $A$ чекити аркылуу өтө тургандыгынан пайдаланабыз:

$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, мындан $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, демек, жаныманын теңдемеси $y = f'(x_0)x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$ же

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

○ 1-мисал. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ функциясынын графигине абсциссасы 2 болгон чекиттеги жаныманын теңдемесин табабыз.

Бул мисалда $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$. Бул сандарды (1) теңдемесине коюп, жаныманын теңдемесин алабыз: $y = 1 + 4(x - 2)$, б.а. $y = 4x - 7$.

2-мисал. $y = x^2$ параболасынын абсциссасы $x_0$ болгон чекиттеги жаныманын теңдемесин чыгарабыз.

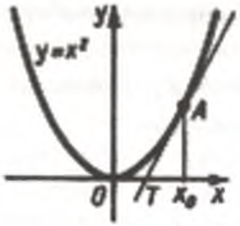
$y(x_0) = x_0^2$, ал эми $y'(x_0) = 2x_0$ экендигин алабыз.

Бул маанилерди жаныманын (1) теңдемесине коюп, $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$, б.а. $y = 2x_0x - x_0^2$ экендигин табабыз. Мисалы, $x_0 = 1$ болгондо, теңдемеси $y = 2x - 1$ болгон жаныманы алабыз.

Параболанын $A(x_0; x_0^2)$ чекитиндеги жаныма менен $Ox$ огунун кесилишкен чекити $T$ нын координаталарын табабыз (95-сүрөт). Эгерде $T$ чекитинин координаталары $(x_1; 0)$ болсо, анда $T$ жанымага тиешелүү болгондуктан (демек, анын координаталары жаныманын теңдемесин канааттандырат) $0 = 2x_0x_1 - x_0^2$ экендигин алабыз. Эгерде $x_0 \neq 0$ болсо, анда $x_1 = \frac{x_0}{2}$.

Алынган жыйынтык параболанын каалаган $A$ чекитине (чокусунан башкасы) жаныманы түзүүнүн жөнөкөй ыкмасын берет: $Ox$ огунун учтары 0 жана $x_0$ болгон кесиндисин тең бөлүүчү $T$ чекити менен $A$ чекитин бириктирүү жетиштүү; $AT$ түз сызыгы — изделген жаныма болот. $x_0 = 0$ кезиндеги жаныма — бул $Ox$ түз сызыгы. ●

**3. Лагранждын формуласы.** $f$ функциясынын графигинин, абсциссасы $(a;b)$ интервалынан алынган $c$ га барабар болгон чекитинде, $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ чекиттери аркылуу өтүүчү кесүүчүгө параллель болгон жаныманын бар болушун көрсөтмөлүү түшүндүрүү үчүн, туундунун геометриялык маанисин пайдаланабыз.




95-сүрөт

$f$ тин графигинин $[a;b]$ аралыгына туура келген бөлүгү менен жалпы чекити болбогон, $AB$ түз сызыгына параллель $l$ түз сызыгын карайбыз. Бул $l$ түз сызыгын $f$ графигин көздөй болгон багыт боюнча, $AB$ түз сызыгына параллель жылдырабыз. Ал түз сызыктын, графиктин бул бөлүгү менен жалпы чекити пайда болгон моменттеги $l_0$ абалын белгилейбиз. Мындай жалпы чекиттердин «биринчилеринин» каалаганы $l_0$ түз сызыгынын $f$ графиги менен жанышкан чекити болору 96-*а*, сүрөттөн көрүнүп турат. Бул чекиттин абсциссасын $c$ аркылуу белгилейбиз.

Анда $f'(c) = \mathrm{tg}\,\alpha$, мында $\alpha$ — бул $l_0$ түз сызыгы менен абсциссалар огунун арасындагы бурч. Бирок $l \| AB$, демек, $\alpha$ бурчу $AB$ кесүүчүсүнүн жантаюу бурчуна барабар, б.а.

$$f'(c) = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Мына ушинтип, эгерде функция дифференцирленүүчү болсо, анда $(a; b)$ интервалынан $c \in (a; b)$ чекити (96-*б*, сүрөт),

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

барабардыгы аткарылгандай болуп табылат.

Бул формула *Лагранждын формуласы* деп аталат.

### *Көнүгүүлөр*

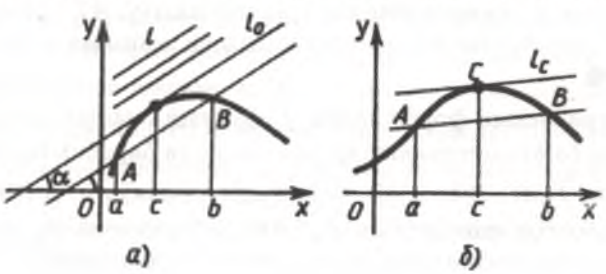
**251.** $f$ функциясынын графигинин кайсы чекиттеринде (97-сүрөт) анын жанымасы:

а) горизонталдуу;

б) абсциссалар огу менен тар бурч түзөт;

в) абсциссалар огу менен кең бурч түзөт?

**252.** Аргументтин кандай маанилеринде (абсциссалар огунда белгиленген) график менен берилген (98-сүрөт) функциянын туундусу: а) нөлгө барабар; б) нөлдөн чоң; в) нөлдөн кичине?






253—254-дөгү $f$ функциясынын графигинин берилген $M$ чекити аркылуу өтүүчү жанымасынын абсциссалар огу менен түзгөн бурчунун тангенсин тапкыла.

**253.** а) $f(x) = x^2$, $M(-3;\ 9)$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $M(2;\ \frac{2}{3})$;

в) $f(x) = x^3$, $M(-1;\ -1)$; г) $f(x) = x^2 + 2x$, $M(1;\ 3)$.

**254.** а) $f(x) = 2\cos x$, $M(\frac{\pi}{2};\ 0)$; б) $f(x) = -\mathrm{tg}\,x$, $M(\pi;\ 0)$;

в) $f(x) = 1 + \sin x$, $M(\pi;\ 1)$; г) $f(x) = -\cos x$, $M(-\pi;\ 1)$.

255—256-дагы $f$ функциясынын графигинин абсциссасы $x_0$ болгон чекиттеги жаныманын теңдемесин жазгыла.

**255.** а) $f(x) = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$;

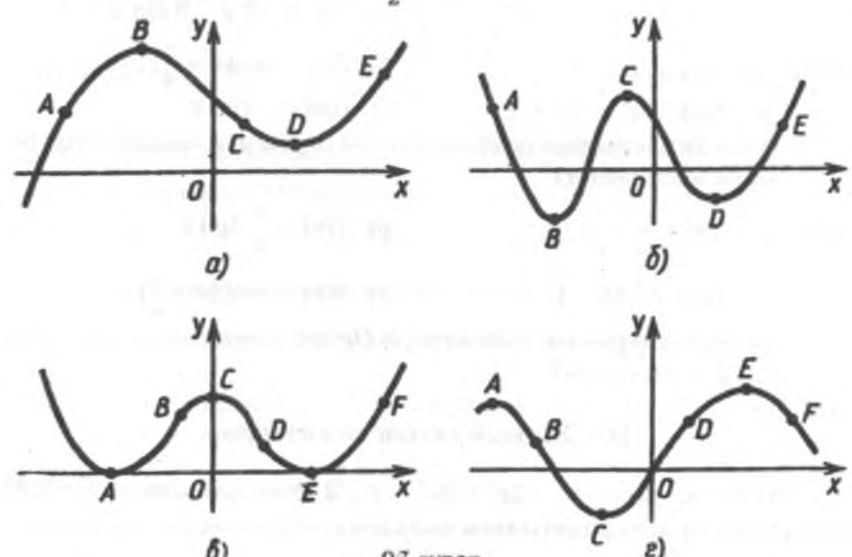
г) $f(x) = x^3 - 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.

**256.** а) $f(x) = 3\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$;

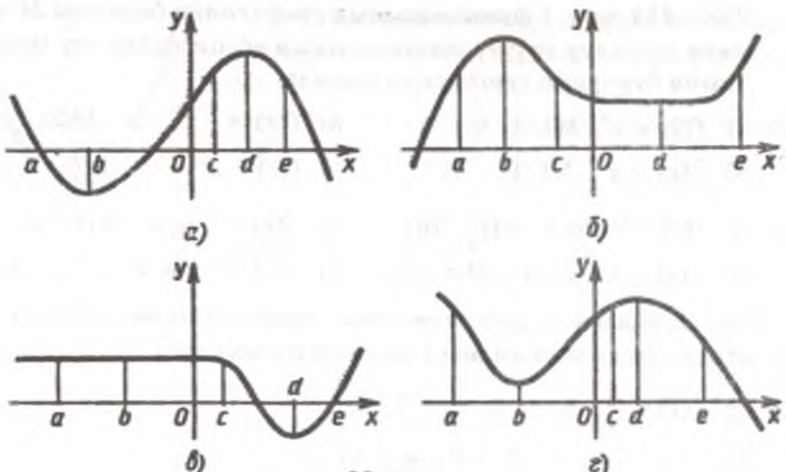
б) $f(x) = \mathrm{tg}\,x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = 1 + \cos x$, $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = -2\sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_0 = \pi$.




97-сүрөт




98-сүрөт

257—258-деги жанымалары абсциссалар огуна параллель болгон $f$ функцияларынын чекиттерин тапкыла.

**257.** а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$;

в) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$; г) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

**258.** а) $f(x) = 2\cos x + x$; б) $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\,x$;

в) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$; г) $f(x) = \sqrt{2}\,x - 2\sin x$.

**259.** а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; г) $f(x) = -\cos x$

функцияларынын графиктери $Ox$ огу менен кандай бурч боюнча кесилишет?

**260.** а) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,(x - \frac{\pi}{4})$;

в) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$; г) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

функцияларынын графиктери $Oy$ огу менен кандай бурч боюнча кесилишет?

## 20. Жакындатып эсептөөлөр

Мисалы, $f(x) = x^7 - 2x^6 + 3x^2 - x + 3$ функциясынын $x = 2{,}02$ чекитиндеги жакындатылган маанисин эсептөө талап кылынсын. $f$ функциясынын 2,02ге жакын $x_0 = 2$ чекитиндеги маанисин та-





буу оңой эле: $f(2) = 13$. 2 чекитинин аймагындагы $f$ тин графиги, абсциссасы 2 болгон чекиттеги жаныма — $y = f(x_0) + f'(x_0)\ldots(x- -x_0)$ түз сызыгына жакын. Ошондуктан $f(2{,}02) \approx y(2{,}02)$.

$f'(x) = 7x^6 - 12x^5 + 6x - 1$, $f'(x_0) = f'(2) = 75$ жана $f(x) \approx y(x) = 13 + 75\cdot 0{,}02 = 14{,}5$.

Калькулятордо эсептөө $f(2{,}02) \approx 14{,}57995$ жыйынтыгын берет.

Жалпысынан, $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү $f$ функциясы үчүн $\Delta x$ нөлдөн аз гана айырмаланганда, анын графиги жанымага (графиктин абсциссасы $x_0$ болгон чекитине жүргүзүлгөн) жакын, б.а. $\Delta x$ кичине болгондо

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (1)$$

Эгерде $x_0$ чекити $f(x_0)$ жана $f'(x_0)$ маанилери жеңил эле эсептеле турган болуп алынса, анда (1) формула $x$ тин $x_0$ гө жетишерлик жакын маанилеринде $f(x)$ тин жакындатылган маанилерин табууга мүмкүнчүлүк берет. Алсак, $\sqrt{4{,}08}$ тин маанисин эсептөөдө, $x_0$ үчүн 4тү алуу табигый иш, анткени 4,08 саны 4кө жакын жана $x_0 = 4$ кезинде $f(x_0) = \sqrt{x_0}$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ дү табуу кыйын деле эмес: $f(4) = \sqrt{4} = 2$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Анда (1) формула боюнча $\Delta x = 0{,}08$ кезинде төмөнкүнү алабыз: $\sqrt{4{,}08} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}08 = 2{,}02$.

○ **1 - м и с а л.** (1) формуладан

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \qquad (2)$$

жакындатылган формуласын чыгарабыз.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ жана $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ деп алабыз. Анда $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$ жана $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, мындан $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$. (1) формула боюнча $f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$.

Айрым учурда $\sqrt{1{,}06} = \sqrt{1+0{,}06} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}06 = 1{,}03$.

$\sqrt{4,08}$ дин маанисин да (2) формула боюнча табууга болот:

$$\sqrt{4,08} = 2\sqrt{1,02} \approx 2(1 + \frac{1}{2}\cdot 0,02) = 2,02.$$

2 - м и с а л. (1) формуладан

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \qquad (3)$$

жакындатылган формуланы чыгарабыз.

$f(x) = x^n$, $x_0 = 1$ жана $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ деп алабыз. Анда $f(x_0) = 1$, $f'(x) = nx^{n-1}$, мындан $f'(x_0) = n$. (1) формула боюнча

$$f(x) = (1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Мисалы, $1,001^{100} = (1+0,001)^{100} \approx 1 + 100\cdot 0,001 = 1,1.$

$1,001^{100}$нын калькулятордо эсептегендеги мааниси 1,10512 ге барабар.

3 - м и с а л. $\frac{1}{0,997^{30}}$ маанисин эсептөө үчүн $n = -30$, $\Delta x = -0,003$ деп эсептеп (3) формуланы пайдалануу ыңгайлуу:

$$\frac{1}{0,997^{30}} = (1-0,003)^{-30} \approx 1 + (-30)\cdot(-0,003) = 1 + 0,09 = 1,09. \bullet$$

Башка элементардык функциялардын, мисалы тригонометриялык функциялардын жакындатылган маанилерин эсептөө үчүн (1) формула көп колдонулат. Алсак, $\sin 1^\circ$ ту эсептөө үчүн $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ ушуну менен бирге $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ (анткени $1^\circ = \frac{\pi}{180}$) деп алуу ыңгайлуу. Төмөнкүгө ээ болобуз: $f(x_0) = \sin 0 = 0$, $f'(x_0) = \cos 0 = 1$ жана $\sin x \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 0 + 1\cdot\Delta x = \Delta x$,

б.а. $\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} \approx 0,017453$. $\sin 1^\circ$тун маанисин калькулятордо эсептеп $\sin 1^\circ \approx 0,0174525$ ти алабыз.

### *Көнүгүүлөр*

**261.** а) $f(x) = x^4 + 2x$, $x_1 = 2,016$, $x_2 = 0,97$;

б) $f(x) = x^5 - x^2$, $x_1 = 1,995$, $x_2 = 0,96$;

в) $f(x) = x^3 - x$, $x_1 = 3,02$, $x_2 = 0,92$;

г) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_1 = 5,04$, $x_2 = 1,98$





болсо, (1) формуласынын жардамы менен $f$ функциясынын жакындатылган маанилерин $x_1$ жана $x_2$ чекиттеринде эсептегиле.

262—263-лөрдө (1) жана (3) формулаларынын жардамы менен төмөнкүлөрдүн жакындатылган маанилерин эсептегиле.

**262.** а) $1,002^{100}$; б) $0,995^6$; в) $1,03^{200}$; г) $0,998^{20}$.

**263.** а) $\sqrt{1,004}$; б) $\sqrt{25,012}$; в) $\sqrt{0,997}$; г) $\sqrt{4,0016}$.

---

264—266-да (1) формуланын жардамы менен төмөнкүлөрдүн жакындатылган маанилерин эсептегиле.

**264.** а) $\operatorname{tg} 44^\circ$; б) $\cos 61^\circ$; в) $\sin 31^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 47^\circ$.

**265.** а) $\cos(\frac{\pi}{6} + 0,04)$; б) $\sin(\frac{\pi}{3} - 0,02)$;

в) $\sin(\frac{\pi}{6} + 0,03)$; г) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + 0,05)$.

**266.** а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; б) $\frac{1}{0,996^{40}}$; в) $\frac{1}{2,0016^3}$; г) $\frac{1}{0,994^5}$.

## 21. Туунду физикада жана техникада

**1. Туундунун механикалык мааниси.** Физика курсунда кыймылдын ылдамдыгы кандай аныкталгандыгын эске түшүрөбүз. Эң жөнөкөй учурду карайбыз: материялык чекит координаталык түз сызык боюнча кыймылдайт, бирок кыймылдын закону берилген, б.а. бул чекиттин $x$ координатасы $t$ убакыттын белгилүү $x(t)$ функциясы болот. Убакыттын $t_0$ дөн $t_0 + \Delta t$ га чейинки аралыгындагы чекиттин которулушу $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$ ке, ал эми анын орточо ылдамдыгы төмөнкүчө:

$$v_{\text{орт.}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1)$$

$\Delta t < 0$ болгондо да (1) формула туура: которулушу $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t) = -\Delta x$ ке барабар, ал эми убакыт аралыгынын узактыгы $-\Delta t$ га барабар.

Адатта, $\Delta t$ кичинекей болгондо орточо ылдамдыктын өзгөрүшү жокко эсе болгон кыймылдар да болот, б.а. тактыгы жогорку даражада болгон кыймылды бир калыпта деп эсептөөгө болот (13-пункттагы мисалды кара). Башка сөз менен, $\Delta t \to 0$ учурда орточо ылдамдыктын мааниси кандайдыр бир толук аныкталган мааниге умтулат жана ал материалдык чекиттин убакыттын $t_0$ моментиндеги $v(t_0)$ *кирпик каккычактагы ылдамдыгы* деп аталат. Ошентип,

$$\Delta t \to 0 \text{ учурда } v_{\text{орт}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to v(t_0).$$

Бирок туундунун аныктамасы боюнча

$$\Delta t \to 0 \text{ учурда } \frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t_0).$$

Ошондуктан, кирпик каккычактагы $v(t)$ ылдамдык, каалагандай дифференцирленүүчү $x(t)$ функциясы үчүн гана аныкталат деп эсептелет, мында

$$v(t) = x'(t). \tag{2}$$

Кыскача төмөнкүчө айтылат: *координатадан убакыт боюнча алынган туунду ылдамдык болот. Туундунун механикалык мааниси мына ушунда.*

Кирпик каккычактагы ылдамдык оң да, терс да маанилерди ала алат жана сөзсүз 0 маанисин да ала алат. Эгерде убакыттын кандайдыр бир $(t_1;\ t_2)$ аралыгында ылдамдык оң болсо, анда чекит оң багытта кыймылдайт, б.а. убакыттын өтүшү менен $x(t)$ координатасы өсөт, ал эми $v(t)$ терс болсо, анда $x(t)$ координатасы кемийт.

Кыймылдын ылдамдануусу менен болгон абал деле ушуга окшош. Чекиттин кыймылынын ылдамдыгы $t$ убакыттан функция болот. Ал эми бул функциянын туундусу кыймылдын ылдамдануусу деп аталат:

$$a = v'(t).$$

Кыскача төмөнкүдөй айтылат: *ылдамдыктын убакыт боюнча туундусу ылдамдануу болот.*

○ 1 - м и с а л. Материалдык чекиттин эркин түшүүнү карайбыз.

Эгерде координаталык түз сызыкты вертикаль төмөн багыттасак, ал эми материалдык чекиттин баштапкы абалы 0 менен дал келсе, анда физикадан белгилүү болгондой $x(t) = \frac{gt^2}{2}$ экендиги физикадан белгилүү. Анда убакыттын $t$ моментиндеги чекиттин түшүү ылдамдыгы

$$v = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$$

га барабар, ал эми ылдамдануусу $a = (gt)' = g$ турактуу чондук болот. Бир кыйла жалпы учурду карайбыз.



2 - м и с а л. Түз сызык боюнча кыймылдаган чекиттин координатасынын убакытка көз карандылыгы төмөнкү формула менен туюнтулсун дейли: $x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 t + x_0$, мында $a \neq 0, v_0$ жана $x_0$ — турактуулар. Кыймылдын ылдамдыгын жана ылдамдануусун табабыз.

Бул кыймылдын ылдамдыгы төмөнкүдөй:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0\right)' = 2 \cdot \frac{a}{2}t + v_0 = at + v_0.$$

Бизге кыймылдын ылдамдыгы убакыттан функция катары белгилүү болгондуктан, бул кыймылдын ылдамдануусун таба алабыз: $v'(t) = (at + v_0)' = a$. Мындан, кыймыл квадраттык закон боюнча болгондо анын ылдамдануусу турактуу жана $a$ га барабар болорун көрөбүз. Эгерде $a > 0$ болсо, анда биз бир калыпта ылдамдатылган кыймылды, ал эми $a < 0$ болсо, бир калыпта акырындатылган кыймылды алабыз. Ошондой эле, $v_0 = v(0)$, ал эми $x_0 = x(0)$ экендигин да белгилейбиз. ●

III главада, эгерде түз сызыктуу кыймылдын ылдамдануусу $a$ турактуу болсо, анда кыймыл квадраттык

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

закону боюнча болору далилденет, мында $v_0$ — чекиттин баштапкы ылдамдыгы, $x_0$ — баштапкы координатасы.

▽ $y = f(x)$ — каалагандай дифференцирленүүчү функция болсун дейли. Анда биз материалдык чекиттин $x = f(t)$ законуна ылайык, координаталык түз сызык боюнча болгон кыймылын карай алабыз. Туундунун механикалык мааниси дифференциалдык эсептөөлөрдүн теоремаларына көрсөтмөлүү интерпретация берүүгө мүмкүнчүлүк түзөт.

○ 3 - м и с а л. $f$ жана $h$ — дифференцирленүүчү функциялар болушсун. Түз сызык боюнча болгон төмөнкүдөй (салыштырмалуу) кыймылды карайбыз. Кыймылсыз координаталар системасына карата поезд менен байланышкан кыймылдуу координаталар системасы берилген. Кыймылдуу системанын башталышы (машинисттин кабинасы) кыймылсыз системанын башталышына (станцияга) салыштырмалуу $x_1 = f(t)$ закону боюнча кыймылдайт. Кыймылдуу координаталар системасында (поездде) материалдык чекит $x_2 = h(t)$ закону боюнча кыймылдайт. Анда бул чекиттин кыймылсыз координаталар системасына карата болгон $x$ координатасы $x = x_1 + x_2$ болот, ал эми анын ылдамдыгы $v(t) = x'(t)$ га барабар. Экинчи жагынан, ылдамдыктарды кошуу закону боюнча $v(t) = v_1(t) + v_2(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$. Ушинтип, туундунун механикалык маанисинин жардамы менен бизге белгилүү болгон төмөнкүдөй формуланы алдык:

$$(f + h)' = f' + h'.$$

4 - м и с а л. Материалдык чекит координаталык түз сызык боюнча $x = f(t)$ законуна ылайык кыймылдасын дейли.

Бул чекиттин $[a;\ b]$ аралыгындагы орточо ылдамдыгы төмөнкүгө барабар:

$$v_{\text{орт.}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$[a;\ b]$ аралыгындагы чекиттерде $v(t)$ кирпик каккычактагы ылдамдыгы дайыма эле орточо ылдамдыктан кичине (чоң) боло албайт. Демек, кандайдыр бир $t_0 \in [a;\ b]$ моментинде кирпик каккычактагы ылдамдык орточо ылдамдыкка барабар, б.а. $[a;\ b]$ аралыгында төмөнкү формула орун ала турган $t_0$ табылат:

$$v(t_0) = f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \bullet \qquad (3)$$

Лагранждын формуласынын механикалык интерпретациясын алдык. ▲

**2. Туундуну колдонуунун мисалдары.** Физикалык кубулуштарды мүнөздөөчү функциялардын туундуларынын жардамы менен башка физикалык чондуктар да берилет. Мисалы, кубаттуулук (аныктама боюнча) жумуштун убакыт боюнча алынган туундусу. Дагы бир мисал карайбыз.

○ 5 - м и с а л. Бир тектүү эмес стержень берилсин жана анын $l$ узундуктагы каалагандай бөлүгүнүн массасы $m(l)$ белгилүү болсун ($l$ — стержендин бир учунан баштап эсептелет). Стержень бир тектүү эмес болгону менен, анын анчалык чоң эмес бөлүгүнүн ($l$ ден $l + \Delta l$ ге чейинки бөлүгү) тыгыздыгын болжол менен бирдей $\left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right)$ деп алуу табигый иш. Бирок $\Delta l$ канчалык кичине болсо, бул бөлүктө тыгыздык да аз өзгөрөт. Ошондуктан стержендин тыгыздыгынын бөлүштүрүлүшүнүн $l$ ге көз карандылыгынын мүнөздөмөсү үчүн $d(l) = m'(l)$ *сызыктуу тыгыздыкты* кабыл алышат.

6 - м и с а л. Механиканын көп маселелеринде чекиттин тегиздиктеги же мейкиндиктеги кыймылдары каралат. Анда ылдам-





дык — вектордук чоңдук болот. Эгерде убакыттын $t$ моментинде, чекиттин координаталары $x(t)$ жана $y(t)$ га барабар болушса, анда $v(t)$ ылдамдык векторунун координаталары $x'(t)$ жана $y'(t)$ болушат. Мына ушундан пайдаланып, тригонометриялык функциялардын туундуларынын формулаларын кинематиканын негизинде чыгарууга болот.

Радиусу 1 болгон айлана боюнча, саат жебесине каршы багытта, бурчтук ылдамдыгы 1 болгон бир калыптагы кыймылды карайбыз (99-сүрөт). Анда убакыттын $t$ моментинде $M$ чекитинин координаталары: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ болушат. $\vec{v}(t)$ ылдамдык вектору айланага жаныма боюнча багытталарын, ал эми анын узундугу 1ге барабар болорун ($|\vec{v}| = \omega R = 1 \cdot 1 = 1$) физика курсунан билесиңер.

Демек, бул вектор координаталары $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ жана $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$ болгон $\vec{OP}_{t+\frac{\pi}{2}}$ вектору менен дал келет. Экинчи жагынан, $\vec{v}(t)$ векторунун координаталары тиешелүү түрдө $x'(t)$ (б.а. $\cos' t$) жана $y'(t)$ (б.а. $\sin' t$) га барабар. Ошондуктан төмөнкүдөй белгилүү формулаларды алабыз:

$$\cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

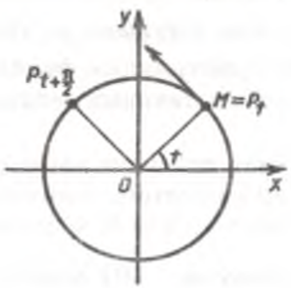
7 - м и с а л. Параболанын оптикада жана техникада колдонулуучу касиетин чыгарабыз.

$y = ax^2$ параболасын $Oy$ огунун тегерегинде айландыруудан пайда болгон бет, айлануу *параболоиди* деп аталат. Параболоиддин ички бети — күзгүлүү бет деп жана ал күзгүлүү бет $Oy$ огуна параллель болгон жарыктын тобу менен жарыктандырылат деп элестетели.

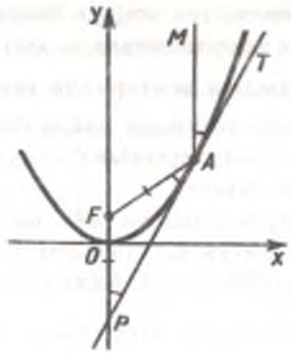
Бул күзгүнүн $Oy$ огу аркылуу өткөн $\alpha$ тегиздиги менен кесилишин карайлы. Бул кесилиш ушундай эле $y = x^2$ параболасы болот ($Ox$ огун кесилиш тегиздигинде тандап алабыз, $a = 1$). Оптиканын закондоруна ылайык, жарыктын чагылган нуру $\alpha$ тегиздигинде жатат, бирок бул нурдун параболанын жанымасы менен түзгөн бурчу, түшүүчү $MA$ нурунун ошол жаныма менен түзгөн бурчундай эле болот (100-сүрөт).

▽ $Oy$ огуна параллель нурлардын бардыгы чагылгандан кийин $Oy$ огунун бир эле чекитинде кесилише тургандыгын далилдейбиз.

Чагылган ар кандай нурдун $Oy$ огу менен кесилишкен чекитин $F$ аркылуу белгилейбиз. $AT$ түз сызыгы — параболанын $A$




99-сүрөт




100-сүрөт

чекитиндеги жанымасы болот. Жарыктын чагылуу законунан (100-сүрөт) дароо эле $\angle TAM = \angle FAP$ келип чыгат. Бирок $MA$ нуру $Oy$ огуна параллель, ошондуктан $\angle FPA = \angle TAM$. Демек, $\angle FPA = \angle FAP$, б.а. $FPA$ үч бурчтугу тең капталдуу жана $FA=FP$ болот. $A(x_0;\ y_0)$ чекити параболада жатат, ошондуктан $y_0 = x_0^2$. $AT$ жанымасынын теңдемеси $y = 2x_0x - x_0^2$ түрүндө болот, мындан $P$ чекитинин $y_P$ ординатасын табабыз. Ал $y_P = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2$ ка, б.а. $y_P = -y_0$ го барабар. Эгерде $F$ чекитинин ординатасын $y$ аркылуу белгилесек, анда $FP = y + y_0$. Узундук $FA = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2}$, ошондуктан $(y + y_0)^2 = x_0^2 + (y_0 - y)^2$ барабардыгы туура болот ($FA = FP$ болорун эске түшүрөбүз), б.а. $y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = y_0 + y_0^2 - 2yy_0 + y^2$, мындан $4yy_0 = y_0$ жана ($y_0 \neq 0$ болгондуктан) $y = \frac{1}{4}$. ▲

Мына ушинтип, параболалык күзгүнүн огуна параллель нурлардын баардыгы чагылуудан кийин *параболалык күзгүнүн фокусу деп аталган чекитке жыйналышат (F чекитин $y=x^2$ параболасынын фокусу* деп да аташат).

Параболалык телескоптун түзүлүшү ушул касиетке негизделген. Алыскы жылдыздардан нурлар бизге параллель шоолалар түрүндө келишет. Параболалык телескопту даярдап жана анын фокусуна фотопластинаны орноштуруп жылдыздардан келүүчү жарык сигналын күчөтүүгө мүмкүнчүлүк алабыз. Радиосигналдарды күчөтүүгө мүмкүнчүлүк берүүчү параболалык антенналарды түзүүнүн негизинде да ушул эле принцип жатат.

Эгерде параболалык күзгүнүн фокусуна жарык булагын орноштурсак, анда бул булактан чыккан нурлар, параболалык күзгүнүн бетинен чагылышкандан кийин тарап кетпестен, күзгүнүн огуна параллель болушкан нур шоола түрүндө жыйналышат. Бул факт, прожекторлорду жана фонарларды, күзгүлөрү параболоиддер формасында жасалуучу ар түрдүү проекторлорду даярдоодо колдонулат. ●





### *Көнүгүүлөр*

**267.** Материалдык чекит $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт. а) Убакыттын ар кандай $t$ моментинде кыймылдын ылдамдыгын эсептөө формуласын чыгаргыла. б) $t = 2$ с моментиндеги ылдамдыкты тапкыла. (Которулуш метр менен ченелет.) в) Кыймыл башталгандан канча секундадан кийин чекит токтойт?

**268.** Материалдык чекит $x(t) = t^3 - 4t^2$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт. $t = 5$ с моментиндеги ылдамдыкты жана ылдамдануусун тапкыла. (Которулуш метр менен ченелет.)

**269.** Нерсенин октун тегерегинде айланышы $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$ закону боюнча болот. Убакыттын каалаган $t$ моментиндеги жана $t = 4$ с болгондогу $\omega(t)$ бурчтук ылдамдыгын тапкыла. ($\varphi(t)$ — радиан менен өлчөнгөн бурч, $\omega(t)$ — радиан бөлүнгөн секунда менен өлчөнгөн ылдамдык, $t$ — секунда менен өлчөнгөн убакыт.)

**270.** Тормоз менен кармалган маховик $t$ убакыт ичинде $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ бурчуна бурулат. Төмөнкүлөрдү: а) убакыттын $t = 2$ с моментинде маховиктин айлануусунун $\omega(t)$ бурчтук ылдамдыгын; б) маховик токтогон учурдагы убакыттын моментин тапкыла. ($\varphi(t)$ радиан менен алынган бурч, $t$ — убакыт секунда менен.)

---

**271.** Чекит $x(t) = 2t^3 + t - 1$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдасын. Убакыттын $t$ моментиндеги ылдамдануусун тапкыла. Убакыттын кайсы моментинде ылдамдануу төмөнкүлөргө барабар болот: а) 1 см/с$^2$; б) 2 см/с$^2$? ($x(t)$ — сантиметр менен алынган которулуш, $t$ — убакыт секунда менен.)

**272.** Чекит $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт (убакыт секундалар менен, координата метр менен ченелет). Төмөнкүлөрдү: а) чекиттин ылдамдануусу нөлгө барабар болгон учурдагы $t$ убакыттын моментин; б) чекит бул моментте кандай ылдамдык менен кыймылдаарын тапкыла.

**273.** Чекит $x(t) = \sqrt{t}$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт. Анын ылдамдануусу ылдамдыктын кубуна пропорционалдуу экендигин көрсөткүлө.

**274.** $x(t) = 2t^3 - t^2$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдоочу, массасы $m$ болгон материалдык чекитке таасир этүүчү $F$ күчтү $t = 2$ болгондо тапкыла.

**275.** Массасы 2 кг болгон нерсе $x(t) = t^2 + t + 1$ закону боюнча түз сызыктуу кыймылдайт. $x$ координатасы сантиметр менен, $t$ убакыт — секунда менен ченелет. Төмөнкүлөрдү: а) аракет этүүчү күчтү; б) кыймыл башталгандан 2 секундадан кийинки нерсенин $E$ кинетикалык энергиясын тапкыла.

**276.** 20 см узундуктагы $AB$ стерженинин $A$ чекитинен $l$ аралыкта турган каалагандай $C$ чекити үчүн, стержендин $AC$ бөлүгүнүн массасы (грамм менен) $m(l) = 3l^2 + 5l$ формуласы менен аныкталары белгилүү болсун. Стержендин сызыктуу тыгыздыгын тапкыла: а) $AB$ кесиндисинин ортосунда; б) стержендин $B$ учунда.

**277.** Материалдык эки чекит $x_1(t) = 4t^2 - 3$ жана $x_2(t) = t^3$ закондору боюнча түз сызыктуу кыймылдашат. Убакыттын кайсы аралыгында биринчи чекиттин ылдамдыгы экинчи чекиттин ылдамдыгынан чоң болот?

**278.** Арасындагы бурчу $60^\circ$ болгон $O$ пунктунан чыгуучу эки шоола боюнча эки нерсе: биринчиси — 5 км/саат ылдамдык менен бир калыпта; экинчиси — $s(t) = 2t^2 + t$ закону боюнча кыймылдоодо. Алар бири биринен кандай ылдамдык менен алыстайшат? ($s$ — километр, $t$ — секунда менен ченелет.)

## § 6. ФУНКЦИЯНЫ ИЗИЛДӨӨГӨ ТУУНДУНУН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

### 22. Функциянын өсүү (кемүү) белгиси

Функцияны изилдөөдөгү негизги маселелердин бири — бул функциянын өсүү жана кемүү аралыктарын табуу экендигин 6-пункттан көрдүңөр. Мындай изилдөөнү туундунун жардамы менен жүргүзүү жеңил. Тиешелүү жыйынтыктарды формулировкалайбыз.

Ф у н к ц и я н ы н  ө с ү ш ү н ү н  ж е т к и л и к т ү ү  б е л г и с и. ***Эгер I интервалынын ар бир чекитинде $f'(x) > 0$ болсо, анда $f$ функциясы I де өсөт.***





Ф у н к ц и я н ы н  к е м и ш и н и н  ж е т к и л и к т ү ү  б е л г и с и. ***Эгер I интервалынын ар бир чекитинде $f'(x) < 0$ болсо, анда функциясы I де кемийт.***

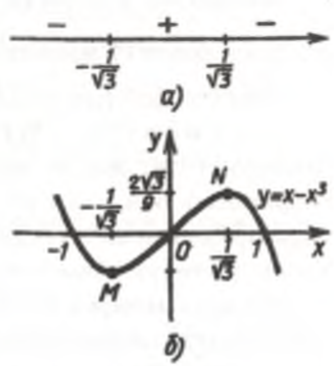
Бул белгилердин далилдөөсү Лагранждын формуласынын жардамы менен жүргүзүлөт (19-пунктту кара). $I$ интервалынан каалагандай $x_1$ жана $x_2$ эки санын алабыз. $x_1 < x_2$ болсун. Лагранждын формуласы боюнча төмөнкү

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (1)$$

аткарылгандай болгон $c \in (x_1; x_2)$ саны табылат. $c$ саны $I$ интервалына тиешелүү, анткени $x_1$ жана $x_2$ чекиттери $I$ интервалына тиешелүү. Эгерде $x \in I$ үчүн, $f'(x) > 0$ болсо, анда $f'(c) > 0$, демек, $f(x_1) < f(x_2)$ — бул (1) формуладан келип чыгат, анткени $x_2 - x_1 > 0$. Муну менен $f$ функциясынын $I$ де өсө тургандыгы далилденди. Эгерде $x \in I$ үчүн $f'(x) < 0$ болсо, анда $f'(c) < 0$, демек, $f(x_1) > f(x_2)$ — бул (1) формуладан келип чыгат, анткени $x_2 - x_1 > 0$. Муну менен $f$ функциясынын $I$ де кемий тургандыгы далилденди.

▽ Бул белгилердин көрсөтмөлүүлүк мааниси төмөнкү физикалык ой жүгүртүүлөрдөн түшүнүктүү болот (аныгыраак болсун үчүн, өсүү белгисин карайбыз).

Ординаталар огу боюнча кыймылдоочу чекит убакыттын $t$ моментинде $y = f(t)$ координатасына ээ болсун. Анда убакыттын $t$ моментинде бул чекиттин ылдамдыгы $f'(t)$ га барабар болот (21-пунктту кара). Эгерде I аралыгындагы убакыттын ар бир моментинде $f'(t) > 0$ болсо, анда чекит ординаталар огунун оң багыты боюнча кыймылдайт, б.а. эгерде $t_1 < t_2$ болсо, $f(t_1) < f(t_2)$ болот. Бул $f$ функциясы $I$ аралыгында өсө тургандыгын билдирет. ▲




101-сүрөт

○ 1 - м и с а л. $f(x) = x - x^3$ функциясынын өсүү (кемүү) аралыктарын табабыз жана графигин түзөбүз.

Берилген функция бүткүл чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталган. $f'(x) = 1 - 3x^2$ барабардыгынан

$1-3x^2>0$ болсо, $f'(x)>0$ болору келип чыгат. Бул барабарсыздыкты интервалдар методу менен чыгарып (101-*а*, сүрөт), $(-\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3})$ интервалында болорун алабыз, демек, бул интервалда $f$ өсөт.

Ушуга окшош эле, $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt3})$ жана $(\frac{1}{\sqrt3};\infty)$ аралыктарында $f'(x)<0$ болот, ошондуктан бул аралыктарда $f$ кемийт. Андан ары $f$ функциясынын маанисин $-\frac{1}{\sqrt3}$ жана $\frac{1}{\sqrt3}$ чекиттеринде эсептейбиз:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)=-\frac{1}{\sqrt3}-\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt3};\ f\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{1}{\sqrt3}-\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt3}.$$

Координаталык тегиздикте $M(-\frac{1}{\sqrt3};\frac{2}{3\sqrt3})$ жана $N(\frac{1}{\sqrt3};\frac{2}{3\sqrt3})$ чекиттерин белгилеп туруп, $(-\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3})$ интервалында өсүүчү жана $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt3})$ менен $(\frac{1}{\sqrt3};\infty)$ интервалдарында кемүүчү функциянын графигин чиебиз (101-*б*, сүрөт).

$f$ функциясы $-\frac{1}{\sqrt3}$ жана $\frac{1}{\sqrt3}$ чекиттеринде үзгүлтүксүз экендиги, $[-\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3}]$ кесиндисинде өсөрүн жана $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt3}]$ менен $[\frac{1}{\sqrt3};\infty)$ аралыктарында кемирин 101-б, сүрөттөн көрөбүз. ●

1-эскертүү. Эгерде $f$ функциясы өсүү (кемүү) аралыгынын кандайдыр бир учунда үзгүлтүксүз болсо, анда аны ушул аралыкка кошууга болот (1-мисалдагы $-\frac{1}{\sqrt3}$ жана $\frac{1}{\sqrt3}$ чекиттердей).

Биз бул фактыны далилдөөсүз кабыл алабыз.

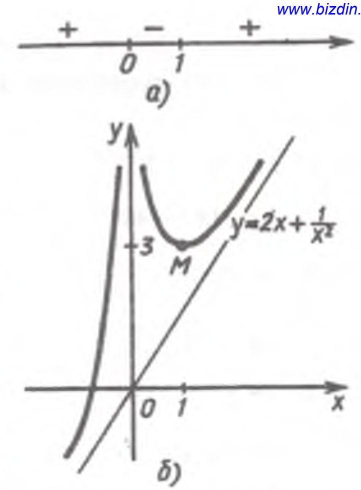
2-эскертүү. $f'(x)>0$ жана $f'(x)<0$ барабарсыздыктарын чыгаруу үчүн, жалпыланган интервалдар ыкмасын (Дарбунун теоремасы) пайдаланган ыңгайлуу: функциянын туундусу 0гө барабар болгон же туундусу жок болгон чекиттер, $f$ функциясынын аныкталуу областын ар биринде $f'$ тин белгиси турактуу боло турган аралыктарга бөлөт. (Бул факт математикалык анализдин курстарында далилденет.) Ал белгини $f'$ тин маанисин аралыктын кандайдыр бир чекитинде эсептөө аркылуу аныктоого болот.



○ 2-мисал. $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ функциясынын өсүү (кемүү) аралыктарын табабыз жана анын графигин түзөбүз.

Берилген функциянын аныкталуу областы — $(-\infty;0)$ жана $(0;\infty)$ аралыктарынын биригүүсү болот; $x=1$ учурда $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$; $f'(x)=0$.

0 жана 1 чекиттери $f$ функциясынын аныкталуу областын үч интервалга бөлөт: $(-\infty;0)$, $(0;1)$ жана $(1;\infty)$ 2-эскертүүгө ылайык булардын ар биринде $f'$ тин белгиси турактуу сакталат. Бул аралыктардын ар бириндеги туундунун белгиси 102-*а*, сүрөттө белгиленген.




102-сүрөт

Демек, берилген функция $(-\infty;0)$ жана $(1;\infty)$ интервалдарында өсөт. $f$ функциясы 1 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, ал чекитти $f$ функциясы өсө турган аралыкка кошуп жиберүүгө болот (1-эскертүүгө ылайык).

Акырында, $f$ функциясы $(-\infty;0)$ жана $(1;\infty)$ аралыктарында өсө тургандыгын алабыз. Андан ары, $(0;1)$ интервалында $f'(x)<0$ ошондуктан (1-эскертүүнү эске алсак) $(0;1)$ аралыгында $f$ функциясы кемийт.

$O$ чекити $D(f)$ ке кирбейт, бирок $x$ нөлгө умтулганда $\frac{1}{x^2}$ кошулуучусу чексиз өсөт. Ошондуктан $f$ тин маанилери да чексиз өсөт. 1 чекитинде функция 3кө барабар маанини алат.

Эми координаталык тегиздикте $M(1;3)$ чекитин белгилейбиз да, $(-\infty;0)$ жана $[1;\infty)$ аралыктарында өсүүчү жана $(0;1]$ аралыгында кемүүчү функциянын графигин чиебиз (102-*б*, сүрөт).

3-мисал. $f(x)=-2x+\sin x$ функциясынын өсүү (кемүү) аралыктарын табабыз.

Функция бүткүл сан түз сызыгында аныкталган. Анын туундусу:

$$f'(x)=-2+\cos x.$$

$|\cos x|\le 1$ болгондуктан, бардык чыныгы $x$ үчүн $f'(x)<0$ экендигин алуу жеңил. Бул болсо, $f(x)=-2x+\sin x$ функциясынын бүткүл сан түз сызыгында кемий тургандыгын билдирет. ●

### *Көнүгүүлөр*

279—281 функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.

**279.** а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$; б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$;

в) $f(x) = 4x - 5$; г) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

**280.** а) $f(x) = -\frac{2}{x} + 1$; б) $f(x) = x^2(x - 3)$;

в) $f(x) = \frac{x - 3}{x}$; г) $f(x) = x^3 - 27x$.

**281.** а) $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$; б) $f(x) = 4 - x^4$;

в) $f(x) = x(x^2 - 12)$; г) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

**282.** $f$ функциясынын эскизин төмөнкү шарттарда канааттандыра тургандай кылып түзгүлө:

а) $x \in (-2; 5)$ болгондо, $D(f) = [-2; 5]$, $f'(x) > 0$;

б) $x \in (1; 3) \cup (3; 6)$, $f'(3) = 0$ болгондо, $D(f) = [1; 6]$; $f'(x) < 0$;

в) $x \in (-2; 1) \cup (1; 5)$, $f'(1) = 0$ болгондо, $D(f) = [-2; 5]$; $f'(x) > 0$;

г) $x \in (1; 6)$ болгондо, $D(f) = [1; 6]$, $f'(x) < 0$.

---

283—284 функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла жана алардын графиктерин түзгүлө.

**283.** а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = 4x^3 - 1,5x^4$;

в) $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

**284.** а) $f(x) = 2 - \frac{4}{0,5x - 1}$; б) $f(x) = |x - 3| - 2$;

в) $f(x) = 8x^2 - x^4$; г) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$.

**285.** Эгерде:

а) $f(x) = 3x + \cos 2x$; б) $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$;

в) $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3$; г) $g(x) = -4x + \sin 3x$

болсо, $f$ функциясынын $\boldsymbol{R}$ де өсөрүн, ал эми $g$ функциясынын $\boldsymbol{R}$ де кемирин далилдегиле.

**286.** а) $x^3 - 27x + 2 = 0$, $P_1 = [-1; 1]$, $P_2 = [4; 6]$;

б) $x^4 - 4x - 9 = 0$, $P_1 = [-2; 0]$, $P_2 = [2; 3]$;





в) $x^4 + 6x^2 - 8 = 0$, $P_1 = [-2; -1]$, $P_2 = [1; 2]$;

г) $-1 + 3x^2 - x^3 = 0$, $P_1 = [-2; 0]$, $P_2 = [2; 3]$

болсо, бул теңдемелер берилген $P_1$ жана $P_2$ аралыктарынын ар биринде бирден гана тамырга ээ экендигин далилдегиле.

## 23. Функциянын сыналуучу чекиттери, анын максимумдары жана минимумдары

Биз $f'(x) > 0$ жана $f'(x) < 0$ болгон аралыктарда функциянын өзгөрүшүн карап чыктык. Функциянын аныкталуу областынын ички чекиттеринде анын туундусу нөлгө барабар болсо же такыр эле жок болсо, анда ал чекиттер бул функциянын *сыналуучу чекиттери* деп аталышат. Бул чекиттер функциянын графигин түзүүдө маанилүү роль ойношот, анткени ошолор гана функциянын экстремум чекиттери боло алышат (103-жана 104-сүрөттөр). *Ферманын теоремасы* деп аталган тиешелүү жыйынтыкты формулировкалайбыз (француз математиги Пьер Ферманын урматында).

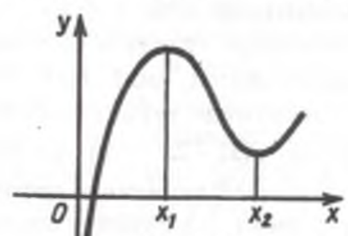
Экстремумдун зарыл шарты. **Эгерде $x_0$ чекити $f$ функциясынын экстремум чекити болсо жана ал чекитте $f'$ туундусуна ээ болсо, анда ал туунду нөлгө барабар болот: $f'(x_0) = 0$.**

$f'(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$ учурун карайбыз. Туундунун аныктамасы боюнча $x \to x_0$ учурда $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ катышы $f'(x_0)$ оң санына умтулат, демек, катыштын өзү дагы, $x$ тин $x_0$ го жетишерлик жакын маанилеринде оң болот. Мындай $x$ тер үчүн,

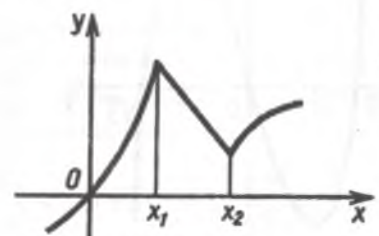
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

демек, $x_0$ чекитинин кандайдыр бир аймагындагы бардык $x > x_0$ дөр үчүн $f(x) > f(x_0)$ болот. Ошондуктан $x_0$ чекити максимум чекит боло албайт.

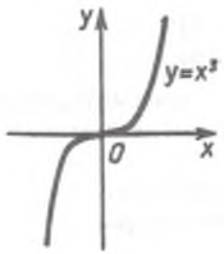
Эгерде $x < x_0$ болсо, анда $f(x) < f(x_0)$, натыйжада $x_0$ чекити $f$ тин минимум чекити боло албайт.



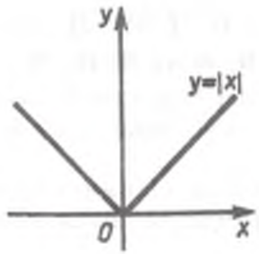

103-сүрөт



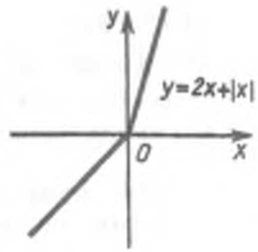

104-сүрөт




105-сүрөт




106-сүрөт




107-сүрөт

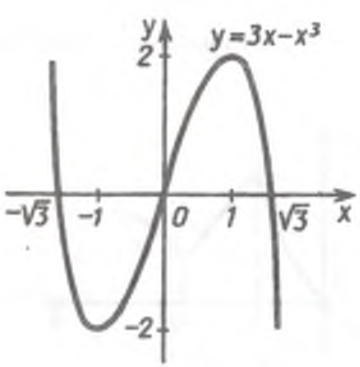
$f'(x_0) < 0$ учуру ушуга окшош эле талкууланат.

Ферманын теоремасы экстремумдун зарыл гана шарты экендигин белгилөө маанилүү: $x_0$ чекитинде туундунун нөлгө барабар болушунан, бул чекитте функция сөзсүз эле экстремумга ээ болот деген жыйынтык чыгаруунун кажети жок. Мисалы, $f(x) = x^3$ функциясынын туундусу 0 чекитинде нөлгө айланат, бирок функция бул чекитте экстремумга ээ болбойт (105-сүрөт).

Биз ушуга чейин функциянын туундусу нөлгө барабар болгон сыналуучу чекиттерди карадык. Эми функция туундуга ээ болбой турган сыналуучу чекиттерди карайбыз. (Мисалы, $y = \sqrt{x}$ функциясы үчүн 0 чекити сыналуучу чекит болбостугун белгилейбиз: бул чекитте туунду жок, бирок, ал чекит аныкталуу областынын ички чекити эмес.) Мындай чекиттерде функция дагы экстремумга ээ болушу да, болбошу да мүмкүн.

○ 1-мисал. $f(x) = |x|$ функциясын карайбыз (106-сүрөт). 0 чекитинде бул функциянын туундусу жок. Демек, 0— сыналуучу чекит. 0 чекитинде функция минимумга ээ экендиги анык.

2-мисал. $f(x) = 2x + |x|$ функциясын карайбыз (107-сүрөт). 0 чекитинде бул функциянын экстремумга ээ эместиги графиктен көрүнүп турат. Бул чекитте функция туундуга да ээ болбойт.




Чындыгында, эгер $f$ функциясы 0 чекитинде туундуга ээ болот деп божомолдосок, анда $f(x) - 2x$ дагы 0 чекитинде туундуга ээ болот. Бирок $f(x) - 2x = |x|$, ал эми $|x|$ функциясы 0 чекитинде дифференцирленбейт (18-пунктту кара), б.а. карама-каршылыкка келдик.



Демек, $f$ функциясы 0 чекитинде туундуга ээ болбойт. ●

Функциянын экстремумдарын табууда, биринчи кезекте анын сыналуучу чекиттерин табуу талап кылынаары Ферма теоремасынан келип чыгат. Бирок жогоруда каралган мисалдардан берилген сыналуучу чекиттин чындыгында эле экстремум чекити боло же болбой тургандыгы жөнүндөгү маселе кошумча изилдөөлөрдү талап кыларын көрөбүз. Бул учурда көбүнчө экстремум чекитинде экстремумдун болушу жөнүндөгү төмөнкү жетиштүү шарттар жардам беришет.

Функциянын максимумунун белгиси. ***Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз, ал эми $(a;\, x_0)$ интервалында $f'(x) > 0$ жана $(x_0;\, b)$ интервалында $f'(x) < 0$ болсо, анда $x_0$ чекити $f$ функциясынын максимум чекити болот.***

Бул белгинин жөнөкөйлөтүлгөн формулировкасын пайдалануу ыңгайлуу: *эгерде $x_0$ чекитинде туунду белгисин плюстан минуска алмаштырса, анда $x_0$ чекити максимум чекити болот.*

Далилдөө. $(a;\, x_0)$ интервалында туунду $f'(x) > 0$, ал эми $f$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз болот, натыйжада (22-пунктту кара) $f$ функциясы $(a;\, x_0]$ аралыгында өсөт, ошондуктан $(a;x_0)$ интервалындагы бардык $x$ үчүн $f(x) < f(x_0)$.

$[x_0;\, b)$ аралыгында $f$ функциясы кемийт (далилдөөсү окшош эле), ошондуктан $(x_0;b)$ интервалындагы бардык $x$ үчүн, $f(x) < f(x_0)$.

Ушинтип, $(a;\, b)$ интервалындагы бардык $x \neq x_0$ үчүн, $f(x) < f(x_0)$, б.а. $x_0$ чекити $f$ функциясынын максимум чекити болот.

▽ Максимумдун белгиси механикалык жөнөкөй мааниге ээ. Биз $f(x)$ ти — $Oy$ огу боюнча кыймылдаган чекиттин, убакыттын $x$ моментиндеги координатасы деп, ал эми $f'(x)$ ти, ал чекиттин ошол моменттеги ылдамдыгы деп ала алабыз. Шарт боюнча чекиттин ылдамдыгы убакыттын $x_0$ моментинен мурдакы аралыктарында оң. Ошондуктан бул убакыт ичинде чекит оң багыт боюнча кыймылдайт, ал $Oy$ огу боюнча $f(x_0)$ чекитине чейин көтөрүлөт, б.а. $x<x_0$ болгондо $f(x) < f(x_0)$. $x_0$ моментинде чекит кирпик каккыча «токтолот» (бул моментте анын ылдамдыгы нөлгө барабар же аныкталган эмес), анан ок боюнча төмөн түшө баштайт (шарт боюнча $x>x_0$ болгондо $f'(x)$ ылдамдыгы нөлдөн кичине), б.а. $f(x) < f(x_0)$. Ошентип, $x_0$ чекитинин аймагында $f(x) < f(x_0)$ болот. $x_0$ чекити — максимум чекити. ▲

Функциянын минимумунун белгиси. ***Эгерде $f$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз, ал эми $(a;\, x_0)$***

***интервалында $f'(x) < 0$ жана $(x_0;b)$ интервалында $f'(x) > 0$ болсо, анда $x_0$ чекити $f$ функциясынын минимум чекити болот.***

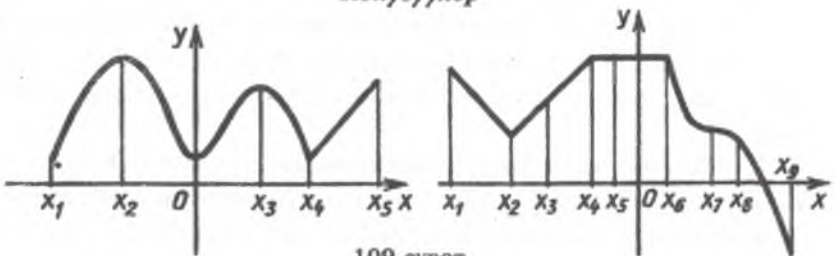
Бул белгинин жөнөкөйлөштүрүлгөн формулировкасынан пайдалануу ыңгайлуу: *эгерде $x_0$ чекитинде туунду белгисин минустан плюска алмаштырса, анда $x_0$ чекити минимум чекити болот.*

Бул белгинин далилдөөсү максимумдун белгисинин далилдөөсүнө окшош (аны өз алдынча жүргүзүү пайдалуу).

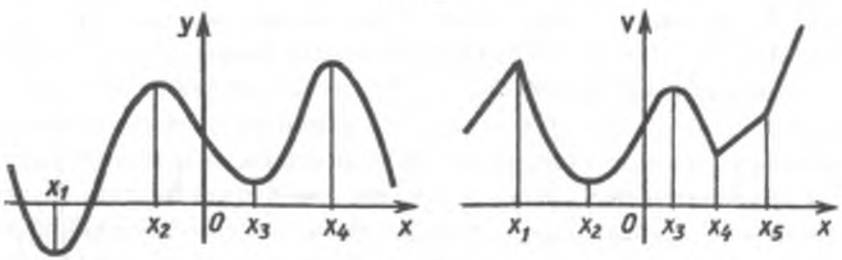
○ 3 - м и с а л. $f(x) = 3x - x^3$ функциясынын экстремум чекитин табабыз.

Бул функциянын $3-3x^2$ ка барабар болгон туундусу бардык чекиттерде аныкталган жана $-1$ менен $1$ чекиттерде нөлгө айланат. Туунду $-1$ чекитинде белгисин минустан плюска алмаштырат ($x<-1$ болгондо $f'(x) < 0$ жана $-1< x <1$ болгондо $f'(x) > 0$). Туунду 1 чекитинде белгисин плюстан минуска алмаштырат. Максимумдун жана минимумдун белгилерин пайдаланып, $-1$ чекити $f$ функциясынын минимум чекити, ал эми 1 чекити $f$ функциясынын максимум чекити болорун алабыз. Функциянын графиги 108-сүрөттө көрсөтүлгөн. ●

### *Көнүгүүлөр*




109-сүрөт




110-сүрөт

**287.** Графиги 109-сүрөттө көрсөтүлгөн функциянын сыналуучу чекиттерин тапкыла.



**288.** а) $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$; б) $f(x) = 1 + \cos 2x$;

в) $f(x) = x - 2\sin x$; г) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$

функцияларынын сыналуучу чекиттерин тапкыла.

**289.** Графиги 110-сүрөттө көрсөтүлгөн $f$ функциясынын максимум жана минимум чекиттерин тапкыла. Тиешелүү чекиттерде туунду барбы? Эгерде бар болсо, анын мааниси эмнеге барабар?

**290.** Төмөнкү функциянын сыналуучу чекиттерин тапкыла. Алардын кайсынысы максимум чекити, кайсынысы минимум чекити болорун аныктагыла:

а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$; б) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

**291.** а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = 3x - 7$; г) $f(x) = 3x^5 + 2x$

болсо, $f$ функциясынын сыналуучу чекиттери жок экендигин далилдегиле.

---

292—293-дөгү $f$ функциясынын сыналуучу чекиттерин тапкыла.

**292.** а) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$; б) $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$;

в) $f(x) = 10\cos x + \sin 2x - 6x$; г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$.

**293.** а) $f(x) = (x-2)^3$; б) $f(x) = \begin{cases} x \le -1 \text{ болгондо } -x-2, \\ -1 < x < 1 \text{ болгондо } x, \\ x \ge 1 \text{ болгондо } 2-x. \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; г) $f(x) = \begin{cases} x < -2 \text{ болгондо } x+6, \\ -2 \le x \le 2 \text{ болгондо } x^2, \\ x > 2 \text{ болгондо } 6-x. \end{cases}$

**294.** Төмөнкү касиеттерге ээ болгон функциянын графигинин эскизин түзгүлө:

а) $x \in (1;\,5)$ жана $f'(1) = 0$ болгондо $f'(x) < 0$, $x \in (-3;\,1)$ болгондо $f'(x) > 0$; $D(f) = [-3;\,5]$;

б) $x \in (-3;\,1)$ болгондо $f'(x) < 0$, $D(f) = [-3;\,5]$; $x \in (1;\,5)$ болгондо $f'(x) > 0$; $f$ функциясы 1 чекитинде туундуга ээ болбойт;

в) $D(f) = [a; b]$; $x_1$ — функциянын минимум чекити, $x_2$ — максимум чекити, $f(a) > f(b)$;

г) $D(f) = [a; b]$; $x_1$ — максимум чекити, $x_2$ — минимум чекити, $f(a) = f(b)$.

**295.** а) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$; б) $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3$; г) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

болсо, функцияны өсүүгө, кемүүгө жана экстремумга изилдегиле. Функциянын графигин түзгүлө.

## 24. Функцияны изилдөөдө туундунун колдонулуштарына мисалдар

Функциянын графигин түзүүнү аны изилдөөдөн баштоо дурус экендигин билесиңер (4-пункт). Берилген $f$ функциясын изилдөө үчүн: 1) анын аныкталуу областын табышат; 2) $f$ функциясынын жуп же так экендигин, мезгилдүүлүгүн такташат. Андан ары төмөнкүлөрдү табышат: 3) $f$ функциясынын графигинин координаталар октору менен кесилишүү чекиттерин; 4) белгиси турактуулук аралыктарын; 5) өсүү жана кемүү аралыктарын; 6) экстремум чекиттерин жана ал чекиттердеги $f$ функциясынын маанилерин жана 7) функциянын «өзгөчө» чекиттердин аймагында жана $x$ тин модулу боюнча чоң маанилеринде изилдешет.

Ушундай изилдөөлөрдүн негизинде функциянын графиги түзүлөт.

Функцияны өсүүгө (кемүүгө) жана экстремумга изилдөөнү туундунун жардамы менен жүргүзүү ыңгайлуу. Ал үчүн, адегенде функциянын туундусун жана сыналуучу чекиттерин табышат, андан кийин, алардын кайсынысы экстремум чекиттери болорун такташат.

○ 1-мисал. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ функциясын изилдейбиз жана анын графигин түзөбүз.

Изилдөөнү көрсөтүлгөн схема боюнча жүргүзөбүз.

1) $D(f) = R$, анткени $f$ — көп мүчө.

2) $f$ функциясы жуп да, так да (муну өз алдыңарча далилдегиле).

3), 4) $f$ тин графиги ординаталар огу менен $(0; f(0))$ чекитинде кесилишет; абсциссалар огу менен кесилишүү чекитин табуу үчүн, тамырларынын бири ($x = 1$) оңой эле табыла турган $3x^5-5x^3+2=0$ теңдемесин чыгаруу керек. Башка тамырлары





(эгерде алар болушса) жакындаштырылып гана табылышы мүмкүн. Ошондуктан берилген функция үчүн графиктин абсциссалар огу менен башка кесилишүү чекиттерин жана белгиси турактуулук аралыктарын аныктабай эле коёбуз (келтирилген схема болжолдуу мүнөзгө ээ экендиги 4-пунктта белгиленген болучу).

5), 6) $f$ функциясынын туундусун табабыз:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

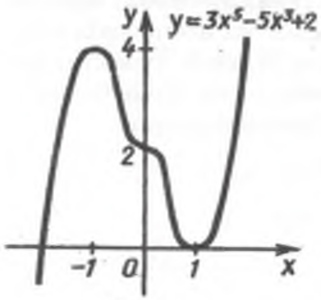
$D(f') = R$ ошондуктан $f'(x)$ мааниге ээ болбой турган сыналуучу чекиттер жок.

Эгерде $x^2(x^2-1)=0$ болсо, б.а. аргументтин 0, $-1$ жана 1ге барабар маанилеринде $f'(x) = 0$ болорун байкайбыз. Каралган функциянын сыналуучу чекиттери үчөө.

Таблицаны түзөбүз:

| $x$ | $(-\infty; -1)$ | $-1$ | $(-1;0)$ | $0$ | $(0; 1)$ | $1$ | $(1; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\rightarrow$ | 4 | $\rightarrow$ | 2 | $\rightarrow$ | 0 | $\rightarrow$ |
| | | max | | | | min | |

Бул таблицанын биринчи сабында, функциянын сыналуучу чекиттери жана алар менен чектелген аралыктар өсүү тартибинде көрсөтүлгөн. Экинчи сабында туундунун бул аралыктардагы белгилери көрсөтүлгөн. (Мындай интервалдардын ар бириндe туундунун белгиси өзгөрбөйт, ал белгини каралып жаткан интервалдын кандайдыр бир чекитинде, туундунун белгисин аныктоо аркылуу табууга болот.) Үчүнчү сапта берилген функциянын өзгөрүшүнүн жүрүшү жөнүндөгү жыйынтыктар; «$\rightarrow$» — өсөт, «$\rightarrow$» — кемийт, ал эми төртүнчүсүндө — сыналуучу чекиттердин түрү жөнүндө (жогоруда келтирилген схеманын 5- жана 6-пункттары) жазылган. $f$ функциясынын сыналуучу 0 чекити экстремум чекити эмес, ошондуктан таблицанын төртүнчү сабында ал белгиленген эмес. Сыналуучу чекиттердин арасындагы аралыктагы функциянын өзгөрүшүнүн жүрүшү жөнүндөгү жыйынтыкты, ал аралыктын учтарындагы функциянын маанилерин салыштыруу аркылуу (туундунун белгисин аныктоонун ордуна) чыгарууга мүмкүн экендигин белгилейбиз. Мисалы, $f(0) < f(-1)$, ошондуктан, $(-1;0)$ аралыгында функция кемийт (демек, бул аралыкта $f' < 0$.




111-сүрөт

Функциянын графигин түзөбүз (111-сүрөт). Бул түзүүнү таблицада көрсөтүлгөн аралыктар боюнча жүргүзүү ыңгайлуу. Мисалы, таблицада $f$ функциясы (0;1) интервалында кемийт деп көрсөтүлгөн. $f$ функциясы 0 жана 1 чекиттеринде үзгүлтүксүз (анткени, ал бардык чекиттерде үзгүлтүксүз), натыйжада, ал [0;1] кесиндисинде кемийт. Ошондуктан, графикти [0;1] кесиндисинде $f(0)=2$ маанисинен $f(1)=0$ маанисине чейин кемий тургандай кылып чиебиз. Мында $0, \pm 1$ чекиттериндеги графиктин жанымалары горизонталдуу болуулары керек, анткени бул чекиттердеги туунду нөлгө барабар экендиги таблицанын экинчи сабында айтылган. Калган аралыктардагы график да ушуга окшош түзүлөт.

2 - м и с а л. $2x^3-3x^2-12x-11=0$ теңдемесинин тамырларынын санын табабыз.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-11$ функциясын карайбыз. Анын аныкталуу областы $D(f)=(-\infty;\infty)$. $f$ тин сыналуучу чекиттерин издөө үчүн, анын туундусун табабыз: $f'(x)=6x^2-6x-12$. Бул туунду $x=-1$ жана $x=2$ чекиттеринде нөлгө айланат.

Таблицаны толтурабыз:

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | $-1$ | $(-1;2)$ | $2$ | $(2;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | → | –4 | → | –31 | → |
| | | max | | min | |

$(-\infty;-1]$ аралыгында функция $-\infty$ ден $-4$кө чейин өсөт, ошондуктан бул аралыкта $f(x)=0$ теңдемеси тамырларга ээ эмес; [–1;2] аралыгында да теңдеменин тамырлары жок, анткени бул аралыкта $f$ функциясы –4 төн –31ге чейин кемийт; акырында, $[2;\infty)$ аралыгында $f$ функциясы –31ден чексиздикке чейин өсөт, ошондуктан бул аралыкта $f(x)=0$ теңдемеси бир гана тамырга ээ (тамыр жөнүндөгү теорема боюнча). Мына ушинтип,

$$2x^3-3x^2-12x-11=0$$

теңдемеси бир тамырга ээ, ал тамыр $(2;\infty)$ интервалына тиешелүү. ●





*Көнүгүүлөр*

296—297-деги функцияларды изилдегиле жана графиктерин түзгүлө.

**296.** а) $f(x)=x^2-2x+8$; б) $f(x)=-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}$;

в) $f(x)=-x^2+5x+4$; г) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$.

**297.** а) $f(x)=-x^3+3x-2$; б) $f(x)=x^4-2x^2-3$;

в) $f(x)=x^3+3x+2$; г) $f(x)=3x^2-x^3$.

**298.** а) $f(x)=1+1{,}5x-3x^2-2{,}5x^3$; б) $f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-6x+1$;

в) $f(x)=\frac{x^4}{4}+8x-5$; г) $f(x)=x^3-6x^2-15x-2$

функцияларынын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.

**299.** а) $f(x)=2x-\cos x$; б) $f(x)=x^5+4x$;

в) $f(x)=\sin x+\frac{3x}{2}$; г) $f(x)=2x^3+x-5$

болгон $f$ функциялары, $R$ көптүгүндө өсүүчү функция экендигин далилдегиле.

---

300—302-деги функцияларды изилдегиле жана графиктерин түзгүлө.

**300.** а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$; б) $f(x)=4x^2-x^4$;

в) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$; г) $f(x)=5x^3-3x^5$.

**301.** а) $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$; б) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $f(x)=x\sqrt{2-x}$; г) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

**302.** а) $f(x)=\sin^2 x+\sin x$; б) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\cos^2 x-\cos x$; г) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

**303.** Төмөнкү $f$ функциясы берилген аралыкта оң маанилерди ала тургандыгын далилдегиле:

а) $f(x)=\mathrm{tg}\,x-x$; $I=(0;\frac{\pi}{2})$; б) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$; $I=[1;\infty)$;

в) $f(x)=x-\sin x$; $I=(0;\infty)$; г) $f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\cos x$; $I=(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

**304.** Төмөнкү теңдеме канча тамырга ээ:

а) $4x^3 - 3x^2 - 36x - 10 = 0$; б) $\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x = 0$;

в) $x^4 - 4x^3 - 9 = 0$; г) $x^2 - \frac{x^3}{3} - 1 = 0$?

## 25. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери

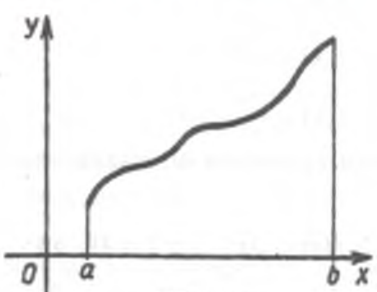
Практикалык көп маселелерди чыгаруу, көбүнчө, кесиндиде үзгүлтүксүз функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табууга келтирилет. $[a; b]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз $f$ функциясы ушул кесиндиде эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болот*, б.а. $[a; b]$ кесиндисинде $f$ эң чоң жана эң кичине $[a; b]$ маанилерин ала турган чекиттер табылат деген Вейерштрасстын теоремасы анализдин курстарында далилденет.

$f$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз гана болбостон, бул кесиндиде чектүү гана сандагы сыналуучу чекиттерге ээ болгон учур үчүн, *$f$ тин эң чоң жана эң кичине маанилерин издөө эрежесин* көрсөтөбүз.

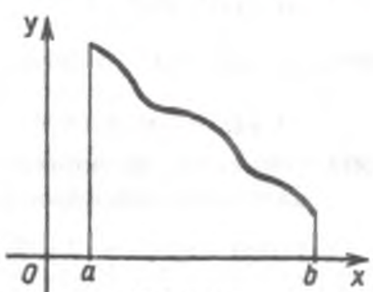
Адегенде $f$ функциясы $[a; b]$ кесиндисинде сыналуучу чекиттерге ээ болбосун дейли. Анда (23-пунктту кара) функция бул кесиндиде өсөт же кемийт (112-, 113-сүрөттөр), демек, $f$ функциясынын $[a;b]$ кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилери $a$ жана $b$ бурчтарындагы $f$ тин маанилери болушат.

Эми $f$ функциясы $[a;b]$ кесиндисинде чектүү сандагы сыналуучу чекиттерге ээ болсун дейли. Бул чекиттер $[a;b]$ кесиндисин ичинде сыналуучу чекиттер болбогон чектүү сандагы кесиндилерге бөлүшөт.

Ошондуктан (алдыңкы абзацты кара) мындай кесиндилерге $f$ функциясы эң чоң жана эң кичине маанилерин алардын




112-сүрөт




113-сүрөт





учтарында алат, б.а. $f$ функциясынын сыналуучу чекиттеринде же $a$ жана $b$ чекиттеринде алат.

Мына ошентип, *кесиндиде чектүү сандагы сыналуучу чекиттери бар функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу үчүн функциянын маанилерин бардык сыналуучу чекиттерде жана кесиндинин учтарында эсептөө керек, андан кийин алынган сандардын эң чоңун жана эң кичинесин тандап алуу керек.*

○ 1-мисал. $y(x)=x^3-1{,}5x^2-6x+1$ функциясынын $[-2;0]$ кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилерин табабыз.

Адегенде сыналуучу чекиттерди табабыз. $y'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ туундусу бардык $x$ тер үчүн аныкталгандыктан, $y'(x) = 0$ теңдемесин чыгаруу гана калат. Бул теңдемени чыгарып, $x=-1$ жана $x = 2$ни табабыз.

Эми $y(-2)=-1$, $y(-1)=4{,}5$ жана $y(0)=1$ сандарынын эң чоңун жана эң кичинесин тандап алуу керек ($x = 2$ сыналуучу чекити каралып жаткан кесиндиге тиешелүү эмес). Эң кичине мааниге $-2$ чекитинде жетишилет жана $-1$ге барабар, ал эми эң чоң мааниге $-1$ чекитинде жетишилет жана 4,5 ке барабар. Бул кыскача мындай жазылат.

$$\max_{[-2;0]} y(x) = y(-1) = 4{,}5; \quad \min_{[-2;0]} y(x) = y(-2) = -1. \quad \bullet$$

Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин издөөнүн жогоруда баяндалган ыкмасы ар түрдүү практикалык маселелерди чыгарууда колдонулат. Бул төмөнкү схема боюнча иштелет:

1) маселе функциянын тилине «которулат». Ал үчүн, ыңгайлуу $x$ параметри тандалып алынат, бизди кызыктырган чоңдук, ал параметр аркылуу $f(x)$ функциясы түрүндө туюндурулат;

2) бул функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери, кандайдыр бир аралыкта, анализдин каражаттары аркылуу изделет;

3) алынган жыйынтык (функциянын тилинде) кандай практикалык мааниге ээ болору (баштапкы маселенин терминдеринде) такталат. Жалпысынан, практикалык маселелерди математиканын каражаттары менен чыгаруу, эреже катары, үч этаптан турат: 1) формалдаштыруу (берилген маселени математиканын тилине которуу); 2) алынган математикалык маселени чыгаруу жана 3) табылган чыгарылышты интерпретациялоо (аны математика тилинен баштапкы маселенин терминдерине «которуу»).

Бул жалпы метод менен (аны математикалык моделдер методу деп аташат) силер тааныштыңар, айтылган схема боюнча алгебра курсунда тексттүү маселелер чыгарылган. Анын колдонулушуна мисал келтиребиз.

○ **2-мисал.** Жагы $a$ болгон квадрат түрүндөгү темир баракчадан бурчтарынан квадраттарды кесип алып (114-сүрөт) жана пайда болгон четтерин бүгүп, үстү ачык кутуча жасоо керек. Кутучанын көлөмү максималдуу болсун үчүн, анын негизинин жагы кандай болууга тийиш?

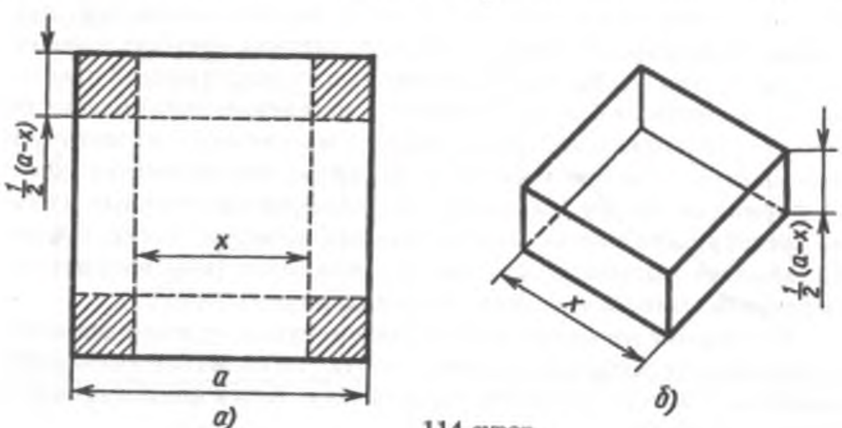
Чыгаруу. 1) Кутучанын негизинин жагынын узундугун $x$ аркылуу белгилейли. Анда кесилип алынган квадратчалардын жактарынын узундуктары $\frac{1}{2}(a-x)$ ке барабар, ал эми кутучанын көлөмү $\frac{1}{2}(a-x)x^2$ ка барабар. Маселенин мааниси боюнча $x$ саны, $0 < x < a$ барабарсыздыгын канааттандырат, б.а. $(0; a)$ интервалына тиешелүү. Мына ушинтип, 2-мисалды $V(x) = \frac{1}{2}(a-x)x^2$ функциясынын $(0;a)$ интервалындагы эң чоң маанисин табуу керек деген маселеге келтирдик.

2) Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу эрежеси кесинди үчүн формулировкаланган. $V$ функциясы бүткүл сан түз сызыгында үзгүлтүксүз болгондуктан, анын эң чоң маанисин $[0;a]$ кесиндисинен издейбиз да, анан биз чыгарып жаткан маселе үчүн жыйынтыктарды жасайбыз. Функциянын сыналуучу чекиттерин табабыз:

$$V'(x) = ax - \frac{3}{2}x^2,\ ax - \frac{3}{2}x^2 = 0, \text{ б.а. } x = 0 \text{ же } x = \frac{2}{3}a;$$

$$V(\frac{2}{3}a) = \frac{1}{2}(a - \frac{2}{3}a)(\frac{2}{3}a)^2 = \frac{2}{27}a^3.$$

$V(0) = 0$ жана $V(a) = 0$ болгондуктан, $V$ функциясы кесиндидеги өзүнүн эң чоң маанисине $x = \frac{2}{3}a$ болгондо жетишет, б.а.




114-сүрөт



$$\max_{[0;\,a]} V(x) = V(\frac{2}{3}a) = \frac{2}{27}a^3.$$

Функция эң чоң мааниге $[0;a]$ кесиндисинин ичинде, демек, $(0;a)$ интервалынын ичинде жетишет.

3) Эми берилген шарттарда, мүмкүн болгон максималдуу көлөмгө ээ болгон кутучанын негиздеринин жагынын узундугу $-x$ экендигин эске түшүрүү керек. Алынган жыйынтык, негиздеринин жагы $\frac{2}{3}a$ болгон кутуча, максималдуу көлөмгө ээ болот дегенди билдирет.

### *Көнүгүүлөр*

**305.** $f$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$, $[-1;1]$ жана $[0;3]$ аралыктарында;

б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $[-4;-1]$ жана $[1;3]$ аралыктарында;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, $[0;2]$ жана $[2;3]$ аралыктарында;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $[-3;-2]$ жана $[1;5]$ аралыктарында.

**306.** Функциянын $P_1$ аралыгындагы эң чоң маанисин жана $P_2$ аралыгындагы эң кичине маанисин салыштыргыла:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $P_1 = [-4; 0]$, $P_2 = [3; 4]$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$; $P_1 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $P_2 = [2; 3]$.

**307.** Материалдык чекит $s(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (мында $s(t)$ — жол, метр менен жана $t$ — убакыт, секунда менен) закону боюнча түз сызыктуу кыймылда болот. Убакыттын $[4;10]$ аралыгынын кайсы моментинде чекиттин кыймылынын ылдамдыгы эң чоң болот жана ал ылдамдыктын чоңдугу кандай болот?

**308.** $[-2;5]$ аралыгынан, $f(x) = 21x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$ функциясынын өзгөрүү ылдамдыгы эң чоң же эң кичине боло турган аргументтин маанилерин тапкыла.

**309.** Түз сызыктуу кыймылдагы материялык чекиттин ылдамдыгы $v(t) = \frac{1}{6}t^3 - 12t$ закону боюнча өзгөрөт (ылдамдык секундадагы метр менен ченелет). Эгерде кыймыл $t_1$=10 с дан $t_2$=50с га чейинки аралыкта каралса, кыймылдын ылдамдануусу убакыттын кайсы моментинде эң кичине болот?

**310.** $f$ функциясынын берилген кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, [0; 2\pi]$; б) $f(x) = 1,5x^2 + \frac{81}{4}$, $[1; 4]$;

в) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x, [0; \frac{3\pi}{2}]$; г) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}, [-5; -2,5]$.

**311.** 24 санын, квадраттарынын суммасы эң кичине болгудай кылып, эки терс эмес кошулуучулардын суммасы түрүндө жазгыла.

**312.** 4 санын эки сандын көбөйтүндүсү эң чоң болгондой кылып терс эмес эки сандын суммасы түрүндө көрсөткүлө.

**313.** Узундугу 48 м болгон зымды, тик бурчтук түзүлгөндөй кылып ийүү керек. Тик бурчтуктун аянты эң чоң болсун үчүн анын жактарынын узундуктары кандай болууга тийиш?

**314.** 54 санын үч оң кошулуучунун суммасы түрүндө, алардын экөө 1 жана 2 сандарына пропорциялаш болушуп, ал эми бардык кошулуучулардын көбөйтүндүсү эң чоң болгондой кылып жазгыла.

**315.** 16 санын эки оң сандын көбөйтүндүсү түрүндө, ал сандардын квадраттарынын суммасы эң кичине болгондой кылып жазгыла.

**316.** Тик бурчтуктун аянты 64 см$^2$. Периметри эң кичине болсун үчүн, анын жактарынын узундуктары кандай болууга тийиш?

**317.** Негизи квадрат болгон тик бурчтуу параллелепипед формасындагы ачык челекке 13,5 литр суюктук батууга тийиш. Өлчөмдөрү кандай болгондо аны даярдоого эң аз сандагы металл талап кылынат?

**318.** Негизи 60 см, каптал жагы 50 см болгон тең капталдуу үч бурчтуктун ичине аянты эң чоң болгон тик бурчтук сызылган. Тик бурчтуктун эки чокусу үч бурчтуктун негизинде, ал эми калган экөө — каптал жактарында жатышат. Тик бурчтуктун жактарынын узундугун тапкыла?

**319.** Жумуру жыгачтан кесилиш аянты тик бурчтук болуп, эң чоң аянтка ээ болгон устун кесип алынган. Эгерде жумуру жыгачтын кесилишинин радиусу 20 см болсо, устундун кесилиш аянтынын өлчөмдөрүн тапкыла.

**320.** Бургулоочу мунара шоссенин эң жакынкы чекитинен 9 км аралыкта талаада жайланышкан. Шосседеги айтылган чекиттен (шоссени түз сызык деп эсептейбиз) 15 км аралыкта жайланышкан кыштакка шоссе боюнча бургулоочу мунарадан чабарман жиберүү керек. Велосипед минген чабармандын талаадагы ылдамдыгы 8 км/саат, ал эми шосседеги ылдамдыгы 10 км/саат. Эң аз убакытта кыштакка жетүү үчүн ал шоссенин кайсы чекитинен чыгышы керек?





**321.** Көлдүн жээгинин эң жакынкы $A$ чекитинен 3 км аралыкта кайык жүрөт. Кайыктагы адам $A$ чекитинен 5 км аралыкта жайланышкан жээктеги $B$ айылына (жээктин $AB$ бөлүгү түз сызыктуу деп эсептелет) баргысы келет. Кайык 4 км/саат ылдамдык менен кыймылдайт, ал эми кайыктагы адам, кайыктан түшүп алып саатына 5 км жүрө алат. Адам айылга эң кыска убакытта барыш үчүн, кайык жээктин кайсы пунктуна токтошу керек?

**322.** Кандайдыр бир сан менен анын квадратынын суммасы эң кичине мааниге ээ болсун үчүн, ал сан кандай болушу керек?

**323.** Берилген гипотенузалуу бардык тик бурчтуу үч бурчтуктардын ичинен тең капталдуусу эң чоң аянтка ээ болорун далилдегиле.

**324.** Айланага ичтен сызылган бардык тик бурчтардын ичинен, эң чоң аянтка ээ болгонун тапкыла.

**325.** Берилген тегерекке ичтен сызылган бардык тең капталдуу үч бурчтуктардын арасынан, тең жактуу үч бурчтук эң чоң аянтка ээ болорун көрсөткүлө.

## Тарыхтан маалыматтар

**1. Терминдердин жана белгилөөлөрдүн келип чыгышы жөнүндө.** Туундулар жана алардын функцияларды изилдөөгө колдонулуштарын үйрөтүүчү математиканын бөлүгү *дифференциалдык эсептөөлөр* деп аталат. Туундулар менен иштөөдө, айырманы билдирүүчү $\Delta f$ түрүндөгү өсүндү белгилүү ролду ойнойт. Ошондуктан *айырмаларды эсептөө* деп которулуучу Calculis differentialis жаңы эсептөөлөрдүн аталышында латындын differentia (айырма) деген сөзүнүн уңгусу пайда болгон; бул аталыш XVII кылымдын аягында, б. а. жаңы методдун туулушу менен эле пайда болгон.

«Туунду» термини француздун derivee деген сөзүнүн сөзмө сөз котормосу жана аны 1797-жылы Ж. Л а г р а н ж (1736—1813) киргизген; ал азыркы кездеги $y'$, $f'$ белгилөөлөрүн да киргизген. Мындай аталыш төмөнкү түшүнүктүн маанисин чагылдырат: $f'(x)$ функциясы да $f(x)$ тен пайда болот жана $f(x)$ тин туундусу болот. И. Ньютон функциянын туундусун *флюксия*, ал эми функциянын өзүн *флюента* деп атаган. Г. Лейбниц *дифференциалдык катыш* жөнүндө сөз кылган жана туундуну $\frac{df}{dx}$ түрүндө белгилеген. Бул белгилөө да азыркы кездеги адабиятта көп кездешет.

$df$ символун Лейбниц $f$ функциясынын *дифференциалын* белгилөө үчүн тандап алган. $f$ функциясынын $df$ дифференциалы — бул $f'(x_0)$ туундусу менен $\Delta x$ өсүндүсүнүн көбөйтүндүсү, б.а.

$df = f'(x_0)\,\Delta x$; $\Delta x$ ти $dx$ менен алмаштырып, муну $df = f'(x_0)\,dx$ же мындан, $f'(x_0)=\frac{df}{dx}$ деп жазууга болот.

Дифференциалдын геометриалык мааниси 115-сүрөттү кароодон ачык болот: мында $df = AB$, $l$ түз сызыгы — графикке жүргүзүлгөн жаныма.

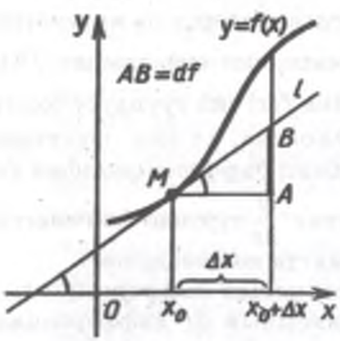
Дифференциалдык эсептөөлөрдө кабыл алынган терминологиялардын келип чыгышы жөнүндөгү маалыматтарга *предел* жана *чексиз кичине* жөнүндөгү түшүнүктөрдү кошпосок, толук болбос эле. Предел жөнүндө, анын майда-чүйдөсүнө чейин төмөндө сөз болот. Азырынча, мисалы, туунду бардык эле колдонмолордо, предел катары аныкталарын эскертебиз. Жогоруда кабыл алынган $\Delta x \to 0$ учурда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ деген белгилөөнүн ордуна $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ деп жазышат.

lim деген белгилөө — латындын *limes* (чек, чек ара, чети) деген сөзүнүн кыскартылышы, мисалы, $\Delta x$ ти кичирейтүү менен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ тин маанисин $f'(x_0)$ «чегине» умтултабыз. «Предел» терминин Ньютон киргизген.

Чексиз кичиненин мисалы болуп $\Delta x$ тен $(\Delta x)^2$ функциясы эсептелет, анткени $\Delta x \to 0$ учурда $(\Delta x)^2 \to 0$. Жалпысынан, эгерде $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ болсо, $\alpha(x)$ – чексиз кичине деп айтылат. Чексиз кичинелер математикалык анализде маанилүү ролду ойнойт, ошондуктан ал, кээде чексиз кичинелердин анализи деп да аталат.

Акырында, «экстремум» деген сөз латындын *extremum* (четки) деген сөзүнөн алынгандыгын эскертебиз.

Maximum — эң чоң, ал эми minimum — эң кичине деп аталат.




115-сүрөт

**2. Дифференциалдык эсептөөлөрдүн тарыхынан.** 1) Дифференциалдык эсептөөлөр Ньютон жана Лейбництер тарабынан, салыштырмалуу жакында эле, XVII жүз жылдыктын аягында түзүлгөн. Анын үстүнө, андан бир аз эле мурда, Архимед спираль сыяктанган татаал ийриге жаныма жүргүзүү маселесин гана чыгарбастан (пределге өтүүнү пайдаланып) $f(x)=x^2(a-x)$ функциясынын максимумун да тапкандыгы таң каларлык.





Лейбниц Готфрид Фридрих (1646—1716) — улуу немец окумуштуусу. Философ, математик, физик, юрист, тилчи. Математикалык анализдин түзүүчүсү (Ньютон менен бирге). Математикалык чоң мектептин негиздөөчүсү. Лейбництин идеялары математикалык логиканын өнүгүүсүнө олуттуу таасир тийгизген.

Жаныма түшүнүгү (бул түшүнүк туунду түшүнүгү менен байланыштуу экендигин билесиңер) италиялык математик Тартальинин (1500—1557-жылдардын тегереги) эмгектеринде мезгил-мезгили менен кездешип турган. Мында жаныма түшүнүгү снаряддын учуу алыстыгынын эң чоң болушун камсыз кылууга керек болгон куралдын жантаюу бурчун изилдөөнүн жүрүшүндө пайда болгон. И. Кеплер жаныманы, берилген радиустагы шарга ичтен сызылган эң чоң көлөмдүү параллелипипед жөнүндөгү маселени чыгарууда караган.

XVII кылымда Г. Галилейдин кыймыл жөнүндөгү окуусунун негизинде туундунун кинематикалык концепциясы активдүү өнүккөн. Туундунун ар түрдүү маселелерге колдонулуштарынын ар түрдүү баяндамалары Р. Декарттын, француз математиги Робервалдын (1602—1675), англиялык окумуштуу Д. Грегоринин (1638—1675), И. Барроунун (1630 — 1677) жан эң акырында, И. Ньютондун эмгектеринде кездешет.

Декартка оптикалык линзалардын касиеттерин үйрөнүү (изилдөө) учурунда жаныманы жана *нормалды* (жануу чекитинде жанымага перпендикулярдуу болгон түз сызык нормаль деп аталат) кароого туура келген. Аналитикалык геометриянын ыкмаларын жана өзү ойлоп тапкан *аныкталбаган коэффициенттер ыкмасынын* жардамы менен, ал бир нече ийриге, анын ичинде эллипске нормаль түзүү жөнүндөгү маселени чыгарууга жетишкен.

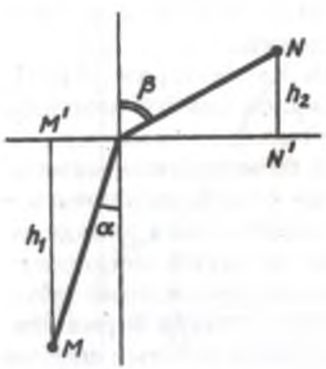
1629-жылы П. Ферма көп мүчөлөрдүн экстремумдарын табуунун эрежесин сунуш кылган. Бул эрежелерди алууда Ферма максимум жана минимумдун эң жөнөкөй дифференциалдык шартын билүү менен, пределге өтүүлөрдү активдүү пайдалангандыгы өтө маанилүү экендигин белгилөө керек.

**Ферма Пьер**

**(1601—1665)—**
француз математиги жана юристи. Өз учурундагы ири математиктердин бири. Сандардын теориясынын областындагы мыкты эмгектер Фермага таандык. Аналитикалык геометриянын түзүүчүсү, ал бул жагдайда бир кыйла ири жыйынтыктарды алган.

Ферма математиканын өнүгүшүндө көрүнүктүү ролду ойногон. Анын атын адилеттүү алып жүргөн силерге анализден белгилүү болгон теорема гана эмес. Ушул кезге чейин далилдене элек Ферманын улуу теоремасы («$x^n + y^n = z^n$ теңдемеси $n$ экиден чоң натуралдык маанилерди алганда натуралдык чыгарылыштарга ээ боло албайт») анын сандарынын теориясынын проблемалары боюнча ой жүргүзүүлөрүндөгү жыйынтыктарынын бирөө гана.

Ферма аналитикалык геометрияны түзүүчүлөрдүн бири. Ал оптика менен да иш жүргүзгөн. Азыркы кездеги физикада колдонулуп жүргөн Ферманын принциби («Жарык шооласы эң кыска убакытта таралат») кеңири белгилүү. Бул принциптин маанилүү касиеттерин өз алдыңарча ала аласыңар. Жарыктын чагылуу закону («Чагылуу бурчу түшүү бурчуна барабар») Ферманын принцибине ылайык, белгилүү геометриялык маселени чыгарууга келтирилет. Силерге *жарыктын сынуу законун* чыгаруу үчүн экстремумду табуунун белгилүү эжелерин колдонууга туура келет. (Мындай маселени чыгарууга туура келет (116-сүрөт): «Жарык шооласы төмөнкү жарым тегиздиктин $M$ чекитинен жогоркунун $N$ чекитине өтөт. Жарыктын төмөнкү жарым тегиздиктеги (бир тектүү чөйрө) ылдамдыгы турактуу жана $v_1$ ге, ал эми жогорку жарым тегиздигиси $v_2$ ге барабар. Бардык жолго эң кичине убакыт сарп кылуу үчүн, чекит кандай жол менен кыймылдоого тийиш?») Туунду жөнүндөгү системалуу окуу Лейбниц жана Ньютон тарабынан өнүк-




116-сүрөт



**Коши Огюстен Луи**

**(1789—1857)—**
француздук ири математик. Анализге, комплекстик өзгөрүүчүнүн функциясынын теориясына, дифференциалдык теңдемелердин теориясына ж. б. областарга тиешелүү болгон бир катар теоремаларды далилдеген. Кошинин сиңирген эмгеги — бул азыр классикалык болуп калган функциянын пределинин, үзгүлтүксүздүгүнүн ж. б. аныктамаларын сунуш кылгандыгы жана анализдин курсун иштеп чыккандыгы.

түрүлгөн, ал анализдин төмөнкү эки негизги проблемасын формулировкалаган:

«1. Өтүлүүчү жолдун узундугу турактуу (б. а убакыттын каалаган моментинде) берилген; кыймылдын ылдамдыгын сунуш кылынган убакытта табуу талап этилет.

2. Кыймылдын ылдамдыгы турактуу берилген; өтүлгөн жолдун узундугун, сунуш кылынган убакытта табуу талап этилет».

Силер элементтери менен ушул главадан таанышкан дифференциалдык эсептөөлөрдү өнүктүрүүнүн программасын биринчи проблема берет. Экинчиси интегралдык эсептөөлөргө таандык (III главаны кара).

Эгерде Ньютон негизинен механиканын маселелеринен баштаган болсо (Ньютондун анализи Ньютондун классикалык механикасы менен бир учурда түзүлгөн), анда Лейбниц көбүнчө геометриялык маселелерден баштаган.

Анализдин идеяларынын андан аркы өнүгүшү жөнүндө айтууда (ал идеялар тез эле белгилүү болгон жана өзүлөрүнүн көп сандаган улантуучуларын табышкан), биринчи кезекте Лейбництин окуучулары — бир туугандар Я. жана И. Бернуллилердин ысымдарын атоо керек. И. Бернуллиден окуган А. Л о п и т а л ь (1661—1704) 1696-жылы, жаңы методдорду таркатууга көмөкчү болуп калган, дифференциалдык эсептөөлөрдүн «Ийри сызыктарды изилдөө үчүн чексиз кичинелердин анализи» деген курсун биринчи басып чыгарган.

Лагранж бир катар ири жыйынтыктарды алган, анын эмгектери анализдин негиздери боюнча ой жүгүртүүдө маанилүү роль ойношкон. Математиканын көп сандаган башка бөлүмдөрүндөгү сыяктуу эле, математикалык анализдин өнүгүүсүнө Л. Эйлер менен К. Ф. Г а у с с т у н (1777—1855) кошкон салымдары баа жеткис.

Кыска очеркте XVIII кылымда жана андан кийин жасалган ачылыштардын мазмуну жөнүндө айтып берүүгө мүмкүн эмес. Ошондой болсо да, бир багыт жөнүндө айтпай коюуга болбойт. Сөз, функцияны даражалуу катарга ажыратуу, б. а. функцияны чексиз көп кошулуучулары бар көп мүчө түрүндө жазуу жөнүндө бара жатат. Чексиз сумманын мисалы менен (сан катары) таанышсыңар: мезгилдүү бөлчөктөр чексиз көп кошулуучулардын суммасы түрүндө көрсөтүлгөн. Сан жана функциялык катарлар менен Ньютон гана эмес, ага чейинкилер да иштешкен. Ошондуктан

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \ldots$$

эң сонун барабардыгын *Тейлордун формуласы* деп атоо анчалык адилеттүү эмес (Б. Т е й л о р (1685—1731)— англиялык математик, 1715-жылы бул формуланы жарыялаган), (мында $f^{(n)}(x_0)$ деген $f$ функциясынын $x_0$ чекитинде $n$ жолу дифференцирлөөдөн алынган маани, ал эми $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$). Силер, мисалы, $\sin x$ жана $\cos x$ функциялары үчүн алардын туундуларынын формулаларын билүү менен, аларды Тейлордун катарына өз алдынарча ажырата аласыңар.

Кээ бир учурларда, чексиз көп кошулуучуларды таштап коюу менен, функцияны ага жетишерлик жакын болгон көп мүчө аркылуу алмаштыруучу формуланы алууга болот.

2) Ар түрдүү маселелерди чыгарууга мүмкүнчүлүк түзгөн кубаттуу жаңы методдун пайда болушунан улам келип чыккан энтузиазм, XVIII кылымда анализдин дүркүрөп өнүгүшүнө көмөк түзгөн. Бирок ошол кылымдын аягында, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн түзүүлөрүндө пайда болгон проблемалар өтө курчуган. Негизги кыйынчылык *предел, үзгүлтүксүздүк, чыныгы сан* өңдөнгөн өтө маанилүү түшүнүктөрдүн так аныктамаларынын жоктугунда болгон (натыйжада ой жүгүртүүлөрдө логикалык кемчиликтер, ал түгүл, кээде жаңылыштыктар болгон).

Үзгүлтүксүздүктүн аныктамасы — буга мүнөздүү мисал. Эйлер, Лагранж, ал түгүл Фурье дагы (ал XIX кылымдын башында да иштеген), өзүнүн аныкталуу областында бир гана аналитикалык туюнтма менен берилген функцияны үзгүлтүксүз деп аташкан.

Мына ушуну менен «жаңы» математика, грек математиктеринин классикалык үлгүсүндө тарбияланышкан окумуштуулар үчүн адат болуп калган, тактык стандартына жооп бере алган эмес. Математиктер үчүн өтө зарыл болгон интуиция, математика илиминин ажырагыс мүнөзү болгон логиканы жетишерлик аныктаган Ньютон, Лейбниц, Эйлер сыяктанган алптардын (гиганттардын) гениалдуу интуициялары, алардын жаңылыштык кетирбөөсүнө жардам берген. Бирок бекем логикалык негиз керек болгон.





XVIII жүз жылдыкка тиешелүү болгон эки айтылыш мүнөздүү. Белгилүү математик М. Р о л л ь, жаңы эсептөө гениалдуу жаңылыштыктардын коллекциясы деп жазган. Ал эми улуу француз ойчулу Вольтер, бул эсептөө бар экендиги далилденбей турган нерселерди так өлчөөнү жана эсептөөнүн искусствосун элестетерин байкаган.

Өткөн кылымдын 20-жылдарында, анализдин бекем фундаментин түзүүдө француз математиги О. К о ш и (1789—1857) тарабынан чечкиндүү кадам жасалган. Ал функциянын жана удаалаштыктын пределдеринин так аныктамаларын сунуш кылган жана алардын негизинде анализдин фундаменталдык көп теоремаларын далилдеген. Мындан мурунураак (1821-ж.), пределдин, үзгүлтүксүздүктүн аныктамасын жана башка кыйла эң сонун жыйынтыктарды (анын ичинде, кесиндиде үзгүлтүксүз болгон менен, анын бир да чекитинде туундусу болбогон функциянын атактуу мисалын түзгөн) чех математиги Б. Б о л ь ц а н о (1781—1848) алган, бирок анын эмгектери кийинчерээк гана белгилүү болгон.

Функциянын пределинин Коши боюнча аныктамасы мындай формулировкаланат: «Эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн, $\delta > 0$ санын, $0 < |x - a| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырышкан бардык $x$ тер үчүн $|f(x) - A| < \varepsilon$ аткарылгандай кылып табууга мүмкүн болсо, $A$ саны $f(x)$ функциясынын $x$ өзгөрүшү $a$ га умтулгандагы предели деп аталат (б.а. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$)».

Бул аныктамага таянып, чекиттеги үзгүлтүксүздүктүн аныктамасын берүү жеңил эле: эгерде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ болсо, $f$ функциясы $x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз.

Удаалаштыктын пределинин аныктамасы (мына так ушул түшүнүк менен интегралдын аныктамасы байланыштуу — 30-пунктту кара) мындай: «Эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн, $N$ номери, $n>N$ болгон бардык $n$ дер үчүн, $|a_n - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылгандай болуп табылса, анда $A$ саны $a_n$ *удаалаштыгынын предели* деп аталат».

Кош пределдер жөнүндөгү биз иш жүзүндө, туундуларды эсептөөдө пайдаланган төмөнкү теоремаларды (14-пунктта — пределге өтүүнүн эрежелери деп атадык) далилдеген:

*Эгерде* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *жана* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *болсо, анда сумманын, айырманын, көбөйтүндүнүн жана тийиндинин* ($\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ *болгондо) пределдери болушат жана*

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

**Кантор Георг**

(1845 — 1918)— немец математиги, анын идеялары жана эмгектери, бүткүл математиканын өнүгүшүнө жана анын негиздерин түшүнүүгө зор таасирин тийгизген. Чексиз көптүктөр теориясына, чыныгы сандардын теориясына тиешелүү болушкан бир катар мыкты жыйынтыктарды алган.

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = A\cdot B\,,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,.$$

«Коши боюнча» далилдөөнүн мисалын келтиребиз (көбүнчө: «эпсилон — дельта тилинде» деп айтышат). Сумманын предели жөнүндөгү теореманы далилдейбиз.

Каалагандай оң $\varepsilon > 0$ санын алабыз. Анда $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ болот, ошондуктан, (Кошинин аныктамасы боюнча):

1) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ шартынан, $\delta_1$ санын $0 < |x - a| < \delta_1$ барабарсыздыгын канааттандырышкан бардык $x$ тер үчүн,

$$|f(x) = A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

аткарылгандай кылып табууга болору келип чыгат.

2) $\lim_{x\to a} f(x) = B$ шартынан: $\delta_2 > 0$ санынын, $0 < |x - a| < \delta_2$ барабарсыздыгын канааттандырышкан бардык $x$ тер үчүн,

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

аткарылгандай болуп табылары келип чыгат.

$\delta_1$ жана $\delta_2$ сандарынын эң кичинесин $\delta$ аркылуу белгилейбиз. Анда $0 < |x - a| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырышкан бардык $x$ тер үчүн (1) жана (2) барабарсыздыктар бир эле учурда аткарылышат; мындай $x$ тер үчүн:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \le |f(x) - A| +$$
$$+|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$



**Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм**

(1815—1897)— математиканын ар түрдүү областындагы классикалык теоремаларды далилдеген немец математиги. Вейерштрасстын эмгектери менен, математикалык анализди негиздөө жана анын иреттүү, так теориясын түзүү аяктайт.

Мына ушуну менен $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$ экендиги далилденди.

Калган эрежелер (көбөйтүндү жана тийинди үчүн) ушуга окшош далилденет.

XVII кылымда математикада болуп өткөн төңкөрүштүн тереңдигинин ачык мүнөздөмөсүн Карл Маркс жана Фридрих Энгельс беришкен.

Функция, чексиз кичине чоңдук, пределдер жана туундулар түшүнүктөр менен байланышкан математиканын жаңы тармактарынын өнүгүшүнүн баштапгыч мезгили, Маркс тарабынан «мистика» (чындыкка жакындабаган, сырдуу деген мааниде) катары мүнөздөлгөн.

XVII кылымдагы көп математиктердин урааны: «Алга карай жана бергиле, алынган жыйынтыктардын тууралыгына ишенүү силерге келет» деген сөздөр болгон.

**3. Чыныгы сандар түшүнүгү жөнүндө.** Математикалык анализ XVIII кылымда пайда болгон. Бирок анын толук негизделиши XIX жүз жылдыктын аягында гана, Коши тарабынан түзүлгөн пределдер теориясынан кийин, немец математиктери Р. Дедекинд (1831—1916), К. Вейерштрасс (1815—1897) жана Г. Кантор (1845—1918) тарабынан дароо эле, ар түрдүү формада чыныгы сандардын теориясы түзүлгөндөн кийин берилген.

Сандар жөнүндөгү алгачкы көз караштар акырындык менен турмуштун таасири астында калыптанган. Сандар эзелтен бери эле, чоңдуктарды саноодо жана өлчөөдө колдонулуп келген.

«Берилген чектүү көптүктүн канча элементи болот?» деген суроого, дайыма эле, же натуралдык сан аркылуу же нөл аркылуу жооп берилет. Демек, бардык терс эмес сандардын

$$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

көптүгү саноонун бардык муктаждыктарын канааттандырат (тейлейт).

Чоңдуктарды ченөөдө иш башкача. Эки пункттун аралыгы 3,5 километрге барабар, бөлмөнүн аянты — 16,45 квадрат метрге барабар боло алат ж.б.

Чоңдуктар ар түрдүү болушат. Эки мисал келтиребиз.

1. Чекиттердин аралыгы, кесиндилердин, сынык сызыктардын жана ийринин аралыктары — мунун бардыгы бир түркүн чоңдуктар. Буларды сантиметр, метр, километр ж.б. аркылуу туюндурушат.

2. Убакыттар аралыктарынын узактыгы дагы бир түркүн. Аларды секунда, мүнөт, саат ж.б. аркылуу туюндурушат.

Бир түркүн чоңдуктарды өз ара *салыштырууга* жана *кошууга* болот:

| | |
|---|---|
| 1м > 90см | 350 м + 650 м = 1км |
| 300 с < 1 саат | 2 саат + 3 саат = 5 саат |
| 1кг > 720 г | 500 г + 500 г = 1 кг |

Бирок, 1 метр чоңбу же 1 саат чоңбу деп суроонун эч кандай мааниси жок: 1 метрди 30 секунда менен кошууга да болбойт. Убакыт аралыгынын узактыгы жана аралык — булар ар түркүн чоңдуктар. Ар түркүн чоңдуктарды кошууга жана салыштырууга болбойт.

Чоңдукту оң санга жана нөлгө көбөйтүүгө болот. $a$ чоңдугун терс эмес $x$ санына көбөйтүүнүн натыйжасында ошол эле түркүндөгү $b = xa$ чоңдугу алынат. Бир нече мисал келтирели:

$$5 \cdot 20 \text{ см} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$$

$$0{,}01 \cdot 20 \text{ см} = 0{,}2 \text{ см} = 2 \text{ мм}$$

$$0 \cdot 20 \text{ см} = 0 \text{ см}.$$

Кандайдыр бир $e$ чоңдугун өлчөөнүн чен бирдиги үчүн кабыл алып, анын жардамы менен ошол эле түркүндөгү ар кандай $a$ чоңдугун да ченөөгө болот. Өлчөөнүн жыйынтыгында $a = xe$ (мында $x$— сан) экендигин алабыз.

Бул $x$ саны, чен бирдиги $e$ болгондогу $a$ чоңдугунун сан мааниси деп аталат. Чоңдуктун сан мааниси чен бирдигин тандап алууга көз каранды. Мисалы, чен бирдиги 1 м ($e = 1$м) болгондо бөлмөнүн узундугунун сан мааниси 5,6 болсо, чен бирдиги 1 см ($e = 1$см) болгондо, ушул эле узундуктун сан мааниси 560 болот.

Чен бирдиктери бир эле $e$ болгондо $a$ жана $b$ чоңдуктарынын сан маанилери $x$ жана $y$ болсун дейли, б. а. $a = xe$, $b = ye$ болсун. Эгерде $b \neq 0$ болсо, анда $\frac{x}{y}$ катышы $a$ чоңдугунун $b$ чоңдугуна



болгон катышы деп аталат. Чоңдуктар жөнүндө эң жөнөкөй маалыматтар мына ушулар. Чоңдуктардын бул айтылган түшүндүрмөлөрү сан жөнүндөгү түшүнүккө таянды. Бирок тарыхый жол башкача болгон: чыныгы оң сандар чоңдуктардын катышы түрүндө пайда болушкан (тагыраак айтканда, кесиндилердин узундуктарынын катышы түрүндө).

Бирдик квадраттын диагоналынын анын жактары аркылуу ченелбестиги ачылгандан кийин, кесиндилердин узундуктарынын катышы дайыма эле натуралдык гана сан эмес, рационалдык сан менен да туюндурулушу мүмкүн эмес экендиги ачык болуп калган. Берилген чен бирдикте, ар бир кесиндинин сан маанисин аныктоо үчүн, жаңы сандарды — иррационалдык сандарды киргизүү талап кылынган. Иш жүзүндө чоңдуктарды өлчөөнүн бардыгы жакындаштырылган гана мүнөздө болушат. Алардын жыйынтыктарын талап этилген тактыкта рационалдык бөлчөктөрдүн жардамы менен же атайын ыкманын — чектүү ондук бөлчөктөрдүн жардамы менен туюндурууга болот. Мисалы, жагы 1 м болгон квадраттын диагоналын бир сантиметрге чейинки тактык менен өлчөп, анын узундугу болжол менен 1,41м болорун байкайбыз. Бир миллиметрге чейинки тактык менен ченегенде, ушул эле узундук болжол менен 1,414 м болот.

Бирок математикада өлчөөнүн болжолдуу мүнөзүнөн четтөөгө туура келет. Кесиндилердин узундуктарын ченөөгө теориялык жактан ыраатуулук менен мамиле кылуу, чексиз ондук бөлчөктөрдү кароого алып келген.(Атап айтканда, мына ушундай бөлчөктөр

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots,\ \sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots,\ \pi = 3{,}14159265\ldots$$

сандары аркылуу көрсөтүлүшөт.)

Ар кандай кесиндинин узундугунун, чен бирдик үчүн кабыл алынган кесиндинин узундугуна болгон катышы, дайыма чексиз ондук бөлчөк түрүндө көрсөтүлүүчү сан аркылуу туюнтулушу мүмкүн.

Чыныгы сандардын толук теориясы жетишерлик татаал жана орто мектептин программасына кирбейт. Ошондой болсо да, ал теорияны түзүүнүн ыкмаларынын бирөө менен жалпы жонунан таанышып өтөлү.

1. Бул жерде:

а) ар бир чыныгы санга (аны жазылышы түрүндө)

$$x = a_0,\ a_1 a_2\ a_3 \ldots a_n \ldots$$

чексиз ондук бөлчөк туура келет;

б) ар кандай чексиз ондук бөлчөк кандайдыр бир чыныгы сандын жазылышы болот деп кабыл алынат.

Мында чексиз көп тогуздар менен бүтүүчү чексиз ондук бөлчөктү, чексиз көп нөлдөр менен бүтүүчү ондук бөлчөк аркылуу туюндурулуучу сандын жазылышынын экинчи түрү деп эсептөөгө болот:

$$0,9999\ldots = 1,0000\ldots;\quad 12,765999\ldots = 12,766000\ldots.$$

Мындай макулдашууну төмөнкү мисал менен түшүндүрүүгө болот:

$$0,(9) = 3\cdot 0,(3) = 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$

Мезгили тогуз болгон ондук бөлчөктөрдү кароодон чыгарып салуу аркылуу гана, чыныгы сандардын көптүгү менен чексиз ондук бөлчөктөрдүн көптүгүнүн арасындагы өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүктү алууга болот.

$a_0$ саны — оң $x$ санынын *бүтүн бөлүгү*, ал эми $x - a_0 = 0,$ $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ саны $x$ санынын *бөлчөк бөлүгү*.

$x_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ саны $x$ тин $10^{-n}$ тактыктагы кеми менен болгон жакындаштыруусу деп, ал эми $x'_n = x_n + 10^{-n}$ саны $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ санынын $10^{-n}$ тактыктагы ашыгы менен болгон жакындаштыруусу деп аталат.

Эгерде $x$ терс болсо, б.а. $x = -a_0, a_1 a_2\ a_3 \ldots a_n \ldots$ болсо, анда $x'_n = -a_0, a_1 a_2\ a_3 \ldots a_n$ жана $x_n = x'_n - 10^{-n}$ деп эсептелинет.

2. Эки чыныгы санды *салыштыруу эрежеси* мындай киргизилет. Аныктама боюнча $n$ дин жок дегенде бир маанисинде $x_n < y_n$ барабарсыздыгы аткарылса, мында $x_n$ жана $y_n$ дер $x$ жана $y$ сандарынын $10^{-n}$ ге чейинки тактыктагы кеми менен алынган жакындаштыруулары, анда $x$ саны $y$ санынан кичине болот. (Чектүү ондук бөлчөктөрдү салыштыруу эрежеси бизге белгилүү деп эсептедик.)

3.Чыныгы сандар менен жүргүзүлүүчү *арифметикалык амалдар* (мында дагы бул амалдар чектүү ондук бөлчөктөр үчүн аныкталган деп эсептелет) төмөнкүдөй аныкталат.

$x$ жана $y$ эки ондук чыныгы сандарынын *суммасы* деп ($x+y$ деп белгиленет) $n$ дин ар кандай маанисинде,

$$x_n + y_n \le x + y < x'_n + y'_n$$

барабарсыздыгы аткарыла турган чыныгы $z$ санын айтабыз.

Мындай сандын бар экендиги жана жалгыз гана бирөө боло тургандыгы математикалык анализдин курстарында далилденет.

Ушул сыяктуу эле терс эмес $x$ жана $y$ сандарынын көбөйтүндүсү деп (ал $xy$ аркылуу белгиленет) $n$ дин ар кандай маанисинде

$$x_n y_n \le xy < x'_n y'_n$$

барабарсыздыгы аткарыла турган чыныгы $z$ санын айтышат.





Мындай сан бар жана бир маанилүү аныкталат. Ар түрдүү белгидеги чыныгы сандар үчүн терс эмес ($x$) жана ($y$) сандарынын көбөйтүндүсүнүн аныкталгандыгынан пайдаланып $xy = -|x|\cdot|y|$ деп эсептешет; калган учурларда $xy = |x|\cdot|y|$.

(Адаттагыдай эле $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ жана $-a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ сандарынын модулу деп $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ санын айтышат.)

Кемитүү амалы кошууга тескери амал катарында аныкталат:

$x$ жана $y$ сандарынын $x - y$ *айырмасы* деп $y + z = x$ болгон $z$ саны айтылат, ал эми бөлүү амалы — көбөйтүүгө тескери амал түрүндө аныкталат: $x : y$ тийиндиси деп $yz = x$ болгон $z$ саны айтылат.

4.3-пунктта аныкталган барабарсыздыктар жана арифметикалык амалдар үчүн, рационалдык сандардын көптүгүнө тиешелүү болгон негизги касиеттердин сакталышы көрсөтүлөт.

### *Кайталоо үчүн суроолор жана маселелер*

1. 1) Аргументтин жана функциянын өсүндүсү деген эмне?

   2) $\Delta x$ жана $\Delta f$ өсүндүсүнүн, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ катышынын геометриялык мааниси эмнеде?

   3) а) $f(x) = x^2 - x$;  б) $f(x) = x^3 + 2$;  в) $f(x) = 3x - 1$;  г) $f(x) = \frac{2}{x}$ болсо, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ катышын $x_0$ жана $\Delta x$ аркылуу туюндургула.

2. 1) Функциянын чекиттеги туундусунун аныктамасын формулировкалагыла.

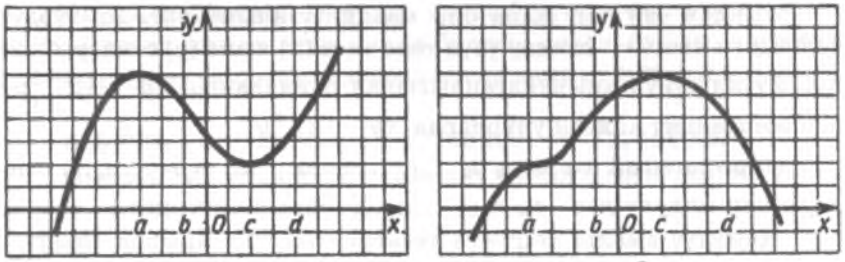
   2) Аныктаманы пайдаланып, $f$ функциясынын туундусун $x_0$ чекитинде тапкыла:

   а) $f(x) = x^2 + 1,\ x_0 = -2$;  б) $f(x) = \frac{2}{x},\ x_0 = 3$;

   в) $f(x) = 2x - 1,\ x_0 = -4$;  г) $f(x) = x^3,\ x_0 = 2$.

3. 1) Туундуларды эсептөө эрежелерин формулировкалагыла. $f(x) = x^n$ ($n$ — бүтүн сан) функциясынын туундусу эмнеге барабар?

   2) Дифференцирленүүчү $f$ функциясы графиги менен берилген (117-сүрөт). Көрсөтүлгөн чекиттерде $f$ тин графигине жанымалар түзгүлө жана $a, b, c, d$ чекиттеринде туундунун жакындаштырылган маанилерин тапкыла.




а) б)

117-сүрөт

3) Төмөнкү функцияларды дифференцирлегиле:

а) $f(x) = (x + 2)\sin x$; б) $f(x) = \frac{4}{(9 + 7x)^5}$;

в) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \cos 3x$; г) $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$.

4. 1) Кандай функция аралыкта үзгүлтүксүз деп аталат?

2) Төмөнкү функциялардын үзгүлтүксүздүк аралыктарын тапкыла:

а) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{4 - x^2}$; б) $f(x) = 1 - 2\operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 10}$; г) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$.

3) Интервалдар методу менен төмөнкү барабарсыздыктарды чыгаргыла:

а) $\frac{4}{x + 4} + \frac{1}{x + 1} > 1$; б) $x^4 - 15x^2 - 16 \le 0$;

в) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \le 0$; г) $(x - 1)(x - 2)(x + 4) \ge 0$.

5. 1) $(x_0; f(x_0))$ чекитинде кандай түз сызыкты $f$ функциясынын графигине жаныма деп аташат?

2) Туундунун геометриялык мааниси эмнеде?

3) $f$ функциясынын графигинин $(x_0; f(x_0))$ чекитиндеги жанымасынын теңдемесин жазгыла:

а) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$; г) $f(x) = x^2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$.

6. 1) $x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү функциянын маанилерин жакындаштырып эсептөө үчүн жалпы формуланы жазгыла.





а) $f(x) = x^n$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = \sqrt{x}$; г) $f(x) = \frac{1}{x}$.

3) Төмөнкү туюнтмаларынын жакындаштырылган маанилерин эсептегиле:

а) $\frac{1}{1,001^{10}}$; б) $\sin 59^0$; в) $\sqrt{9,009}$; г) $0,999^{15}$.

7. 1) Туундунун механикалык мааниси эмнеде?

2) Нерсе түз сызык боюнча $x(t)$ законуна ылайык кыймылдайт. Убакыттын каалаган $t$ моментинде нерсенин ылдамдыгын жана ылдамдануусун табуу формуласын жазгыла.

3) Эгерде:

а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$, $t_0 = 4$; б) $x(t) = 3\cos 2t$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $x(t) = 5t - t^2$, $t_0 = 2$; г) $x(t) = 2t^2 + t - 4$, $t_0 = 4$

болсо, $t_0$ моментиндеги чекиттин ылдамдыгын жана ылдамдануусун тапкыла.

8. 1) Лагранждын формуласын жазгыла.

2) Функциянын өсүү (кемүү) белгисин формулировкалагыла.

3) Төмөнкү функцияларды өсүүгө жана кемүүгө изилдегиле:

а) $y = \frac{x}{x^2 + 9}$; б) $y = 3x - \sin 3x$;

в) $y = x^4 - 4x$; г) $y = x^2 + \frac{16}{x}$.

9. 1) Функциянын сыналуучу чекити деп кандай чекитти айтышат?

2) Функциянын максимумдук (минимумдук) белгисин формулировкалагыла.

3) Төмөнкү функцияларды максимумга (минимумга) изилдегиле:

а) $y = \frac{x}{2} - x^4$; б) $y = 2\sin x + \cos 2x$;

в) $y = x^3 - 3x$; г) $y = x - \operatorname{tg} x$.

10. 1) Функцияны изилдөө схемасын айткыла.

2) Төмөнкү функцияларды туундунун жардамы менен изилдегиле:

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$.

3) Жалпы схема боюнча $f$ функциясын изилдегиле жана

анын графигин түзгүлө:

а) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$; б) $f(x) = x^2(x-2)^2$;

в) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$.

**11.** 1) Кесиндиде функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу эрежесин формулировкалагыла.

2) Берилген кесиндиде функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $f(x) = 0{,}8x^5 - 4x^3$, $[-1;\ 2]$; б) $f(x) = x - \sin 2x$, $[0;\ \frac{\pi}{2}]$;

в) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1;\ 4]$; г) $f(x) = x^2(6-x)$, $[-1;\ 5]$.

3) а) Эки сандын айырмасы 8ге барабар. Ал сандардын биринчисинин кубунун экинчисине болгон көбөйтүндүсү эң кичине болсун үчүн, бул сандар кандай болууга тийиш?

б) Машиналар токтоочу тик бурчтук формасындагы аянтчаны, бир жагы имараттын бир капталы боло тургандай кылып бөлүштү. Аянтчанын үч жагын узундугу 200 м болгон металл тор менен тосушту. Пайда болгон аянтчанын аянты эң чоң болсун үчүн, анын өлчөмдөрү кандай болууга тийиш?



III глава

# БАШТАПКЫ ФУНКЦИЯ ЖАНА ИНТЕГРАЛ

## § 7. БАШТАПКЫ ФУНКЦИЯ

### 26. Баштапкы функциянын аныктамасы

Механикадан мисалды эске түшүрөлү. Эгерде убакыттын баштапкы $t = 0$ моментинде нерсенин ылдамдыгы нөлгө барабар болсо, б.а. $v(0) = 0$ болсо, анда нерсенин эркин түшүүсү убакыттын $t$ моментинде

$$s(t) = \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

жолун өтөт. (1) формула Галилей тарабынан эксперимент жүзүндө табылган.

Дифференцирлөө аркылуу ылдамдыгын табабыз:

$$s'(t) = v(t) = gt. \qquad (2)$$

Экинчи жолу дифференцирлөө ылдамданууну берет:

$$v'(t) = a(t) = g, \qquad (3)$$

б.а. ылдамдануу турактуу болот.

Механика үчүн башка бир абал көбүрөөк типтүү: $a(t)$ ылдамдануусу (биздин учурда ал турактуу) баш ийген закон берилген; $v(t)$ ылдамдыгынын өзгөрүү законун жана $s(t)$ координатасын табуу талап кылынат. Башкача айтканда $a(t)$ га барабар болгон $v'(t)$ функциясынын берилген туундусу боюнча $v(t)$ функциясын табуу, андан кийин $v(t)$ га барабар болгон $s'(t)$ туундусу боюнча $s(t)$ны табуу керек.

Мындай маселелерди чыгаруу үчүн дифференцирлөө операциясына тескери болгон *интегралдоо* операциясы кызмат кылат. Аны менен биз бул главада таанышабыз.

Аныктама. **Эгер берилген аралыктагы бардык $x$ үчүн**

$$F'(x) = f(x) \qquad (4)$$

**болсо, анда $F$ функциясы ушул аралыкта $f$ функциясы үчүн *баштапкы функция* деп аталат.**

○ 1-мисал. $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функциясы $(-\infty;\ \infty)$ интервалында $f(x) = x^2$ функциясы үчүн баштапкы функция болот, анткени бардык $x \in (-\infty;\ \infty)$ үчүн

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

$\frac{x^3}{3}+7$ да ошол эле $x^2$ туундусуна ээ экендигин оңой эле көрүүгө болот. Ошондуктан $\frac{x^3}{3}+7$ функциясы дагы $R$ де $x^2$ үчүн баштапкы функция болуп эсептелет. Эми 7нин ордуна каалаган турактуу чондукту коюуга боло тургандыгы да түшүнүктүү. Мына ошентип, биз баштапкы функцияны табуу маселеси чексиз көп чыгарылышка ээ болорун көрдүк. Силер кийинки пункттан бардык бул чыгарылыштарды кантип табуу керек экендигин көрөсүңөр.

2 - м и с а л. $(0;\ \infty)$ интервалында $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы үчүн $F(x)=2\sqrt{x}$ функциясы баштапкы функция болот, анткени бул аралыктагы бардык $x$ үчүн

$$F'(x)=(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

болот. 1-мисалдагыдай эле $F(x)=2\sqrt{x}+C$ функциясы $C$ каалагандай турактуу чондук болгондо ошол эле $(0;\ \infty)$ интервалында $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы үчүн баштапкы функция болуп эсептелет.

3 - м и с а л. $(-\infty;\ \infty)$ аралыгында $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ функциясынын баштапкы функциясы боло албайт, себеби $F'(x)=f(x)$ барабардыгы 0 чекитинде аткарылбайт. Бирок $(-\infty;\ 0)$ жана $(0;\ \infty)$ аралыктарынын ар биринде $F$ функциясы $f$ үчүн баштапкы болот. ●

### *Көнүгүүлөр*

**326.** $F$ функциясы берилген аралыктарда $f$ функциясы үчүн баштапкы функция экендигин далилдегиле:

а) $F(x)=x^5,\ f(x)=5x^4,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;

б) $F(x)=x^{-3},\ f(x)=-3x^{-4},\ x\in(0;\ \infty)$;

в) $F(x)=\frac{1}{7}x^7,\ f(x)=x^6,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;

г) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6},\ f(x)=x^{-7},\ x\in(0;\ \infty)$.





**327.** Көрсөтүлгөн аралыкта $f$ функциясы үчүн $F$ баштапкы функция боло алабы:

а) $F(x)=3-\sin x,\ f(x)=\cos x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;

б) $F(x)=5-x^4,\ f(x)=-4x^3,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;

в) $F(x)=\cos x-4,\ f(x)=-\sin x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;

г) $F(x)=x^{-2}+2,\ f(x)=\frac{1}{2x^3},\ x\in(0;\ \infty)$?

$R$ де $f$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин тапкыла (328—329)

**328.** а) $f(x)=3{,}5$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=2x$; г) $f(x)=\sin x$.

**329.** а) $f(x)=-\sin x$; б) $f(x)=-x$;

в) $f(x)=-4$; г) $f(x)=-\cos x$.

---

**330.** Көрсөтүлгөн аралыкта $F$ функциясынын баштапкы функциясы $f$ экендигин далилдегиле:

а) $F(x)=\sin^2 x,\ f(x)=\sin 2x,\ x\in R$;

б) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x,\ f(x)=-\sin 2x,\ x\in R$;

в) $F(x)=\sin 3x,\ f(x)=3\cos 3x,\ x\in R$;

г) $F(x)=3+\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ f(x)=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ x\in(-\pi;\pi)$.

**331.** Көрсөтүлгөн аралыкта $f$ функциясы үчүн $F$ баштапкы функция боло алабы:

а) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2},\ f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2},\ x\in R$;

б) $F(x)=\sqrt{4-x^2},\ f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in(-2;\ 2)$;

в) $F(x)=\frac{x}{x^2},\ f(x)=14-\frac{1}{x^2},\ x\in(0;\ \infty)$;

г) $F(x)=4x\sqrt{x},\ f(x)=6\sqrt{x},\ x\in(0;\ \infty)$?

**332.** $R$ де $f$ функциясы үчүн болгон баштапкы функциялардын бирин тапкыла:

а) $f(x)=x+2$; б) $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;

в) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$; г) $f(x)=3x^2+1$.

**333.** $f$ функциясы үчүн анын эки баштапкы функциясын тапкыла:

а) $f(x) = 2x$; б) $f(x) = 1 - \sin x$;

в) $f(x) = x^2$; г) $f(x) = \cos x + 2$.

**334.** Берилген үч функциянын ичинен бирөө анын туундусу жана экинчиси ал үчүн баштапкы функция болгон функцияны көрсөткүлө:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $h(x) = x + \sin x$;

в) $f(x) = 1$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$;

г) $f(x) = 3 - 2\sin x$, $g(x) = 3x + 2\cos x$, $h(x) = -2\cos x$.

## 27. Баштапкы функциялардын негизги касиеттери

**1. Баштапкы функциялардын жалпы түрү.** Берилген функция үчүн анын бардык баштапкы функцияларын табуу маселеси интегралдоо болуп эсептелет. Мындай маселени чыгарууда төмөнкүдөй эреже чоң мааниге ээ.

Функциянын туруктуулугунун белгиси. *Эгерде кандайдыр бир $I$ аралыгында $F'(x) = 0$ болсо, анда $F$ функциясы бул аралыкта туруктуу болот.*

Далилдөө. $I$ аралыгынан кандайдыр $x_0$ чекитин белгилейбиз. Анда бул аралыктын каалаган $x$ саны үчүн Лагранждын формуласынын негизинде

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

барабардыгы аткарылгандай $x$ жана $x_0$ чекиттеринин арасында камалган $c$ санын табууга болот.

$c \in I$ болгондуктан шарт боюнча, $F'(c) = 0$ демек,

$$F(x) - F(x_0) = 0.$$

Ошентип, $I$ аралыгындагы бардык $x$ үчүн

$$F(x) = F(x_0),$$

б.а. $F$ функциясы туруктуу маанисин сактайт.

$f$ функциясынын бардык баштапкы функцияларын бир формула аркылуу жазууга болот жана аны $f$ тин *баштапкы функцияларынын жалпы түрү* деп аташат. Төмөнкү теорема туура болот *(баштапкы функциялардын негизги касиети):*





Теорема. *$I$ аралыгындагы $f$ тин каалагандай баштапкы функциясын*

$$F(x) + C \qquad (1)$$

*түрүндө жазууга болот, мында $F(x)$ – $f(x)$ функциясынын $I$ аралыгындагы баштапкы функцияларынын бири, ал эми $C$ — эрктүү туруктуу сан.*

Баштапкы функциянын эки касиетин камтыган бул кыскача айтылышты түшүндүрө кетели:

1) кандай гана санды (1) туюнтмадагы $C$ нын ордуна койбойлу, $f(x)$ үчүн $I$ аралыгындагы баштапкы функция келип чыгат;

2) $I$ аралыгында $f$ үчүн анын кандай гана $\Phi(x)$ баштапкы функциясын албайлы, $I$ аралыгындагы бардык $x$ үчүн

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

барабардыгы аткарылгандай $C$ санын дайыма табууга болот.

Далилдөө. 1) Шарт боюнча $F$ функциясы $I$ аралыгында $f$ функциясы үчүн баштапкы функция. Демек, ар кандай $x \in I$ үчүн

$$F'(x) = f(x),$$

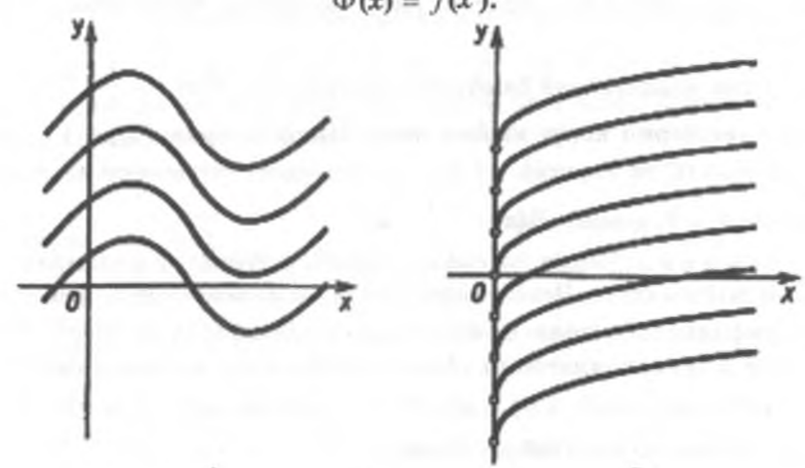
ошондуктан

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

б. а. $F(x) + C$ — бул $f(x)$ үчүн баштапкы функция болот.

2) $\Phi(x)$ функциясы ошол эле $I$ аралыгында $f$ үчүн баштапкы функция болсун дейли, б. а. бардык $x \in I$ үчүн

$$\Phi'(x) = f(x).$$




а) 118 сүрөт б)

Анда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Мындан функциянын турактуулук белгисинин негизинде, $\Phi(x) - F(x)$ айырмасы $I$ аралыгында турактуу функция болору келип чыгат.

Мына ошентип, $I$ аралыгындагы бардык $x$ үчүн $\Phi(x) - F(x) = C$ барабардыгы туура, талап кылынган далилденди.

Баштапкы функциялардын негизги касиетине геометриялык маани берүүгө болот. *$f$ функциясынын ар кандай эки баштапкы функцияларынын графиктери бири биринен $Oy$ огун бойлото параллель жылдыруудан алынат* (118-*а*, сүрөт).

**2. Баштапкы функцияларды табууга мисалдар.**

○ 1 - м и с а л. $f(x) = -x^3$ функциясынын $R$ деги баштапкы функцияларынын жалпы түрүн табабыз.

$f$ тин баштапкы функцияларынын бири $-\dfrac{x^4}{4}$ — функциясы экендигин көрөбүз, себеби $(-\dfrac{x^4}{4})' = -x^3$. Ошондуктан далилденген теорема боюнча $f$ тин баштапкы функцияларынын жалпы түрү мындай болот:

$$F(x) = -\frac{x^4}{4} + C.$$

2 - м и с а л. $(0;\infty)$ аралыгында $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ функциясынын $x = 1$ болгондогу мааниси 1 болгон $F_0(x)$ баштапкы функциясын табабыз.

$f$ тин каалагандай баштапкы функциясы $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$ болорун текшерип көрүү кыйын эмес. Шарт боюнча $F(1) = 1$ болгондуктан ($C$ га карата), $-1 + C = 1$ түрүндөгү теңдемени алабыз, мындан $C = 2$, демек, $F_0(x) = -\dfrac{1}{x} + 2$.

3 - м и с а л. Чекит түз сызык боюнча $a$ турактуу ылдамдануу менен кыймылдайт. Чекит баштапкы $t_0 = 0$ моментинде $x_0$ баштапкы координатага жана $\upsilon_0$ баштапкы ылдамдыкка ээ болот. Чекиттин $x(t)$ координатасын убакыттан функция катары табабыз.

$x'(t) = \upsilon(t)$ жана $\upsilon'(t) = a(t)$ болгондуктан, $a(t) = a$ шартынан $\upsilon'(t) = a$ экендигин алабыз. Мындан

$$\upsilon(t) = at + C_1 \qquad (2)$$





келип чыгат. (2) барабардыгына $t_0 = 0$ маанисин коюп, $C_1 = \upsilon_0$ ду, демек,

$$x'(t) = \upsilon(t) = at + \upsilon_0$$

экендигин табабыз. Ошондуктан

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + \upsilon_0 t + C_2. \qquad (3)$$

$C_2$ ни табуу үчүн (3) кө $t_0 = 0$ маанисин коебуз, мындан $C_2 = x_0$ ду алабыз. Ошентип,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + \upsilon_0 t + x_0. \quad ●$$

Э с к е р т у у. Кыскалык үчүн адатта $f$ функциясынын баштапкы функциясын табууда $f$ берилген аралык көрсөтүлбөйт. Аралыктын узундугу чоң болгон учур жөнүндө айтылып жатат. Мисалы, төмөнкү мисалда $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы $(0;\infty)$ интервалында берилди деп эсептөө табигый иш.

○ 4 - м и с а л. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы үчүн графиги $M\ (9;\ -2)$ чекити аркылуу өткөн баштапкы функцияны табабыз.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ функциясынын каалагандай баштапкы функциясы $2\sqrt{x} + C$ түрүндө жазылат. Бул баштапкы функциялардын графиктери 118-*б*, сүрөттө көрсөтүлгөн. Изделүүчү баштапкы функциянын графигинде $M\ (9;\ -2)$ чекитинин координаталары $2\sqrt{9} + C = -2$ теңдемесин канааттандырууга тийиш. Мындан $C = -8$ экендигин табабыз. Демек, $F(x) = 2\sqrt{x} - 8$ болот. ●

Төмөндө кээ бир функциялардын баштапкы функцияларынын таблицасы келтирилген:

| $f$ функциясы | $k$ (турактуу) | $x^n$ ($n \in Z$, $n \neq -1$) | $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ үчүн баштапкы функциянын жалпы түрү | $kx + C$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $2\sqrt{x} + C$ | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ | $\mathrm{tg}\,x + C$ | $-\mathrm{ctg}\,x + C$ |

Бул таблицанын туура толтурулгандыгын өз алдынча текшергиле.

### *Көнүгүүлөр*

$f$ функциясы үчүн анын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла (335–336).

**335.** а) $f(x) = 2 - x^4$; б) $f(x) = x + \cos x$;

в) $f(x) = 4x$; г) $f(x) = -3$.

**336.** а) $f(x) = x^6$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$;

в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; г) $f(x) = x^5$.

**337.** Көрсөтүлгөн чекиттерде берилген мааниге ээ болгон $f$ тин баштапкы функциясы $F$ ти тапкыла:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}, F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$; б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

в) $f(x) = x^3, F(-1) = 2$; г) $f(x) = \sin x, F(-\pi) = -1$.

---

**338.** $F$ функциясы $f$ тин баштапкы функциясы болоорун текшергиле. $f$ тин баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла, эгерде:

а) $F(x) = \sin x - x\cos x, f(x) = x\sin x$;

б) $F(x) = \sqrt{x^2+1}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $F(x) = \cos x + x\sin x, f(x) = x\cos x$;

г) $F(x) = x - \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ болсо.

**339.** Графиги берилген $M$ чекити аркылуу өткөн $f$ тин баштапкы функциясын тапкыла:

а) $f(x) = 2\cos x, M(-\frac{\pi}{2}; 1)$; б) $f(x) = 1 - x^2, M(-3; 9)$;

в) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}), M(\frac{2\pi}{3} - 1)$; г) $f(x) = \frac{1}{x^4}, M(\frac{1}{2}, 3)$.

**340.** Графиктеринин тиешелүү чекиттеринин (б.а. абсциссалары барабар чекиттердин) арасындагы аралыгы $a$ га барабар болгон $f$ тин баштапкы эки функциясын тапкыла:

а) $f(x) = 2 - \sin x, a = 4$; б) $f(x) = 1 + tg^2 x, a = 1$;

в) $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}, a = 0,5$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, a = 2$.





**341.** Чекит $a(t)$ ылдамдануусу менен түз сызык боюнча кыймылга келет. $t_0$ баштапкы моментинде, анын координатасы $x_0$, ал эми ылдамдыгы $\upsilon_0$ болот. Убакыттын ар кандай маанисинде, чекиттин $x(t)$ координатасын тапкыла:

а) $a(t) = -2t, t_0 = 1, x_0 = 4, \upsilon_0 = 2$;

б) $a(t) = \sin t, t_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = 2, \upsilon_0 = 1$;

в) $a(t) = 6t, t_0 = 0, x_0 = 3, \upsilon_0 = 1$;

г) $a(t) = \cos t, t_0 = \pi, x_0 = 1, \upsilon_0 = 0$.

## 28. Баштапкы функцияларды табуунун үч эрежеси

Бул эрежелер дифференцирлөөнүн тиешелүү эрежелерине окшош.

1 - э р е ж е. *Эгер $f$ үчүн баштапкы функция $F$ болсо, ал эми $g$ үчүн баштапкы функция $G$ болсо, анда $f + g$ үчүн $F + G$ баштапкы функция болот.*

Чындыгында, $F' = f$ жана $G' = g$ болгондуктан, сумманын туундусун эсептөө эрежеси боюнча буга ээ болобуз:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g$$

2 - э р е ж е. *Эгер $f$ үчүн $F$ баштапкы, ал эми $k$ турактуу чоңдук болсо, анда $kf$ үчүн $kF$ функциясы баштапкы функция болот.*

Чындыгында турактуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга болот, ошондуктан

$$(kF)' = kF' = kf.$$

3 - э р е ж е. *Эгер $F(x)$ функциясы үчүн $f(x)$ баштапкы функция болуп, ал эми $k$ жана $b$ турактуу чоңдуктар, бирок $k \neq 0$ болсо, анда $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функциясы $f(kx+b)$ функциясына баштапкы функция болот.*

Чындыгында татаал функциянын туундусун эсептөө эрежеси боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b).$$

Бул эрежелерди колдонууга мисалдар келтирели.

○ 1 - м и с а л. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн табалы.

$x^3$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $\frac{x^4}{4}$, ал эми $\frac{1}{x^2}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $-\frac{1}{x}$ болсо, анда 1-эреже боюнча $f(x)=x^3+\frac{1}{x^2}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}$ болот. Ж о о б у. $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C$.

2 - м и с а л. $f(x)=5\cos x$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин табалы.

$\cos x$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $\sin x$ болгондуктан, 2-эрежени колдонуп, $F(x)=5\sin x$ жообун алабыз.

3 - м и с а л. $y=\sin(3x-2)$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин табалы.

$\sin x$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $-\cos x$ болгондуктан, 3-эреже боюнча изделүүчү баштапкы функция

$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-2)$$

ге барабар.

4 - м и с а л. $f(x)=\frac{1}{(7-3x)^5}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бирин табалы.

$\frac{1}{x^5}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын бири $-\frac{1}{4x^4}$ болгондуктан 3-эреже боюнча изделүүчү баштапкы функция

$$F(x)=\frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{4(7-3x)^4}=\frac{1}{12(7-3x)^4}$$

болот.

5 - м и с а л. Массасы 2 кг болгон материалдык чекит $Ox$ огу боюнча багытталган күчтүн таасири астында кыймылга келет. Убакыттын $t$ моментинде бул күч $F(t)=3t-2$ ге барабар. Эгерде $t=2$ с кезинде чекиттин ылдамдыгы 3 м/с га барабар, ал эми координатасы $x=1$ экени белгилүү болсо, чекиттин кыймылынын $x(t)$ законун тапкыла ($F$ — күч (ньютон менен), $t$ — убакыт (секунда менен), $x$ — жол (метр менен) туюнтулган).

Ньютондун экинчи закону боюнча

$$F=ma.$$

Мында $a$ — ылдамдануу. Ошондуктан

$$a(t)=\frac{F}{m}=\frac{3}{2}t-1.$$





$a(t)$ ылдамдануусунун баштапкы функциясы болуп чекиттин $v(t)$ ылдамдыгы эсептелет, ошондуктан

$$v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+C_1.$$

Берилген $v(2)=3$ шартынан турактуу $C_1$ ди табабыз:

$$\frac{3}{4}\cdot4-2+C_1=3,\ \text{б.а. } C_1=2 \text{ жана } v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+2.$$

$v(t)$ ылдамдыгы үчүн баштапкы функция болуп $x(t)$ координатасы эсептелет, ошондуктан

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t+C_2.$$

Берилген $x(2)=1$ шартынан турактуу $C_2$ ни табабыз:

$$\frac{1}{4}\cdot8-\frac{1}{2}\cdot4+4+C_2=1, C_2=-3.$$

Ошентип, чекиттин кыймылдоо закону бул:

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-3. \ ●$$

### *Көнүгүүлөр*

Төмөнкү функциялар үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла (342 — 344).

**342.** а) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$; г) $f(x)=5x^2-1$.

**343.** а) $f(x)=(2x-3)^5$; б) $f(x)=3\sin 2x$;

в) $f(x)=(4-5x)^7$; г) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

**344.** а) $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$; б) $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$;

в) $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$; г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

**345.** Графиги $M$ чекити аркылуу өтө турган $f$ тин баштапкы функциясын тапкыла:

а) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;4)$; б) $f(x)=x^3+2$, $M(2;15)$;

в) $f(x)=1-2x$, $M(3;2)$; г) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$, $M(1;5)$.

**346.** Берилген функциялардын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin(\frac{\pi}{3} - x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 3x^2$;

в) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3\sin(4-x) + 2x$;

г) $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2\cos(\frac{\pi}{4} - x)$.

**347.** Эгерде $f$ тин баштапкы функциясы $F$ тин графигинен $M$ чекити белгилүү болсо, анда $F$ тин формуласын жазгыла:

а) $f(x) = 2x+1$, $M(0;0)$; б) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1;4)$;

в) $f(x) = x+2$, $M(1;3)$; г) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2;-1)$.

**348.** Түз сызык боюнча кыймылда болгон чекиттин ылдамдыгы $v(t) = t^2 + 2t - 1$ формуласы аркылуу берилген. Эгерде чекит убакыттын баштапкы моментинде ($t = 0$) координаттык башталышта болсо, анда анын координатасынын убакыт $t$ дан болгон көз карандылыгынын формуласын жазгыла.

**349.** Түз сызык боюнча кыймылда болгон чекиттин ылдамдыгы $v(t) = 2\cos\frac{t}{2}$ формуласы менен берилген. Эгерде чекит $t = \frac{\pi}{3}$ моментинде координаттык башталыштан 4 м аралыкта болсо, анда анын координатасынын убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла.

**350.** Түз сызыктуу кыймылдагы чекиттин ылдамдануусу. $a(t) = 12t^2 + 4$. Эгерде анын ылдамдыгы $t = 1$ моментинде 10 м/с, ал эми координатасы 12 болсо, анда чекиттин кыймылынын законун тапкыла (анын өлчөм бирдиги — 1 м/с$^2$).

**351.** Массасы $m$ болгон материалдык чекит $Ox$ огун бойлото багытталган күчтүн аракети астында ушул ок боюнча кыймылга келет. $t$ убакыт моментиндеги күч $F(t)$ га барабар. Эгерде $t = t_0$ болгондо чекиттин ылдамдыгы $v_0$ го, ал эми координатасы $x_0$ го барабар болсо, $x(t)$ нын $t$ убакыттан болгон көз карандылыгынын формуласын тапкыла ($F(t)$ — ньютон, $t$ — секунда, $v$ — метр бөлүнгөн секунда, $m$ — килограмм менен ченелет):

а) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;

б) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;





в) $F(t) = 25\cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;

г) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

**352.** $f$ тин $F_1$ баштапкы функциясынын графиги $M$ чекити аркылуу, ал эми $F_2$ баштапкы функциясынын графиги $N$ чекити аркылуу өтөт. Бул баштапкы функциялардын айырмасы эмнеге барабар?
Эгерде:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $M(-1;1)$, $N(0;3)$;

б) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$, $M(0;2)$, $N(1;3)$;

в) $f(x) = 4x - x^3$, $M(2;1)$, $N(-2;3)$;

г) $f(x) = (2x+1)^2$, $M(-3;-1)$, $N(1;6\frac{1}{3})$

болсо, $F_1$ жана $F_2$ функцияларынын кайсынысынын графиги жогору жайгашкан?

## § 8. ИНТЕГРАЛ

### 29. Ийри сызыктуу трапециянын аянты

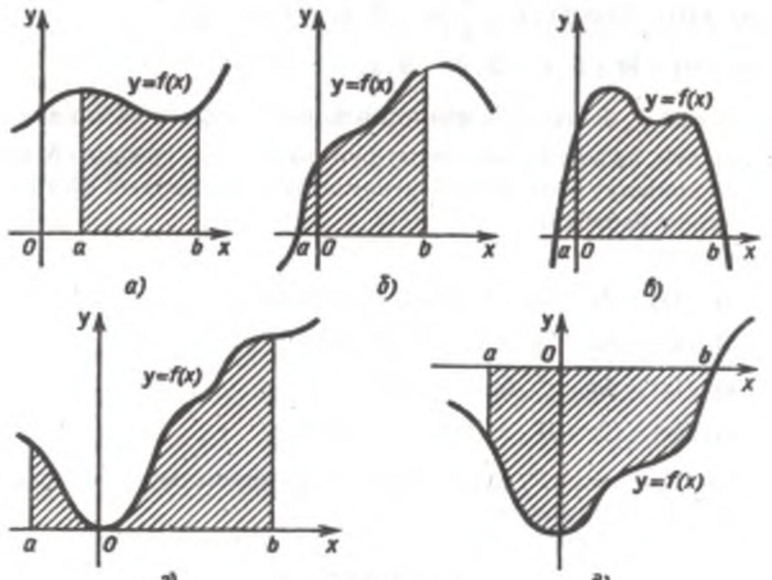
$Ox$ огунун $[a; b]$ кесиндисинде белгисин өзгөртпөгөн үзгүлтүксүз $f$ функциясы берилсин дейли. Ушул функциянын графиги, $[a; b]$ кесиндиси жана $x = a$, $x = b$ түз сызыктары менен чектелген фигураны (119-сүрөт) *ийри сызыктуу трапеция* деп атайбыз. Ийри сызыктуу трапециялардын ар түрдүү мисалдары 119-*а*—*д*, сүрөттөрдө келтирилген.

Ийри сызыктуу трапециялардын аянттарын эсептеп чыгарууда төмөнкү теорема колдонулат:

Т е о р е м а. ***Эгерде f функциясы [a; b] кесиндисинде берилген терс эмес жана үзгүлтүксүз функция, ал эми F — анын бул кесиндидеги баштапкы функциясы болсо, анда ага туура келүүчү ийри сызыктуу трапециянын аянты S [a; b] кесиндисиндеги баштапкы функциянын өсүндүсүнө барабар, б.а.***

$$S = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Д а л и л д өө. $[a; b]$ кесиндисинде аныкталган $S(x)$ функциясын карайлы. Эгерде $a < x \le b$ болсо, анда $S(x)$ бул $M(x; 0)$ чекити аркылуу өткөн вертикалдуу түз сызыктын сол жагында жаткан ийри сызыктуу трапециянын аянты (120-*а*, сүрөт) болот. Эгерде $x = a$ болсо, анда $S(a) = 0$. $S(b) = S$ ($S$ — ийри сызыктуу




119-сүрөт

трапециянын аянты) экендигин белгилей кетели.

$$S'(x) = f(x) \qquad (2)$$

экендигин далилдейбиз.

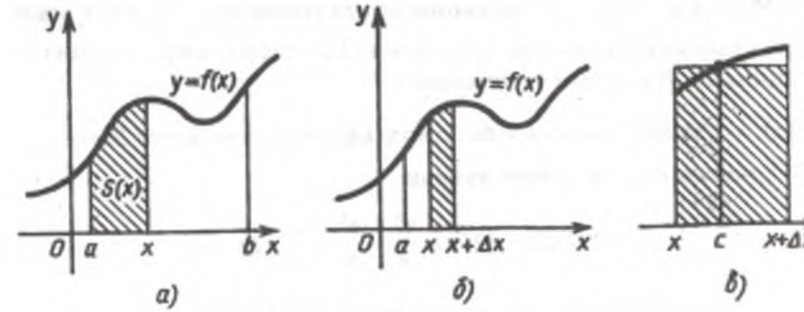
Чындыгында туундунун аныктамасы боюнча

$$\Delta(x) \to 0 \text{ учурда } \frac{\Delta S(x)}{\Delta(x)} \to f(x) \qquad (3)$$

экендигин далилдешибиз керек.

$\Delta S(x)$ алымынын геометриялык маанисин түшүндүрөлү. Жөнөкөй болсун үчүн $\Delta(x) > 0$ учурун карайбыз. $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$ болгондуктан, $\Delta S(x)$ — бул 120-*б*, сүрөттөгү штрихтелген тилкенин аянты. Эми биз ошол эле $\Delta S(x)$ аянттагы, $[x\,;x+\Delta x]$ кесиндисине таянган тик бурчтукту алабыз (120-*в*, сүрөт). Бул тик бурчтуктун жогорку жагы функциянын графигинин абсциссасы $c \in [x\,;x+\Delta x]$ болгон кандайдыр бир чекитте кесип өтөт (карама-каршы учурда бул тик бурчтук же ийри сызыктуу трапециянын бөлүгүн $[x\,;x+\Delta x]$ кесиндисинде камтыйт, же анын өзүн толук камтыйт; анын аянты $\Delta S(x)$ тен же чоң, же кичине болот). Демек, тик бурчтуктун бийиктиги $f(c)$ га барабар. Тик бурчтуктун






120-сүрөт

аянтынын формуласы боюнча $\Delta S(x) = f(c)\cdot\Delta x$ экендигин алабыз, мындан $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta(x)} = f(c)$. (Бул формула $\Delta x < 0$ болгондо да орун алат.) $c$ чекити $x$ менен $x+\Delta x$ тин ортосунда жаткандыктан, $\Delta x \to 0$ учурда $c$ чекити $x$ ке умтулат. $f$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, $\Delta x \to 0$ учурда $f(c) \to f(x)$. Демек, $\Delta x \to 0$ учурда $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta(x)} \to f(x)$.

(2) формула далилденди.

Биз $S(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн баштапкы функция экендигин алдык. Ошондуктан баштапкы функциянын негизги касиети боюнча бардык $x \in [a\,;b]$ үчүн

$$S(x) = F(x) + C$$

экендигине ээ болобуз, мында $C$ — кандайдыр бир туруктуу, ал эми $F(x)$ — бул $f$ тин баштапкы функцияларынын бири, $C$ ны табуу үчүн $x = a$ ны коёбуз:

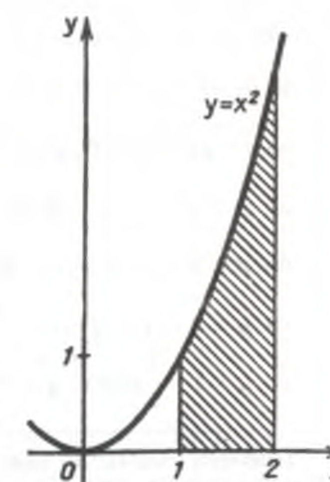
$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

мындан $C = -F(a)$. Демек,

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (4)$$

Ийри сызыктуу трапециянын аянты $S(b)$ га барабар болгондуктан, (4) формулага $x = b$ ны коюп, төмөндөгүнү алабыз:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$




121-сүрөт

○ **Мисал.** $f(x) = x^2$ функциясынын графиги $y = 0$, $x = 1$ жана $x = 2$ түз сызыктары менен чектелген (121-сүрөт) ийри сызыктуу трапециянын $S$ аянтын эсептейли.

$f(x) = x^2$ функциясынын баштапкы функциясы болуп $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функциясы эсептелет. Ошондуктан

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}. \; \bullet$$

△ Функциялардын туундусун эсептеп чыгаруу көпчүлүк учурда эсептөө жумуштарына мүнөздүү кыйынчылыктар менен гана байланышканын көрдүңөр. Баштапкы функцияларды табуу жумушу бир топ татаал. Алсак, берилген функция баштапкы функцияга ээби же жокпу, ал дароо эле билинбейт. Ушуга байланыштуу $I$ аралыгындагы ар кандай үзгүлтүксүз функциянын ушул аралыкта баштапкы функциясы бар экендигин белгилей кетебиз. Бул фактынын түшүндүрмөсүн жогоруда келтирилген (2) формуланын далилдөөсү берет. Бирок кээ бир функциянын баштапкы функциясын мектепте окулуучу функциялардын жардамында жазууга болбойт. Алсак, мисалы $\sqrt{x^3+1}$ функциясы үчүн ушундай болот. ▲

### *Көнүгүүлөр*

Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептеп чыгаргыла (353 — 354).

**353.** а) $y = x^2, y = 0, x = 3;$ б) $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2};$

в) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi;$ г) $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 1, x = 2.$

**354.** а) $y = x^3 + 1,\ y = 0, x = 0, x = 2;$

б) $y = 1 + 2\sin x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2};$

в) $y = 4 - x^2,\ y = 0;$

г) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}.$

---

**Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (355–356).**





**355.** а) $y = (x+2)^2,\ y = 0, x = 0;$

б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1, y = 0, x = 0, x = 2;$

в) $y = 2x - x^2,\ y = 0;$

г) $y = -(x-1)^3,\ y = 0, x = 0.$

**356.** а) $y = 3\sin(x + \frac{3\pi}{4}), y = 0, x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4};$

б) $y = 2\cos 2x, , y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4};$

в) $y = \sin x - \frac{1}{2},\ y = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6};$

г) $y = 1 - \cos x,\ y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}.$

## 30. Интеграл. Ньютон — Лейбництин формуласы

**1. Интеграл жөнүндө түшүнүк.** Ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөөнүн башкача жолун карайлы. Жөнөкөй болсун үчүн $f$ функциясын $[a; b]$ кесиндисинде терс эмес жана үзгүлтүксүз деп эсептейбиз; анда тиешелүү ийри сызыктуу трапециянын аянтын төмөндөгүчө жакындаштырып эсептөөгө болот.

$[a; b]$ кесиндисин $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, чекиттери менен бирдей узундуктагы $n$ кесиндиге бөлөбүз жана $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, мында $k = 1, 2, \ldots, n-1$, болсун дейли.

$[x_{k-1}; x_k]$ кесиндинин ар бирине негизиндегидей эле бийиктиги $f(x_{k-1})$ болгон тик бурчтукту түзөбүз. Бул тик бурчтуктун аянты

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

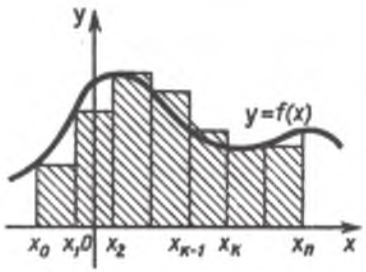
ге барабар, ал эми бардык мындай тик бурчтуктардын аянттарынын суммасы

$$S_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + (f(x_1) + \ldots + (f(x_{n-1}))$$

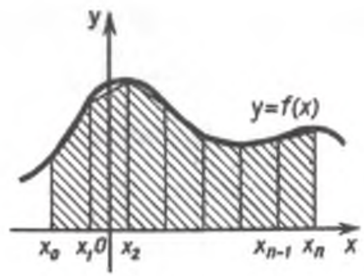
ге барабар (122-сүрөт).

$f$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан $n$ чоң болгондо, б.а. $\Delta x$ тин кичине маанисинде, түзүлгөн тик бурчтуктардын жыйындысы биз карап жаткан ийри сызыктуу трапеция менен дээрлик

14-195




122-сүрөт




123-сүрөт

«дал келет». Ошол себептен $n$ дин чоң маанилеринде $S_n \approx S$ болот деген болжолдоо келип чыгат жана бул жакындатылган барабардык каалагандай тактык менен аткарылат. (Кыскача «$n$ чексизге умтулганда $S_n$ аянты $S$ ке умтулат» — деп айтылат жана $n \to \infty$ учурда $S_n \to S$ деп жазылат).

Бул болжолдоо туура. Анын үстүнө, $[a; b]$ кесиндисинде аныкталган ар кандай үзгүлтүксүз (терс эмес болушу зарыл эмес) $f$ функциясы үчүн ($n \to \infty$ учурда) $S_n$ кайсы бир санга умтулат. Бул сан (аныктама боюнча) $f$ функциясынын $a$ дан $b$ га чейинки *интегралы* деп аталат жана $\int_a^b f(x)\,dx$ деп белгиленет, б.а.

$$n \to \infty \text{ учурда } S_n \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

(«$a$ дан $b$ га чейинки интеграл икстен эф дэ икс» деп окулат). $a$ жана $b$ сандары *интегралдоонун пределдери* деп аталат: $a$ — төмөнкү предели, $b$ — жогорку предели. $f$ белгиси *интегралдын белгиси* деп аталат. $f$ функциясы интегралдын *алдындагы (ичиндеги) функция* деп, ал эми $x$ өзгөрмөсү — *интегралдоонун өзгөрмөсү* деп аталат.

Ошентип, эгерде $[a; b]$ кесиндисинде $f(x) \geq 0$ болсо, анда тиешелүү ийри сызыктуу трапециянын $S$ аянты

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

формуласы менен туюнтулат.

△ Интегралды жакындаштырып эсептеп чыгаруу үчүн $S_n$ суммасын караса болот. Бирок, 123-сүрөттө көрсөтүлгөндөй, ($f$ функциясы оң учурда) ийри сызыктуу трапециянын «ичинен сызылган» жана сынык сызыктар менен чектелген трапециянын аянттары барабар болгон кошулуучулары бар төмөнкү сумманы пайдаланса андан да жакшы:



$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right).$$

Чындыгында, трапециянын аянттарынын формуласын пайдаланып, төмөндөгүнү алабыз:

$$S_n = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \ldots =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right). \blacktriangle$$

**2. Ньютон — Лейбництин формуласы.** Ийри сызыктуу трапециянын аянттарынын формулаларын

$$S = F(b) - F(a) \text{ жана } S = \int_a^b f(x)\,dx$$

терди салыштырып төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз: *эгерде $F$ функциясы $f$ функциясынын $[a; b]$ дагы баштапкы функциясы болсо, анда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

(3) формула *Ньютон — Лейбництин* формуласы деп аталат. Ал $[a; b]$ кесиндисиндеги ар кандай үзгүлтүксүз функциялар үчүн туура.

Ньютон — Лейбництин формуласынын колдонулушуна мисалдарды келтиребиз:

○ 1-мисал. $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$ интегралын эсептейли.

$x^2$ функциясынын баштапкы функциясы $\frac{x^3}{3}$ болгондуктан

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Жазуу жөнөкөй болсун үчүн $F(b) - F(a)$ айырмасын ($[a; b]$ аралыгындагы $F$ функциясынын өсүндүсүн $F(x)\Big|_b^a$ деп белгилөө кабыл алынган, б.а.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_b^a$$

Бул белгилөөнү пайдаланып, Ньютон — Лейбництин формуласын

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a \qquad (4)$$

түрүндө жазабыз.

2 - м и с а л. Киргизилген белгилөөнү пайдаланып төмөндөгүнү алабыз:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2. \bullet$$

1 - э с к е р т ү ү. Интегралга берген бул аныктамабыз $\frac{1}{x^2}$ функциясынын $-1$ден 2 ге чейинки интегралына жарамсыз, себеби бул функция $[-1;\ 2]$ кесиндиде үзгүлтүксүз эмес. Ошондой эле $-\frac{1}{x}$ функциясы ушул эле кесиндиде $\frac{1}{x^2}$ функциясынын баштапкы функциясы боло албайт, анткени каралган кесиндиге тиешелүү 0 чекити $\frac{1}{x^2}$ функциясынын аныкталуу областына кирбейт.

○ 3 - м и с а л. $y = 1 - x$ жана $y = 3 - 2x - x^2$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептейли.

Бул графиктерди сызып (124-сүрөт), алардын кесилишкен чекиттеринин абсциссаларын

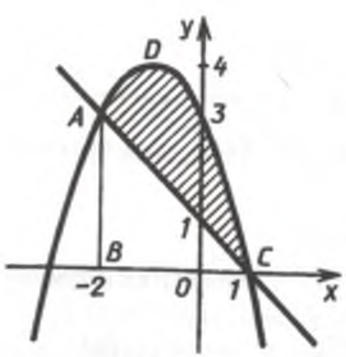
$$1 - x = 3 - 2x - x^2$$

теңдемеден табабыз. Бул теңдемени чыгарып, $x = 1$ жана $x = -2$ экендигин табабыз. Изделип жаткан аянт $BADC$ ийри сызыктуу трапециянын жана $BAC$ үч бурчтугунун аянттарынын айырмасы катарында алынышы мүмкүн. (2) формула боюнча

$$S_{BADC} = \int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)\,dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$=\left(3-1-\frac{1}{3}\right) - \left(3\cdot(-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 9.$$

$$S\Delta_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}.$$



124-сүрөт

Демек, штрихтелген фигуранын аянты $\frac{9}{2}$ га барабар:

$$S = S_{BADC} - S_{\Delta ABC} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4,5. \bullet$$

2 - э с к е р т ү ү. Интеграл түшүнүгүн аныктама боюнча $a \geq b$ учурунда кеңейтүү оңтойлуу: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.



Мындай келишимдин натыйжасында Ньютон — Лейбництин формуласы ар кандай $a$ жана $b$ үчүн туура экен (айрым алганда $\int_a^b f(x)\,dx = 0$).

357-369

### Көнүгүүлөр

Интегралды эсептегиле (357 — 358).

357. а) $\int_{-1}^{2} x^4\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
в) $\int_1^3 x^3\,dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

358. а) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; б) $\int_0^\pi 3\cos\frac{x}{2}\,dx$;
в) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

359. Төмөнкү барабардыктардын орун алышын далилдегиле:
а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx$; г) $\int_0^1 (2x+1)\,dx = \int_0^2 (x^3-1)\,dx$.

Берилген сызыктар менен болгон фигуранын аянтын (сүрөтөрүн сызып туруп) эсептегиле (360 — 361).

360. а) $y = x^4, y = 0, x = -1, x = 1$; б) $y = x^4, y = 1$;
в) $y = x^2 - 4x + 5,\ \ y = 0,\ x = 0,\ y = 4$; г) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 5$,

361. а) $y = 1 - x^3,\ y = 0,\ x = 0$;
б) $y = 2 - x^3,\ y = 1,\ x = -1,\ x = 1$;
в) $y = -x^2 - 4x,\ y = 0,\ x = -3,\ x = -1$;
г) $y = -x^2 - 4x,\ y = 1,\ x = -3,\ x = -1$;

Интегралдарды эсептегиле (362 — 363).

362. а) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; б) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; в) $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; г) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

363. а) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; б) $\int_0^2 (1+2x)^3\,dx$;
в) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) = dx$; г) $\int_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын (сүрөттөрүн сызып туруп) эсептегиле (364 — 366).

**364.** а) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$;

б) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

в) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$;

г) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

**365.** а) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$;

б) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;

в) $y = x^2$, $y = 2x$;

г) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

**366.** а) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$;

б) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;

в) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$;

г) $y = x^2$, $y = x^3$.

**367.** Берилген $y = 8x - 2x^2$ функциясынын графиги, бул параболанын чокусундагы жаныманын жана $x = 0$ түз сызыгынын негизинде пайда болгон фигуранын аянтын эсептегиле.

**368.** Берилген $f(x) = 8 - 0,5x^2$ функциясынын графиги, абсциссасы $x = -2$ болгон чекиттеги анын жанымасынын жана $x = 1$ түз сызыгынын негизинде пайда болгон фигуранын аянтын эсептегиле.

**369.** Барабардыкты далилдегиле:

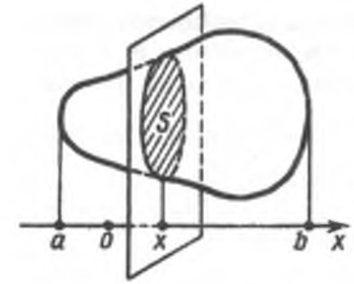
а) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

б) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (мында $k$ — турактуу).

## 31. Интегралдын колдонулушу

**1. Нерсенин көлөмүн эсептөө.** Бизге көлөмү $V$ болгон нерсе берилсин дейли, ошону менен эле бирге берилген түз сызыкка (125-сүрөт) перпендикуляр кылып кандай гана тегиздик жүргүзбөйлүк, бул тегиздик менен нерсенин $S$ кесилиш аянты белгилүү болот. Бирок, $Ox$ огуна перпендикуляр болгон тегиздик аны кайсы






125-сүрөт

бир $x$ чекитинде кесип өтөт. Демек, ([$a$; $b$] кесиндисиндеги, 125-сүрөттү кара) ар бир $x$ санына бул тегиздик менен нерсенин кесилишинин аянтын көрсөткөн бир гана $S(x)$ саны туура келет. Ошону менен бирге [$a$; $b$] кесиндисинде $S(x)$ функциясы берилген. Эгерде бул функция [$a$; $b$] кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (1)$$

формуласы чындык. Бул формуланын толук далилдөөсү математикалык анализ курсунда берилет, ал эми бул жерде ага келтирүүчү жөнөкөй ой жүгүртүүлөргө токтолобуз.

[$a$; $b$] кесиндисин $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ чекиттери аркылуу бирдей узундуктагы $n$ кесиндиге бөлөбүз жана

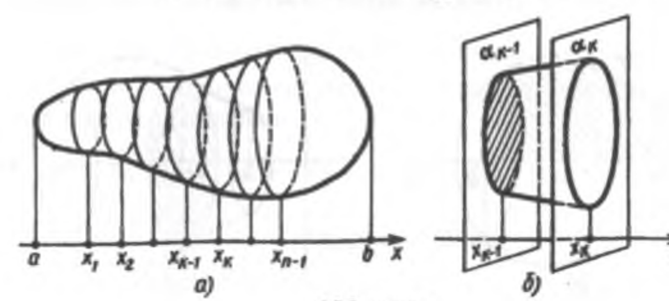
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \; k = \ldots, n$$

болсун дейли (34-пунктту кара). Ар кандай $x_k$ чекити аркылуу $Ox$ огуна перпендикуляр кылып $\alpha_k$ тегиздигин жүргүзөбүз. Бул тегиздиктер берилген нерсени катмарларга бөлөт (126-*а*, *б*, сүрөттү кара). $n$ дин жеткиликтүү чоң маанилеринде $\alpha_{k-1}$ жана $\alpha_k$ тегиздиктеринин арасындагы катмардын көлөмү кесилиштин аянты $S(x_{k-1})$ ди «катмардын калыңдыгы» $\Delta x$ ке көбөйткөндөгү көбөйтүндүгө болжол менен барабар, ошондуктан

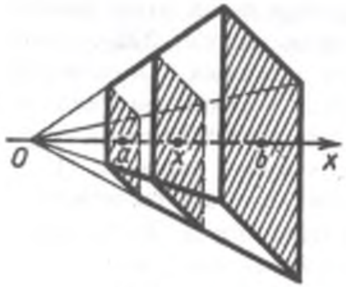
$$V \approx S(x_0)\,\Delta x + S(x_1)\,\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\,\Delta x = V_n.$$

Бул жакындатылган барабардыктын тактыгы нерсе бөлүнгөн катмарлардын канчалык жука болушуна, б.а. $n$ дин чоң болушуна жараша болот. Ошондуктан $n \to \infty$ учурда $V_n \to V$. Бирок интегралдын аныктамасы боюнча

$$n \to \infty \text{ учурда } V_n \to \int_a^b S(x)\,dx.$$




126-сүрөт



127-сүрөт

○ **1-мисал.** Бийиктигин жана негиздеринин аянттары $S$ жана $s$ болгон кесилген пирамиданын көлөмү $\frac{1}{3}H(S+s+\sqrt{Ss})$ ка барабар экендигин далилдейли.

$O$ чекити — «толук» пирамиданын чокусу болсун дейли (127-сүрөт). $O$ чекити аркылуу пирамиданын негизинде перпендикуляр кылып $Ox$ огун жүргүзөбүз. Кесилген пирамиданын негиздери $Ox$ огун $a$ жана $b$ чекиттеринде кесишет. $Ox$ огуна перпендикуляр болгон жана андагы $[a; b]$ кесиндисиндеги $x$ чекити аркылуу өткөн ар кандай тегиздик өзүнүн кесилишинде көп бурчтукту — пирамиданын негизине окшош көп бурчтукту берет. Ошондуктан $S(x)$ кесилиштин аянты $kx^2$ га барабар, анын ичинде

$$s=S(a)=ka^2,\ S=S(b)=kb^2.$$

Кесилген пирамиданын көлөмүн (1) формула боюнча табабыз:

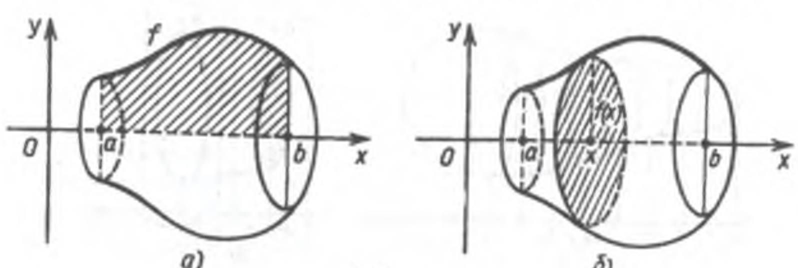
$$V=\int_a^b kx^2\,dx=\frac{kx^3}{3}\Big|_a^b=\frac{k}{3}(b^3-a^3)=\frac{b-a}{3}(kb^2+kab+ka^2)=$$

$$=\frac{H}{3}(S+\sqrt{Ss}+s).$$

**2-мисал.** Ийри сызыктуу трапеция $Ox$ огунун $[a; b]$ кесиндисине таянган болсун дейли, ал жогору жагынан $[a; b]$ кесиндисинде аныкталган терс эмес жана үзгүлтүксүз функциянын графиги менен чектелсин дейли. Бул ийри сызыктуу трапецияны $Ox$ огунун тегерегинде айлантсак, анда

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx \qquad (2)$$

формуласы боюнча табылган нерсени алабыз (128-$a$, сүрөт).



128-сүрөт



Чындыгында, $Ox$ огуна перпендикуляр болуп жана бул октун $[a; b]$ кесиндисиндеги $x$ чекити аркылуу өткөн ар бир тегиздик нерсе менен кесилишинде радиусу $f(x)$ жана аянты $S(x)=\pi f^2 x$ болгон тегеректи берет (128-$б$, сүрөт). Мындан (1) формула боюнча (2) формула келип чыгат.

**2. Өзгөрмөлүү күчтүн жумушу.** Түз сызык боюнча $P$ күчүнүн таасири менен кыймылда болгон материалдык чекитти карайлы. Эгерде таасир этүүчү күч турактуу болуп жана түз сызык боюнча багытталса, ал эми которулуу аралыгы $s$ ке барабар болсо, анда физикадан белгилүү болгондой, бул күчтүн $A$ жумушу $P\cdot s$ көбөйтүндүсүнө барабар. Эми өзгөрмөлүү күчтүн жумушун эсептөөнүн формуласын чыгарабыз.

Чекитке таасир экен күчтүн $Ox$ огуна болгон проекциясы $x$ тен көз каранды болгон $f$ функциясы болсун жана чекит $Ox$ огу боюнча кыймылдасын дейли. Мына биз $f$ функциясын үзгүлтүксүз деп эсептейбиз. Бул күчтүн таасири менен материалдык чекит $M(a)$ чекитинен $M(b)$ чекитине которулсун (129-$a$, сүрөт). Бул учурда $A$ жумушу

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

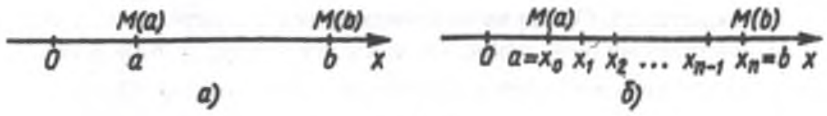
формуласы боюнча эсептелерин далилдейбиз.

$[a; b]$ кесиндисин бирдей $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ узундуктагы $n$ кесиндилерге бөлөбүз. Булар $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$,..., $[x_{n-1}; b]$ кесиндилери (129-б, сүрөт). Бардык $[a; b]$ кесиндидеги күчтүн жумушу бул күчтүн ар бир кесиндидеги аткарган жумуштарынын суммасына барабар. $f$ функциясы $x$ тен үзгүлтүксүз болгондуктан, $[a; x_1]$ кесиндисин жетишерлик даражада кичине алганда андагы жумуштун күчү болжол менен алганда $f(a)(x_1-a)$ га барабар (кесиндиде $f$ өзгөрүлбөйт деп эсептейбиз). Ошондой эле $[x_1; x_2]$ экинчи кесиндидеги күчтүн жумушу болжол менен $f(x_1)(x_2-x_1)$ ге барабар ж.у.с.; күчтүн жумушу $n$ кесиндиде болжол менен $f(x_{n-1})(b-n_{n-1})$ ге барабар. Демек, бардык кесиндидеги күчтүн жумушу жакындаштырып алганда буга барабар:

$$A\approx A_n=f(a)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right),$$

жакындаштырылган барабардыктын тактыгы $[a; b]$ кесиндисинин бөлүктөрүнөн канчалык кыска болсо, ошончолук жогору бо-



129-сүрөт

лот. Бул жакындаштырылган барабардык $n \to \infty$ учурда анык барабардыктын өзүнө өтөрү табигый иш:

$$A_n = \frac{b-a}{n}\,(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \to A\,.$$

$n \to \infty$ учурда $A_n$ каралып жаткан функциянын $a$ дан $b$ га чейинки интегралына умтулгандыктан, (3) формула далилденди (30-пунктту кара).

○ 3 - м и с а л. 5 см ге чоюлган серпилгич пружинанын күчү 3 Н го барабар. Пружинаны 5 см ге чоюу үчүн кандай жумуш аткаруу керек?

Гуктун закону боюнча пружинаны $x$ ке чоюу үчүн кеткен жумуштун $F$ күчү $F = kx$ формуласы боюнча эсептелет, мында $k$ — пропорциялуулуктун турактуу коэффициенти (130-сүрөт), 0 чекити пружинанын эркин абалына туура келет. Маселенин шартынан $3 = k \cdot 0{,}05$ экендиги келип чыгат. Демек, $k = 60$ жана күч $F = 60x$, ал эми (3) формула боюнча

$$A = \int_0^{0,05} 60x\,dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05}; \quad A = 0{,}075 \text{ Дж.} \ \bullet$$

▽ **3. Массанын борбору.** Массанын борборун табууда төмөнкү эрежелерди пайдаланышат:

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ материалдык чекиттердин системасынын массалары $m_1, m_2, \ldots, m_n$ жана координаталары $x_1, x_2, \ldots, x_n$ болгон түз сызыктын чекиттеринде жайланышкан, алардын массаларынын борборунун $x'$ координатасы

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (4)$$

аркылуу табылат.

2. Массанын борборунун координатасын эсептөөдө фигуранын каалаган бөлүгүн материалдык чекит менен алмаштырып жана аны ал бөлүктүн массасынын борбору менен дал келтирип фигуранын каралып жаткан бөлүгүнүн массасын материалдык чекиттин массасы деп эсептөө керек.

○ 4 - м и с а л. Берилген стержень боюнча — $Ox$ огунун $[a; b]$ кесиндиси боюнча — тыгыздыгы $\rho(x)$ болгон масса жайланыш-





130-сүрөт

кан, мында — $\rho(x)$ үзгүлтүксүз функция. Төмөнкүлөрдү далилдейбиз:

а) стержендин $M$ суммардык массасы $\int_a^b \rho(x)\,dx$ ке барабар;

б) массанын борборунун $x^1$ координатасы $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\,dx$ ке барабар.

$[a; b]$ кесиндисин $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ чекиттери аркылуу бирдей $n$ бөлүктөргө бөлөбүз (129-*б*, сүрөт). $n$ чоң болгондо ар бир $n$ кесиндинин тыгыздыгын турактуу деп эсептөөгө болот жана $k$ — кесиндиде болжол менен ал $\rho(x_{k-1})$ ге барабар ( $\rho(x)$ — үзгүлтүксүз болгондо). Анда $k$ — кесиндинин массасы болжол менен $m_k = \frac{b-a}{n}\rho(x_{k-1})$ ге барабар, ал эми бүткүл стержендин массасы

$$\frac{b-a}{n}(\rho(x_0) + \rho(x_1) + \ldots + \rho(x_{n+1}))$$

болот. Ар бир кичинекей $n$ кесиндини $x_{k-1}$ чекитине жайгаштырылган массасы $m_k$ болгон материалдык чекит деп эсептеп (4) формула боюнча массанын борборунун координатасын жакындаштырып, мындайча табабыз:

$$x'_n = \frac{\frac{b-a}{n}(x_0\rho(x_0) + x_1\rho(x_1) + \ldots + x_{n-1}\rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n}(\rho(x_0) + \rho(x_1) + \ldots + \rho(x_{n-1}))}.$$

Эми бизге бөлчөктүн алымы $n \to \infty$ учурда $\int_a^b x\rho\,x\,dx$ интегралына, ал эми бөлүмү (бардык стержендин массасын туюнтуучу) — $\int_a^b \rho(x)\,dx$ интегралына умтуларын байкоо гана калды.

Материалдык чекиттин системасынын борборунун координатасын тегиздикте же мейкиндикте табууда да (4) формула пайдаланылат. ● ▲

### *Көнүгүүлөр*

**370.** Сызыктар менен чектелген ийри сызыктуу трапецияларды $Ox$ огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла:

а) $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0$; б) $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4, y = 0$;

в) $y = \sqrt{x}, x = 1, y = 0$; г) $y = 1 - x^2, y = 0$.

**371.** Сызыктар менен чектелген фигураларды абсцисса огунун айланасында айландыруудан келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла:

а) $y = x^2, y = x$; б) $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = 1$;

в) $y = x + 2, y = 1, x = 0, x = 2$; г) $y = \sqrt{x}, y = x$.

**372.** а) Радиусу $R$ жана бийиктиги $H$ болгон шардык сегменттин көлөмүнүн формуласын чыгаргыла. б) Бийиктиги $H$, негиздеринин радиустары $R$ жана $r$ болгон кесилген конустун көлөмүнүн формуласын чыгаргыла.

**273.** Эгерде 2 $H$ болгон күч пружинаны 1 см ге кысса, пружинаны 4 см ге кысуу үчүн кандай жумуш аткарат?

**374.** 4 $H$ болгон күч пружинаны 8 см ге чоёт. 8 см ге чоюу үчүн кандай жумуш аткаруу керек?

**375.** Чоңдугу $q$ болгон электр зарядынын таасири астында электрон түз сызык боюнча $a$ аралыгынан $b$ аралыгына которулат. Заряддардын өз ара аракеттенген күчтөрүнүн жумушун тапкыла. (Эки учурду карагыла: 1) $a < b$, $q < 0$; 2) $b < a$, $q > 0$. Кулон законундагы пропорциялуулуктун коэффициенти $\gamma$ га барабар деп эсептегиле.)

**376.** Каналдын кесилиши жактары $a$ жана $b$ га, бийиктиги $h$ ка барабар тең капталдуу трапециянын формасына ээ. Каналдан толо аккан суунун плотинага жасаган күчүн тапкыла ($a > b$, $a$ — трапециянын жогорку негизи).

**377.** Цилиндр түрүндөгү бактын түбүндөгү тешик аркылуу суу жиберилип, бак толтурулду. Мында аткарылган жумушту тапкыла. Бактын бийиктиги $h$ ка, негизинин радиусу $r$ ге барабар.

**378.** Шарды сууга матырганда пайда болгон түртүлүү күчүнүн жумушун тапкыла.

**379.** Узундугу $l = 20$ см болгон бир тектүү стержень горизонталдык тегиздикте анын экинчи учу аркылуу өткөн вертикалдык октун айланасында айланат. Айлануунун бурчтук ылдамдыгы $\omega = 10\pi c^{-1}$. Стержендин туурасынан кесилишинин аянты $S = 4\text{см}^2$, стержень даярдалган материалдын тыгыздыгы $\rho = 7{,}8$ г/см³. Стержендин кинетикалык энергиясын аныктагыла.

**380.** Бир тектүү түз тегерек конустун массасынын борборун тапкыла.





## Тарыхтан маалыматтар

**1. Терминдердин жана белгилөөлөрдүн келип чыгышы.** Интеграл жөнүндөгү түшүнүк квадратураларды табуу маселелери менен тыгыз байланышта. Бул же тигил жалпак фигуранын *квадратурасы жөнүндөгү маселелер* деп, илгерки Грециялык жана Римдик математиктер азыркы биз аянттарды эсептөөлөрдө таянган маселелерди айтышкан.

Байыркы *quadratura* деген латын сөзү «квадраттык форманы алуу» дегенди билдирет. Атайын терминдердин зарылчылыгы алгачкы убакыттагы (жана кийинчерээк, XVIII кылымга чейин да) бизге көнүмүш болгон заттык сандар жөнүндөгү түшүнүктөрдүн өсүп жетиле электигинен келип чыккан. Ал математиктер өз ара көбөйтүүгө болбой турган нерселердин геометриялык аналогдору жана скалярдык чоңдуктары менен амалдар аткарышкан. Ошондуктан аянттарды табуу жөнүндөгү маселелерди да, мисалы, төмөнкүчө түзүшкөн: «Берилген тегеректе тең чоңдукта болгон квадратты түзүү керек». (Тегеректин квадратурасы жөнүндөгү бул классикалык маселени циркуль жана сызгычтын жардамы менен чыгарууга болбостугу белгилүү.)

$\int$ символу Лейбниц тарабынан киргизилген (1675-ж.). Бул белги латын тамгасы $S$ тин (summa деген сөздүн башкы тамгасы) өзгөрүшү болуп саналат. *Интеграл* деген сөздүн өзүн Я.Бернулли (1690-ж.) ойлоп тапкан. Ал integro деген латын сөзүнөн келип чыккан болуу керек жана ал *баштапкы абалына келтирүү, калыптандыруу* деп которулат. (Чындыгында интегралдоо операциясы дифференцирлөө жолу менен келип чыккан интегралдын алдындагы функцияны калыбына келтирет.) Балким, *интеграл* деген терминдин келип чыгышы башкача: integer деген сөз бүтүн дегенди билдирет.

И.Бернулли менен Г.Лейбниц өз ара жазышкан каттарында Я.Бернуллинин сунушуна макул болушкан. Анда 1696-ж., математиканын жаңы тармагынын аты — интегралдык эсептөөлөр (calculus integralis) да пайда болгон, аны И.Бернулли киргизген.

Силерге белгилүү болгон интегралдык эсептөөлөргө тиешелүү башка терминдер бир топ кийинчерээк пайда болгон. Азыр пайдаланылып жүргөн *баштапкы функция* деген термин бир канча мурдагы «аргасыз» (примитивная) функция дегенди алмаштырган, аны Лагранж (1797-ж.) киргизген. Primitivus деген латын сөзү «алгачкы» дегендей которулуп жүрөт: $F(x) = \int f(x)\,dx$ үчүн — алгачкы (же баштапкы, же андан мурдагысы), ал $F(x)$ дифференцирлөөдөн келип чыгат.

Азыркы адабиятта $f(x)$ функциясынын баштапкы функцияларынын бүткүл жыйындысын *анык эмес* интеграл деп аташат. Бул түшүнүктү бардык баштапкы функциялар туруктуу санга гана айырмалана аларын байкап, Лейбниц киргизген. Ал эми муну — $\int_a^b f(x)\ dx$ *анык интеграл* деп аташат (белгилөөнү К.Фурье (1768—1830) киргизген, бирок интегралдоонун чектерин мурда эле Эйлер көрсөткөн.

**2. Интегралдык эсептөөлөрдүн тарыхынан.** Байыркы Грециялык математиктердин жалпак фигуралардын *квадратураларын* (б.а. аянттарын эсептөө), ошондой эле нерсенин *кубатураларын* (көлөмдөрүн эсептөө) табуу боюнча эсте калаарлык жетишкендиктеринин көпчүлүгү Евдокс Книдск (болжд. алг. 408—355 бизд. эрага чейин) тарабынан сунуш кылынган *аягына чыгуу методунун* колдонулуштары менен тыгыз байланышта болгон. Бул методдун жардамы менен Евдокс, мисалы, эки тегеректин аянттарынын катышы алардын диаметрлеринин квадраттарынын катышындай катышаарын, ал эми конустун көлөмү ошондой эле негизге жана бийиктикке ээ болгон цилиндрдин көлөмүнүн $\frac{1}{3}$ не барабар экендигин далилдеген.

Евдокстун методун Архимед өркүндөткөн. Мындай модификация менен силер таанышсыңар: геометрия курсунда келтирилген тегеректин аянтынын формуласы Архимеддин идеясына негизделген. Архимеддин методун мүнөздөөчү негизги этаптарды эсибизге келтирели:

1) тегеректин аянты анын сыртынан сызылган туура көп бурчтуктардын каалаган аянтынан кичине, бирок ичтен сызылгандардын аянтынан чоң экендиги далилденет; 2) алардын жактарын чексиз эки эселентүүдө бул көп бурчтуктардын аянттарынын айырмасы нөлгө умтулаары далилденет; 3) тегеректин аянтын эсептөө үчүн туура көп бурчтуктардын аянттарынын катышы алардын жактарын чексиз эки эселенткенде эмнеге умтулаарын табуу жетиштүү.

Аягына чыгуу методунун жардамы менен, ошондой эле бир топ башка курч мүнөздөгү табылгалар менен (анын ичинде механикалык моделдерди да пайдаланып) Архимед көп маселелерди чечкен. Ал $\pi$ санынын чектерин $(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7})$ тапкан, шардын жана эллипсоиддин көлөмүн, параболанын сегментинин аянтын ж.б. тапкан. Архимеддин өзү бул натыйжаларды жогору баалаган: анын өтүнүчү боюнча Архимеддин мүрзөсүнө цилиндрдин ичи-





**Архимед**

(Болжд. алг. б.э.ч. 287—212) — улуу окумуштуу. Математика менен механиканын көп фактыларынын алгачкы ачуучусу, жаркын инженер. Архимеддин аянттарды жана көлөмдөрдү эсептөө, механикадагы маселелерди чыгаруу менен байланышкан терең жана курч идеялары негизинен 2000 жылдан кийин ачылган математикалык анализдин ачылыштарынын баштапкы түрү.

нен сызылган шар оюлган (андай шардын көлөмү цилиндрдин көлөмүнөн $\frac{2}{3}$ не барабар экендигин Архимед далилдеген).

Интегралдык эсептөөлөрдүн көп идеяларын Архимед алдын ала билген. (Иш жүзүндө пределдер жөнүндөгү биринчи теоремалар ал тарабынан далилденгендигин кошумчалай кетели.) Бирок бул идеялар такталып, калыбына келип, эсептөөлөрдүн деңгээлине жетишине бир жарым миң жылдан ашык убакыт өткөн.

Жаңы табылгаларга жетишкен XVII кылымдын математиктери Архимеддин илимий эмгектерин үйрөнүшкөн. Андан башка метод *бөлүнгүс методу* да кеңири пайдаланууга ээ болгон жана ал Байыркы Грецияда жаралган (ал эң биринчи Демокриттин атомдук көз карашына байланышта болгон). Мисалы, алар ийри сызыктуу трапецияны (131-*а*, сүрөт) узундугу $f(x)$ болгон вертикалдык кесиндилерден куралган деп элестетишкен, ошону менен эле бирге аларды *чексиз кичине чоңдукту* түзгөн $f(x)\,dx$ аянт менен байланыштырышкан. Ушуга байланыштуу издеген аянт төмөнкү суммага —

$$S = \sum_{a<x<b} f(x)\ dx$$

барабар деп эсептешкен. Айрым учурда бул сумманын кээ бир мүчөлөрү нөл экенин, бирок өзгөчө нөлдөр экенин, жыйынтыгында чексиз кошулуучулардын суммасы өзүнчө аныкталган оң сумманы берерин баса белгилешкен.

Мына ушундай шектүү болуп көрүнгөн идеянын негизинде И. Кеплер (1571—1630) «Жаңы астрономия» 1609-ж. жана «Вино бочкаларынын стереометриясы» (1615-ж.) деген чыгармала-

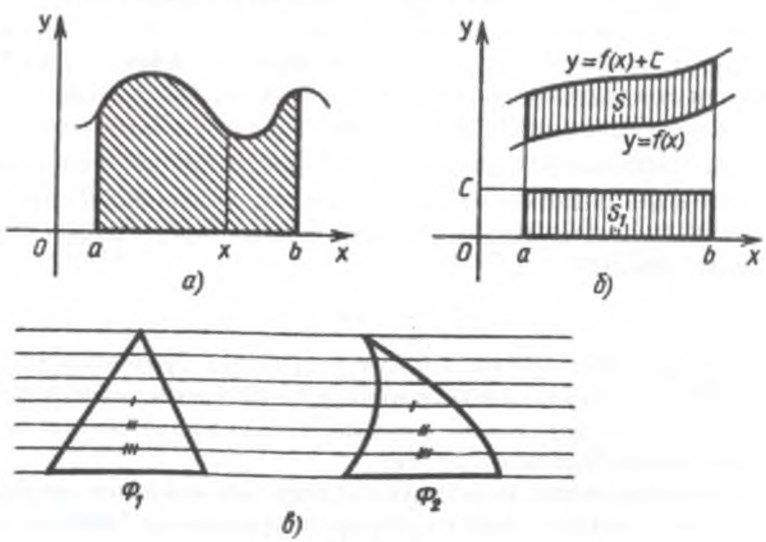
**Риман Георг Фридрих Бернхард**

**(1826 — 1866)**

**— немецтик окумуштуу, XIX кылымдын эң көрүнүктүү математиктеринин бири. Сандардын теориясында жана комплекстүү өзгөрмөлүү функциялардын теориясында эң сонун ачылыштарды жараткан. Римандын геометриясы деп аталган евклиддик эмес жаңы геометриянын негизин түзгөн. Кошинин ачкандарын андан ары улантып, интегралдык теорияны жараткан.**

рында бир топ аянттарды (мисалы, эллипс менен чектелген фигуранын аянтын) жана көлөмдөрдү (нерсе чексиз жука пластинкаларга кесилген) туура эсептеген. Мындай изилдөөлөр италиялык математиктер Б. К а в а л ь е р и (1598—1647) жана Э. Т о р р и ч е л л и (1608—1647) тарабынан улантылган. Б. Кавальеринин кайсы бир кошумча шарттардын негизинде келтирген ошондогу принциби азыркы биздин убакытта да өз күчүн сактоодо.

131-*б*, сүрөттө көрсөтүлгөндөй, жогору жана төмөн жагынан $y = f(x)$ жана $y = f(x) + c$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептөө талап кылынсын дейли.




131-сүрөт



**Чебышев Пафнутий Львович**

**(1821 — 1894)**

**— орус математиги жана механиги. Анын дүйнөгө белгилүү болгон изилдөөлөрү функцияга көп мүчөлөр аркылуу жакындашуунун теориясына (оптималдык жакындатуунун Чебышевдин көп мүчөлөрүнө) интегралдык эсептөөлөргө, ыктымалдуулук теориясына, механизмдердин теориясына тиешелүү.**

Биздин фигураны, Кавальеринин терминологиясы боюнча, «бөлүнгүс» чексиз жука мамычалардан куралган деп элестетип, алардын бардыгы жалпы $c$ негизге ээ болорун байкоого болот. Аларды вертикалдык багытта жылдырып негизи $b - a$ жана бийиктиги $c$ болгон тик бурчтуктарды түзө алабыз. Ошондуктан изделүүчү аянт түзүлгөн тик бурчтуктун аянтына барабар, б.а.

$$S = S_1 = c(b - a).$$

Жалпак фигуралардын аянттары үчүн Кавальеринин жалпы принциби төмөндөгүдөй айтылат.

*Өз ара параллель болгон түз сызыктардын кандайдыр тобу барабар узундуктагы кесинди боюнча $\Phi_1$ жана $\Phi_2$ фигураларын кесип өтүшсүн дейли* (131-*в*, сүрөт). (XVII кылымдын математиктеринин ой жүгүртүүлөрүнүн негизинде айтылбаса анык болбой турган айтылышты келтирбейбиз.)

Буга окшош принцип стереометрияда бар жана ал көлөмдөрдү табууда да пайдалуу. Кавальеринин принцибинен келип чыга турган натыйжаларды өзүнөр келтире аласыңар. Мисалы, негизи жана бийиктиги жалпы болгон тик жана жантык цилиндрлер барабар көлөмдөргө ээ болорун далилдегиле.

XVII кылымда интегралдык эсептөөлөргө тиешелүү болгон көп ачылыштар пайда болду. Мисалы, 1629-жылы эле П. Ферма $y = x^n$, мында $n$ бүтүн сан, ийри сызыгынын квадратурасы жөнүндөгү маселени чыгарган (б. а. иш жүзүндө $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ формуласын тапкан) жана анын негизинде оордук борборлорун табууга бир катар маселелерди чыгарган. И.Кеплер өзүнүн планеталардын кыймылы жөнүндөгү атактуу закондорун ачууда чындыгында жакындатып интегралдоонун идеясына таянган. Ньютондун окутуу-

**Лебег Анри**

**(1875—1941)**

— француздук математик. Өлчөм теориясынын түзүүчүсү (аянт жана көлөм деген түшүнүктөрүн жалпылоо), анын негизинде интегралдык жаңы теорияны иштеп чыккан.

---

чусу И. Барроу (1630—1677) интегралдоо менен дифференцирлөөнүн байланышын түшүнүүгө жакын барган. Функцияларды даражалуу катарлар аркылуу туюнта турган эмгектер чоң мааниге ээ болгон.

Бирок XVII кылымдын математикеринин чектен ашкан тапкычтыктарынын маанилүү жыйынтыктарына карабастан, эсептөөлөр али боло элек эле. Көптөгөн айрым маселелерди чыгаруунун негизин түзгөн жалпы идеяны бөлүп алуу зарыл, ошону менен эле бирге жетишерлик даражадагы жалпы алгоритмди берген дифференцирлөө жана интегралдоо операцияларын байланыштыруу керек. Муну бири-бири менен байланышпастан Ньютон жана Лейбниц түзүштү, ал Ньютон — Лейбництин формуласы деген ат менен силерге белгилүү. Ушуну менен биротоло жалпы метод күчүнө кирди. Эми көп функциялардын баштапкы функцияларын табууну үйрөнүү жана жаңы эсептөөлөрдүн логикалык негизин түзүү керек, ж.б. Бирок эң негизгиси иштелип калган: дифференцирлөө жана интегралдоо эсептөөлөрү түзүлдү.

Математикалык анализдин методдору кийинки кылымда активдүү өнүктү (биринчи иретте элементардык функцияларды интегралдоонун изилдөөнүн системасын бүтүп калган Л. Эйлердин жана И. Бернуллинин аттарын атоо керек). Интегралдык эсептөөнүн өнүгүшүнө орус математиктери М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804—1889), П. Л. Чебышев (1821—1894) катышышты. Айрым алганда Чебышевдин ачкандары принциптүү мааниге ээ болду, ал элементардык функциялар аркылуу туюнтулбай турган интегралдардын болушун далилдеген.

Интегралдын теориясынын жеткиликтүүлүгү өткөн кылымда



гана пайда болду. Бул маселенин чечилиши О. Кошинин, немец математиктеринин эң көрүнүктүүлөрүнүн бири Б. Римандын (1826—1866), француздук математик Г. Дарбунун (1842—1917) ысымдары менен тыгыз байланышкан.

Фигуралардын аянттарынын жана көлөмдөрүнүн бар болушу менен байланышкан көп маселелердин талабына жооп катары К. Жордандын (1838—1922) түзгөн өлчөм теориясы алынды.

Интеграл түшүнүктөрүнүн ар кандай жалпыланышы биздин кылымдын башталышында эле француз математиктери А. Лебег (1875—1941) жана А. Данжуа (1884—1974), советтик математик А. Я. Хинчин (1894—1959) тарабынан сунуш кылынган.

### *Кайталоого мисалдар жана суроолор*

**1.** 1) Баштапкы функциянын аныктамасын келтиргиле.

2) $R$ де $f$ функциясынын баштапкы функциясы $F$ экенин далилдегиле:

а) $f(x)=2x+3$, $F(x)=x^2+3x+1$;

б) $f(x)=\sin 2x+3$, $F(x)=-\dfrac{\cos 2x}{2}+3x$;

в) $f(x)=-x^3+5$, $F(x)=-\dfrac{x^4}{4}+5x+2$;

г) $f(x)=-\cos\dfrac{x}{2}+1$, $F(x)=-2\sin\dfrac{x}{2}+x$.

3) Берилген аралыкта $f$ тин баштапкы функциясы $F$ боло алабы:

а) $R$ де $F(x)=x^2-x$, $f(x)=2x-1$;

б) $R$ де $F(x)=\dfrac{1}{x^2}-\sin x$, $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}-\cos x$;

в) $R$ де $F(x)=x^3+1$, $f(x)=\dfrac{x^3}{4}+x$;

г) $R$ де $F(x)=x+\cos x$, $f(x)=1\sin x$?

**2.** 1) Берилген аралыкта функциянын турактуулугунун белгисин келтиргиле. Баштапкы функциянын негизги касиеттерин келтиргиле. 2) Берилген функциялар үчүн алардын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн жазгыла:

а) $f(x)=kx+b$ ($k$ жана $b$ – турактуу сандар); б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=x^n$ ($n$ — бүтүн сан, $n\neq -1$) г) $f(x)=\cos x$.

3) $f$ функциясы үчүн берилген чекитте берилген мааниде ээ болгон $F$ баштапкы функцияны тапкыла:

а) $f(x)=\sin x-\cos x$, $F(\pi)=1$; б) $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$, $F(3)=5$;

в) $f(x)=2x-5$, $F(1)=-2$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $F(6)=10$.

3. 1) Баштапкы функцияларды табуунун үч эрежесин келтиргиле. 2) Берилген функциялар үчүн баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x)=\sin 3x-\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}$; б) $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=(4-5x)^3-\frac{1}{(2x-1)^3}$; г) $f(x)=x-10\cos 2x$.

3) $f$ функциясы үчүн графиги $M$ чекити аркылуу өткөн баштапкы функцияны тапкыла:

а) $f(x)=(2-3x)^2$, $M(1;\ 2)$; б) $f(x)=\sin 2x$, $M(\frac{\pi}{4};\ -2)$;

в) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $M(\frac{\pi}{4};\ 2)$; г) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $M(0;\ 3)$.

4. 1) Кандай фигураны ийри сызыктуу трапеция деп айтышат? Ийри сызыктуу трапециянын аянтын эсептөө үчүн болгон формуланы жазгыла. 2) Ийри сызыктуу трапецияга мисалдар келтиргиле. 3) Берилген сызыктар менен чектелген ийри сызыктуу трапецияларды сызгыла жана алардын аянтын тапкыла:

а) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$;

б) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$;

в) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=3$;

г) $y=3-2x-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$.

5. 1) Интеграл деген эмне экендигин түшүндүргүлө. 2) Ньютон — Лейбництин формуласын жазгыла. Интегралды эсептегиле:

а) $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{(x+10)^2}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx$; г) $\int_{0}^{3}x^2\,dx$.

3) Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

а) $y=x^2$, $y=3x$; б) $y=x^2-4x+6$, $y=1$, $x=1$, $x=3$;

в) $y=4-x^2$, $y=3$; г) $y=\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.







# КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

## § 9. Даража түшүнүгүн жалпылоо

### 32. $n$-даражадагы тамыр жана анын касиеттери

**1. Тамырдын аныктамасы.** Силер $a$ санынын квадраттык тамыры жөнүндөгү түшүнүк менен таанышсыңар: ал квадраты $a$ га барабар болгон сан. Каалаган $n$ натуралдык саны үчүн да $a$ санынын $n$-даражадагы тамыры ушуга окшош аныкталат.

Аныктама. ***a санынын n-даражадагы тамыры деп n-даражасы a га барабар болгон сан аталат.***

○ 1-мисал. 27 санынын үчүнчү даражадагы тамыры 3кө барабар, себеби $3^3=27$. 2 жана $-2$ сандары 64 санынан алтынчы даражадагы тамырлар болушат, себеби $2^6=64$ жана $(-2)^6=64$.

Берилген аныктамага ылайык, $a$ санынын $n$-даражадагы тамыры — бул $x^n=a$ теңдемесинин чыгарылышы. Бул теңдеменин тамырларынын саны $n$ жана $a$ сандарынан көз каранды. $f(x)=x^n$ функциясын карап көрөлү. Бул функция $[0;\infty)$ аралыгында $n$ дин бардык маанилеринде өсөрү жана $[0;\infty)$ аралыгындагы бардык сан анын мааниси боло алары бизге белгилүү. Тамыр жөнүндөгү теорема боюнча $(8-n)\,x^n=a$ теңдемеси ар бир $a\in[0;\infty)$ үчүн терс эмес тамырга ээ жана ал бирөө гана. Ал $a$ санынын $n$-даражадагы *арифметикалык тамыры* деп аталат жана $\sqrt[n]{a}$ аркылуу белгиленет; $n$ санын *тамырдын көрсөткүчү*, ал эми $a$ санынын өзүн — *тамыр алдындагы туюнтма* деп атайбыз. $\sqrt{\ }$ деген тамырдын белгисин *радикал* деп да аташат.

Аныктама. ***a санынын n-даражадагы арифметикалык тамыры деп, n-даражасы a га барабар болгон терс эмес санды айтабыз.***

○ 2-мисал. Төмөнкү маанилерди табабыз: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

а) $\sqrt[3]{8}=2$, себеби $2^3=8$ жана $2>0$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{2}{3}$, себеби $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$ жана $\frac{3}{2}>0$. ●

$n$ жуп болсо, функция $f(x) = x^n$ жуп болот. Мындан, эгерде $a > 0$ болсо, $x^n = a$ теңдемеси, $x_1 = \sqrt[n]{a}$ тамырынан башка, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ тамырына да ээ болот. Эгерде $a = 0$ болсо, анда тамыр бирөө: $x = 0$, эгерде $a < 0$ болсо, анда бул теңдеме тамырга ээ болбойт, себеби ар кандай сандын жуп даражасы терс эмес.

Ошентип, $n$ жуп болгондо ар канда $a$ оң санынын $n$-даражадагы эки тамыры болот; 0 санынын $n$-даражадагы тамыры нөлгө барабар болот; терс сандын жуп даражадагы тамыры болбойт.

○ 3-м и с а л. $x^4 = 81$ теңдемеси эки тамырга ээ: алар 3 жана −3. Ошентип, 81 санынын төртүнчү даражадагы эки тамыры бар. Мында $\sqrt[4]{81}$ терс эмес сан, б.а. $\sqrt[4]{81} = 3$, ал эми $-3 = \sqrt[4]{81}$.

4-м и с а л. $\sqrt[4]{3}$ саны $x^4 = 3$ теңдемесинин оң тамыры. Бул сан (жана ошондой эле — $\sqrt[4]{3}$ саны дагы) иррационалдык сан. Анын ондук маанилерин төмөнкүдөй удаалаштыкта эсептөөгө болот:

$$1 < \sqrt[4]{3} < 2, \text{ себеби } 1^4 < 3 < 2^4;$$

$$1,3 < \sqrt[4]{3} < 1,4, \quad \text{себеби } 1,3^4 < 3 < 1,4^4 \quad \text{ж.б.}$$

($\sqrt[4]{3} = 1,31607\ldots$ экендигин текшергиле...). ●

$n$ дин так маанилеринде $f(x) = x^n$ функциясы бүткүл сан түз сызыгында өсөт; анын аныкталуу областы бардык анык сандардын көптүгү. Тамыр жөнүндөгү теореманы пайдаланып, ар кандай $a$ үчүн $x^n = a$ теңдемеси жалгыз гана бир тамырга ээ болорун көрөбүз, мисалы, $a < 0$ болгондо. Бул тамырды $a$ нын ар кандай мааниси үчүн (анын ичинде $a$ нын терс мааниси үчүн да) $\sqrt[n]{a}$ деп белгилейбиз.

Ошентип, *$n$ дин так маанилеринде ар кандай $a$ санынын $n$-даражадагы тамыры болот жана бирөө гана.*

Так даражадагы тамырлар үчүн төмөнкү барабардык орун алат:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Чындыгында,

$$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = -1 \cdot a = -a,$$

б.а. $-\sqrt[n]{a}$ саны — $a$ санынын $n$-даражадагы тамыры болот. Бирок $n$ так учурда мындай тамыр бирөө гана. Демек, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.





$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ барабардыгынын негизинде ($n$ так учурда) терс сандын так даражадагы тамырын ошол эле даражадагы арифметикалык тамыр аркылуу туюнтса болот. Мисалы, $\sqrt[5]{-71} = -\sqrt[5]{71}$, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

1-э с к е р т ү ү. Ар кандай заттык сан $x$ үчүн

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{эгерде } n \text{ жуп болсо;} \\ x, & \text{эгерде } n \text{ так болсо} \end{cases}$$

(муну өз алдынарча далилдегиле).

2-э с к е р т ү ү. $a$ санынын биринчи даражадагы тамырын $a$ га барабар деп алуу оң. Сандын экинчи даражадагы тамыры *квадраттык тамыр* деп аталарын билесиңер, ал эми тамырдын көрсөткүчү болгон 2ни жазышпайт (мисалы, 7 санынын квадраттык тамыры жөн гана $\sqrt{7}$ деп белгиленет). Үчүнчү даражадагы тамыр *куб тамыр* деп аталат.

○ 5-м и с а л. Теңдемелерди чыгарабыз: а) $x^5 = 11$; б) $x^8 = 7$.

а) $n$-даражадагы тамырдын аныктамасы боюнча $x$ саны —11 санынын бешинчи даражадагы тамыры. Тамырдын көрсөткүчү 5 деген так сан, ошондуктан мындай тамыр болот жана ал бирөө гана: ал $\sqrt[5]{-11}$. Ошентип, $x = -\sqrt[5]{-11}$.

б) $n$-даражадагы тамырдын аныктамасы боюнча $\sqrt[8]{7}$ саны $x^8 = 7$ теңдемесинин тамыры болот. 8 жуп сан болгондуктан $-\sqrt[8]{7}$ саны да бул теңдеменин тамыры болот. Ошентип, $x_1 = \sqrt[8]{7}$, $x_2 = -\sqrt[8]{7}$. Ж о о б у н $x = \pm\sqrt[8]{7}$ түрүндө жазса болот. ●

**2. Тамырлардын негизги касиеттери.** $n$-даражадагы арифметикалык тамырлардын силерге белгилүү касиеттерин келтирели.

*Ар кандай натуралдык сан $n$, бүтүн $k$ жана терс эмес ар кандай $a$ жана $b$ сандары үчүн төмөндөгү барабардыктар орун алат:*

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0)$.

4°. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (эгерде $k \leq 0$, анда $a \neq 0$)

1⁰ касиетти далилдейбиз. Аныктама боюнча $\sqrt[n]{ab}$ бул $n$-даражадагы $ab$ га барабар болгон терс эмес сан. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ саны терс эмес. Ошондуктан $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$ барабардыгын далилдөө жетиштүү болот. Ал натуралдык даража көрсөткүчтүн касиеттеринен жана n-даражадагы тамырдын аныктамасынан келип чыгат:

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab.$$

Төмөнкү үч касиет да ошондой эле далилденет:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geq \text{ жана } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geq 0 \text{ жана } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk}=((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a;$$

$$\sqrt[n]{a}\geq 0 \text{ жана } (\sqrt[n]{a})^{nk}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

Эми 5⁰ касиетти далилдейбиз. $(\sqrt[n]{a})^k$ санынын $n$-даражасы $a^k$ га барабар экендигин белгилей кетели:

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n\geq(\sqrt[n]{a})^{kn}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

Арифметикалык тамырдын аныктамасы боюнча $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$ (себеби $(\sqrt[n]{a})^k\geq 0$).

Тамырлары бар сандык туюнтмаларды өзгөртүп түзүүгө пайдаланылган 1⁰–5⁰ касиеттердин колдонулушунун мисалдарын келтирели.

○ 6 - м и с а л. Төмөнкү туюнтмаларды өзгөртүп түзөлү:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$.

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$ (1⁰-касиет);

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$ (2⁰-касиет);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (3⁰-касиет);

г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$ (4⁰-касиет);

д) 5⁰ касиетти пайдаланып, $\sqrt[7]{128^3}=(\sqrt[7]{128})^3=2^3=8$ экендигин табабыз. ●





Арифметикалык тамырдын төмөнкү касиетин далилдейбиз.

6⁰. $0\leq a<b$ *ны канааттандырган ар кандай a жана b сандары үчүн,*

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$$

*барабарсыздыгы аткарылат.*

Далилдөөнү карама-каршы метод менен жүргүзөбүз. $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$ болсун дейли. Анда натуралдык көрсөткүчтүү даражалардын касиеттери боюнча $(\sqrt[n]{a})^n\geq(\sqrt[n]{b})^n$, б.а $a\geq b$. Бул берилген $a<b$ шартына карама-каршы келет.

○ 7 - м и с а л. $\sqrt[3]{2}$ жана $\sqrt[5]{3}$ сандарын салыштырабыз.

$\sqrt[3]{2}$ жана $\sqrt[5]{3}$ сандарын бирдей көрсөткүчтүү тамырларга келтиребиз: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$ жана $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27^3}$ (4⁰-касиет). $32>27$ барабарсыздыгынан жана 6⁰-касиеттен $\sqrt[15]{32}>\sqrt[15]{27}$, демек, $\sqrt[3]{2}>\sqrt[5]{3}$ экендиги келип чыгат.

8 - м и с а л. $x^6>20$ барабарсыздыгын чыгарабыз.

Бул барабарсыздык $x^6-20>0$ барабарсыздыгына тең күчтө. $f(x)=x^6-20$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, интервал методун пайдалансак болот. $x^6-20=0$ теңдемеси эки тамырга ээ: $\sqrt[6]{20}$ жана $-\sqrt[6]{20}$. Бул эки сан түз сызыкты үч аралыкка бөлөт. Берилген барабарсыздыктын чыгарылышы — алардын ичинен экөөнүн биригүүсү $(-\infty;-\sqrt[6]{20})$ жана $(\sqrt[6]{20};\infty)$ ●.

### *Көнүгүүлөр*

Барабардыктардын тууралыгын текшергиле (381—382).

**381.** а) $\sqrt[4]{16}=2$; б) $\sqrt[7]{-1}=-1$; в) $\sqrt[10]{1024}=2$; г) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

**382.** а) $\sqrt[17]{1}=1$; б) $\sqrt[6]{64}=2$; в) $\sqrt[3]{-343}=-7$. г) $\sqrt[19]{0}=0$.

Эсептегиле (383—388).

**383.** а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

**384.** а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$.

Теңдемени чыгаргыла (385—388).

**385.** а) $x^3+4=0$; б) $x^6=5$; в) $x^3=4$; г) $x^4=10$.

**386.** а) $x^{10}-15=0$; б) $x^7+128=0$; в) $x^6-64=0$; г) $x^5=3$.

**387.** а) $16x^4-1=0$; б) $0{,}01x^2+10=0$;

в) $0{,}2x^6-1{,}28=0$; г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$.

**388.** а) $\sqrt[3]{x}=-0{,}6$; б) $\sqrt[4]{x}=3$; в) $\sqrt{x}=5$; г) $\sqrt[7]{x}=-1$.

Туюнтмалардын сандык маанилерин тапкыла (389—394).

**389.** а) $(\sqrt[4]{11})^4$; б) $(2\sqrt[5]{-2})^5$; в) $(\sqrt[3]{7})^3$; г) $(-\sqrt[6]{2})^6$.

**390.** а) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{32\cdot 243}$; в) $\sqrt[3]{8\cdot 343}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 16}$.

**391.** а) $\sqrt[5]{160\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; в) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$.

**392.** а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$; б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

**393.** а) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; г) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

**394.** а) $\sqrt[6]{\frac{64}{100000000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$; б) $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot 4{,}5-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}}$;

в) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$; г) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}}$.

**395.** Берилген сандардын (үтүрдөн кийинки) биринчи эки ондук белгисин тапкыла:

а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt[3]{3}$.

Таблицалардын же калькулятордун жардамы менен 0,01 тактыкта тамырдын жакындатылган маанисин тапкыла (396—397).

**396.** а) $\sqrt[3]{10{,}17}$; б) $\sqrt{71}$; в) $\sqrt{13{,}21}$; г) $\sqrt[3]{11}$.

**397.** а) $\sqrt[9]{13{,}7}$; б) $\sqrt[6]{10}$; в) $\sqrt[4]{2{,}8}$; г) $\sqrt[8]{13}$.

Сандарды салыштыргыла (398—401).

**398.** а) $\sqrt[5]{0{,}2}$ жана 0; б) $\sqrt[12]{0{,}4}$ жана $\sqrt[12]{\frac{5}{12}}$;

в) $\sqrt[7]{1{,}8}$ жана 1; г) $\sqrt[8]{0{,}2}$ жана $\sqrt[8]{0{,}3}$.





**399.** а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ жана $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}}$ жана $\sqrt[18]{0{,}43}$;

в) $\sqrt[5]{2}$ жана $\sqrt[5]{3}$; г) $\sqrt[10]{0{,}8}$ жана 1.

**400.** а) $\sqrt{0{,}3}$ жана $\sqrt[5]{0{,}05}$; б) $\sqrt[3]{4}$ жана $\sqrt[5]{8}$;

в) $\sqrt[3]{7}$ жана $\sqrt[6]{40}$; г) $\sqrt{5}$ жана $\sqrt[8]{500}$.

**401.** а) $\sqrt[3]{-0{,}4}$ жана $\sqrt[5]{-0{,}3}$; б) $\sqrt[5]{-5}$ жана $\sqrt[3]{-3}$;

в) $\sqrt[3]{-2}$ жана $\sqrt[3]{-4}$; г) ) $\sqrt[3]{-5}$ жана $\sqrt[5]{-3}$.

**402** Көбөйтүүчүнү тамырдын сыртына чыгаргыла ($a>0$, $b>0$):

а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$; б) $\sqrt[5]{-128a^7}$; в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$; г) $\sqrt[3]{54a^{10}}$.

**403.** Көбөйтүүчүнү тамырдын астына киргизгиле ($a>0$, $b>0$):

а) $-b\sqrt[4]{3}$; б) $ab\sqrt[3]{\frac{5b^3}{a^7}}$; в) $a\sqrt[4]{7}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}$.

$a$ нын кандай маанисинде барабардык туура (404—405)?

**404.** а) $\sqrt{a^2}=-a$; б) $\sqrt[3]{a^3}=a$; в) $\sqrt[5]{a^5}=|a|$; г) $\sqrt[4]{a^4}=a$.

**405.** а) $\sqrt[3]{a^3}=-a$; б) $\sqrt[6]{a^6}=-a$; в) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$; г) $\sqrt[7]{a^7}=a$.

Бөлчөктүн астында тамыр болбогондой кылып берилген туюнтманы жазгыла (406—407).

**406.** а) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}$.

**407.** а) $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{4}{x\sqrt[4]{4}}$; г) $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}$.

---

Сандык туюнтманы $a\sqrt[n]{b}$ түрүнө келтиргиле, мында $a$ — рационалдык сан, ал эми $b$ — натуралдык сан (408—409).

**408.** а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[5]{27\cdot 25}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$; г) $\frac{10}{\sqrt[3]{8}}$.

**409.** а) $\sqrt[12]{25^3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}}$; в) $\sqrt[8]{\frac{16^3}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{5}}$.

**410.** $t=\sqrt[4]{x}$ же $t=\sqrt[6]{x}$ түрүндөгү өзгөрүлмөлөрдүн жардамы менен теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$;

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$;     г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (411—412).

**411.** а) $x^4 < 3$;     б) $x^{11} \geq 7$;     в) $x^{10} > 2$;     г) $x^3 \leq 5$.

**412.** а) $\sqrt[3]{x} < -7$;     б) $\sqrt[6]{x} \geq 2$;     в) $\sqrt[3]{x} > 2$;     г) $\sqrt[4]{x} \leq 3$.

Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (413—414)

**413.** а) $\sqrt[6]{a^6}$, мында $a \leq 0$;     б) $\sqrt[4]{a^4}$, мында $a \geq 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5}$; г) $\sqrt{a^2}$, мында $a \geq 0$.

**414.** а) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, мында $a \leq 0$;     б) $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7}$, мында $a \geq 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6}$, мында $a \geq 0$;     г) $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8}$, мында $a \leq 0$.

**415.** Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $\sqrt[3]{10 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{73}}$;     б) $\dfrac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}} + \sqrt{17}$;

в) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}}$;     г) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

**416.** Бөлчөктүн бөлүмүндө радикал болгондой кылып туюнтманы жазгыла:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$;     б) $\dfrac{2}{a - \sqrt[3]{b}}$;     в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}$;     г) $\dfrac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

## 33. Иррационалдык теңдемелер

Өзгөрмөсү тамыр астында камтылган теңдемелер *иррационалдык теңдеме* деп аталат. Мисалы, $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$ теңдемеси ушундай теңдемеге кирет.

○ 1 - м и с а л. Төмөнкү теңдемени чыгаралы: $\sqrt{x^2 - 5} = 2$.

Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз: $x^2 - 5 = 4$.

Мындан төмөнкү келип чыгат: $x^2 = 9$, б.а. $x = 3$ же $x = -3$.

Алынган сандар теңдеменин чыгарылыштары экенин текшеребиз. Чындыгында, аларды бул теңдемеге койгондо

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2 \text{ жана } \sqrt{(-3)^2 - 5} = 2$$

деген туура барабардыктары келип чыгат. Демек, берилген теңдеменин чыгарылыштары $x = 3$ жана $x = -3$.

2 - м и с а л. $\sqrt{x} = x - 2$ теңдемесин чыгаралы.





Теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, $x = x^2 - 4x + 4$ тү алабыз.

Жөнөкөйлөткөндөн кийин тамырлары $x = 1$ жана $x = 4$ болгон $x^2 - 5x + 4 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Алынган сандар берилген теңдеменин чыгарылыштары болорун текшергиле. 4 санын бул теңдемеге койгондо $\sqrt{4} = 4 - 2$ туура барабардыгын алабыз, б.а. 4-берилген теңдеменин чыгарылышы. 1 санын койгондо оң жагында $-1$ди, ал эми сол жагында 1 ди алабыз. демек, 1 саны теңдеменин чыгарылышы боло албайт — муну (берилген теңдемени чыгаруу үчүн кабыл алынган ыкмага байланыштуу келип чыккан) *бөлөк тамыр* деп айтабыз.

Ж о о б у: $x = 4$. ●

Мындан биз иррационалдык теңдемелерди чыгарууда алынган чыгарылыштарды текшерүү талап кылынарын көрөбүз, себеби, мисалы, туура эмес барабардыкты квадратка көтөргөндө туура барабардыкты бериши мүмкүн. Чындыгында $1 = -1$ туура эмес барабардыгын квадратка көтөрүүдө $1^2 = (-1)^2$ туура барабардыгын берет.

○ 3 - м и с а л. $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$ теңдемесин чыгаралы.

Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз:

$$x^2 - 2 = x.$$

Анда тамырлары $x = -1$ жана $x = 2$ болгон

$$x^2 - x - 2 = 0$$

квадраттык теңдемени алабыз. $-1$ саны берилген теңдеменин тамыры боло албастыгы өзүнөн-өзү түшүнүктүү, себеби $x = -1$ болгондо теңдеменин эки жагы тең аныкталган эмес. Теңдемеге 2 санын койгондо $\sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$ туура барабардыгын алабыз. Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы 2 саны гана болуп эсептелет.

4 - м и с а л.

$$\sqrt{x - 6} = \sqrt{4 - x} \qquad (4)$$

теңдемесин чыгаралы.

Бул теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп, $x - 6 = 4 - x$, $2x = 10$ жана $x = 5$ ти алабыз. Ордуна коюп, 5 саны берилген теңдеменин тамыры боло албастыгына ишенебиз. Ошондуктан теңдеменин чыгарылышы жок. ●

Айрым учурларда тең күчтөгү өтүүлөрдү пайдалануу менен иррационалдык теңдемелерди чыгаруу бир кыйла оңой.

○ 5 - м и с а л. $\sqrt{x - 2} = x - 8$ теңдемесин чыгаралы.

Аныктама боюнча $\sqrt{x-2}$ — бул квадраты тамырдын астындагы туюнтмага барабар болгон терс эмес сан. Башкача айтканда $\sqrt{x-2}=x-8$ теңдемеси

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\ge 0 \end{cases}$$

системасына тең күчтө.

$x^2-17+66=0$ теңдемесине тең күчтө болгон системанын биринчи теңдемесин чыгарып, 11 жана 6 тамырларын алабыз, бирок $x-8\ge 0$ шарты $x=11$ үчүн гана орун алат. Ошондуктан берилген теңдеме бир гана $x=11$ тамырына ээ.

6 - м и с а л. $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$ теңдемесин чыгаралы.

Берилген иррационалдык теңдеме мурдагы каралган мисалдардан квадраттык эмес тамырдын болушу менен айырмаланат, мында тамыр — үчүнчү даражада. Ошондуктан «радикалдан кутулуу» үчүн теңдеменин эки жагын квадратка эмес, кубга көтөрүү керек: $(x-1)^3=x^2-x-1$. Өзгөрткөндөн кийин буларды алабыз:

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1,$$
$$x^3-4x^2+4x=0,$$
$$x(x^2-4x+4)=0,$$
$$x(x-2)^2=0.$$

Ошентип, $x_1=0$, $x_2=2$.

7 - м и с а л.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28 \end{cases}$$

системасын чыгаралы.

$u=\sqrt[3]{x}$ жана $v=\sqrt[3]{y}$ деп алып,

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^3+v^3=28 \end{cases}$$

системасын алабыз.

Экинчи теңдеменин сол жагын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2).$$

Биринчи теңдеме боюнча $u+v=4$. Ошондуктан система

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^2-uv+v^2=7 \end{cases}$$





системасына тең күчтө. Экинчи теңдемедеги $v$ нын маанисин биринчиден табылганды ($v=4-u$) коюп,

$$u^2-u(4-u)+(4-u)^2=7,\ \text{б.а.},\quad u^2-4u+3=0$$

теңдемесин алабыз.

Алынган квадраттык теңдеме эки тамырга ээ: $u_1=1$ жана $u_2=3$. Аларга туура келүүчү $v$ нын маанилери: $v_1=3$ жана $v_2=1$. $x$ жана $y$ өзгөрмөлөрүнө өтүп, төмөнкүлөрдү алабыз: $\sqrt[3]{x}=u_1$, б.а. $x_1=u_1^3=1$, $y_1=v_1^3=27$, $x_2=u_2^3=27$, $y_2=v_2^3=1$. Ж о о б у: (1; 27), (27; 1). ●

***Көнүгүүлөр***

Теңдемелерди чыгаргыла (417—420).

**417.** а) $\sqrt{x^4+19}=10$; б) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$;

в) $\sqrt{61-x^2}=5$; г) $\sqrt[3]{x-9}=-3$.

**418.** а) $\sqrt{x+1}=x-5$; б) $x+\sqrt{2x+3}=6$;

в) $\sqrt{2x-1}=x-2$; г) $3+\sqrt{3x+1}=x$.

**419.** а) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$; б) $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-x-3}$;

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$; г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}$.

**420.** а) $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}$; б) $x-2=\sqrt[3]{x^2-8}$;

в) $x=\sqrt[3]{x^3-x^2-8x+20}$; г) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$.

**421.** Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7, \\ 4\sqrt[4]{y}-3\sqrt[4]{x}=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}. \end{cases}$

---

Теңдемелерди чыгаргыла (422—425).

**422.** а) $\sqrt{x+1}\,\sqrt{x+6}=6$; б) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$;

в) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$; г) $\sqrt{x}\,\sqrt{2-x}=2x$.

**423.** а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;  б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2$;

в) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;  г) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$.

**424.** а) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$;  б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;

в) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$;  г) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$.

**425.** а) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$;  б) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$;

в) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}$;  г) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$.

Теңдемелердин системасын чыгаргыла (426—427).

**426.** а) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{x}\,\sqrt{y}=3;\end{cases}$  б) $\begin{cases}\sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10,\\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=10,\\ \sqrt{x}\,\sqrt{y}=8;\end{cases}$  г) $\begin{cases}2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8,\\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2.\end{cases}$

**427.** а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ x-y=16;\end{cases}$  б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ xy=216;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ x-y=32;\end{cases}$  г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27.\end{cases}$

## 34. Рационалдык көрсөткүчтөгү даражалар

Силерге бүтүн сандагы көрсөткүчтүү даражалар белгилүү. $a^n$ туюнтмасы бардык $a$ жана $n$ үчүн аныкталган $n \le 0$ болгондогу $a=0$ учурду эске албаганда. Бул даражалардын касиеттерин эске сала кетели.

*Ар кандай a жана b анык сандары үчүн жана ар кандай бүтүн m жана n сандары үчүн төмөндөгү барабардыктар орун алышат:*

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\ a^m:a^n=a^{m-n}\ (a\ne 0);$$

$$(a^m)^n=a^{mn};$$

$$(a\,b)^n=a^n\cdot b^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\ne 0);$$

$$a^1=a;\ a^0=1\ (a\ne 0).$$





Дагы бир касиетти белгилей кетели:

*Эгерде $m>n$ болсо, анда $a>1$ болгондо $a^m>a^n$ жана $0<a<1$ болгондо $a^m<a^n$ болот.*

Бул пунктта $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ ж.у.с. типтеги туюнтмалардын маанилерин тактоо менен бирге сандын даражасы жөнүндөгү түшүнүктү жалпылайбыз. Бул учурда бүтүн көрсөткүчтүү даража кандай касиеттерге ээ болсо, рационалдык көрсөткүчтүү даража да ошондой эле (эч болбогондо анын бөлүмүн түзгөн) касиеттерге ээ боло тургандай кылып аныктама берүү табигый нерсе. Анда ошону менен эле бирге, $a^{\frac{m}{n}}$ санынын $n$ — даражасы $a^m$ ге барабар болууга тийиш.

Чындыгында, эгерде

$$(a^p)^q=a^{pq}$$

касиети аткарылса, анда

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m.$$

Акыркы барабардык ($n$-даражадагы тамырдын аныктамасы боюнча) $a^{\frac{m}{n}}$ саны $a^m$ санынын $n$-даражадагы тамыры экендигин билгизип турат.

А н ы к т а м а . *$a>0$ санынын $r=\frac{m}{n}$ рационалдык көрсөткүчтүү даражасы деп, мында $m$ — бүтүн сан, $n$ — натуралдык сан ($n>1$), $\sqrt[n]{a^m}$ саны аталат.*

Демек, аныктама боюнча

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

0 санынын даражасы оң сандардын көрсөткүчү үчүн гана аныкталды; аныктама боюнча бардык $r>0$ үчүн $0^r=0$.

○ 1 - м и с а л. Бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын аныктамасы боюнча

$$7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\ 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\ a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}.$$

2 - м и с а л. $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$ жана $128^{-\frac{2}{7}}$ сан туюнтмаларынын маанисин табалы.

Бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын аныктамасын жана тамырлардын касиеттерин пайдаланып төмөнкүнү алабыз: $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$,

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27, \qquad 128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$ ●

**1 - э с к е р т ү ү.** Ар кандай $a$ оң сан үчүн жана ар кандай рационалдык сан $r$ үчүн $a^r$ саны оң болору бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражанын аныктамасынан дароо эле келип чыгат.

**2 - э с к е р т ү ү.** Ар кандай рационалдык сан көп түрдүү бөлчөктөр менен жазыла алат, мисалы, ар кандай натуралдык $k$ үчүн $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ болот. $a^r$ дин мааниси да $r$ рационалдык санынын жазылыш формасынан көз каранды эмес. Чындыгында эле, тамырлардын касиеттеринен муну алабыз:

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

**3 - э с к е р т ү ү.** $a < 0$ болгондо $a$ санынын рационалдык даражасы аныкталбайт жана ал кокустуктан эмес. Эгерде биз (1) формуланы $a < 0$ үчүн да туура деп эсептесек, анда, мисалы, $(-8)^{\frac{1}{3}}$ дин мааниси $\sqrt[3]{-8}$ ге б.а. $-2$ ге барабар болор эле. Бирок, экинчи жагынан, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, ошондуктан төмөнкүдөй барабардык орун алышы керек:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2.$$

Азыр, бүтүн көрсөткүчтүү даражанын негизги касиеттери жогоруда келтирилген рационалдык көрсөткүчтүү даражалар үчүн да сакталарын көрсөтөбүз (болгон айырмасы — келтириле турган касиеттер негиздери оң учурда гана туура).

*Ар кандай $r$ жана $s$ рационалдык сандары жана ар кандай $a$ жана $b$ оң сандар үчүн төмөнкү барабардыктар орун алат:*

$1^0$. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

$2^0$. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

$3^0$. $(a^r)^s = a^{rs}$.

$4^0$. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.

$5^0$. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Бул касиеттерди далилдөө үчүн рационалдык көрсөткүчтүү даражанын аныктамасын жана 36-пунктта далилденген тамырлардын касиеттерин пайдалануу керек. Мисалы, $1^0$, $3^0$ жана $4^0$



касиеттерди далилдейли. $r = \frac{m}{n}$ жана $s = \frac{p}{q}$ болсун дейли, мында $n$ жана $q$ — натуралдык сандар, $m$ жана $p$ — бүтүн сандар. Анда

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s};$$

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs};$$

$$(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^r \cdot b^r.$$

$2^0$ жана $5^0$ касиеттери ушуга окшош далилденет (тиешелүү далилдөөнү өз алдыңарча жүргүзгүлө).

○ **3 - м и с а л.** $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$ туюнтмасынын маанисин табалы.

Төмөнкүнү алабыз:

$$\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$$

**4 - м и с а л.**

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}}$

туюнтмаларын өзгөртүп түзүп, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

а) $$\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}};$$

б) $$\frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}} = \frac{(a^{0,4})^3 - (b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2 + a^{0,4}b^{0,7} + (b^{0,7})^2} = a^{0,4} - b^{0,7}.$$ ●

Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын төмөнкү эки касиетин белгилеп кетели:

$6^0$. *$r$ — рационалдык сан жана $0 < a < b$ болсун дейли. Анда*

*$r > 0$ болгондо $a^r < b^r$,*

*$r < 0$ болгондо $a^r > b^r$.*

$7^0$. *Ар кандай $r$ жана $s$ рационалдык сандар үчүн $r > s$ барабарсыздыгынан төмөнкү келип чыгат:*

*$a > 1$ болгондо $a^r > a^s$,*

*$0 < a < 1$ болгондо $a^r < a^s$.*

$6^0$ касиетти далилдейли. Эгерде $r > 0$ болсо, анда $r$ ди $r = \frac{m}{n}$ түрүндө жазууга болот, мында $m$ жана $n$ — натуралдык сандар.

$0 < a < b$ барабарсыздыгынан жана бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиеттеринен $a^m < b^m$ экендиги келип чыгат. Бул барабарсыздыктан тамырлардын касиети ($6^0$ касиет, 32-п.) боюнча муну алабыз:

$$\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}, \text{б.а. } a^r < b^r.$$

$r < 0$ учурунда далилдөө ушуга окшош жүргүзүлөт.

$7^0$ касиетти далилдөө үчүн адегенде $r$ жана $s$ рационалдык сандарын ортоқ бөлүмгө келтиребиз: $r = \frac{m}{n}$ жана $s = \frac{p}{n}$, мында $n$ — натуралдык сан, $m$ жана $p$ — бүтүн сандар. $r > s$ барабарсыздыгынан $m > p$ келип чыгат. Эгерде $a > 1$ болсо, анда $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ жана бүтүн көрсөткүчтүү даражанын касиети боюнча

$$(a^{\frac{1}{n}})^m > (a^{\frac{1}{n}})^p.$$

Эми $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r$ жана $(a^{\frac{1}{n}})^p = a^{\frac{p}{n}} = a^s$ экендигин эске алуу гана калды.

$0 < a < 1$ учур ушуга окшош далилденет.

○ 5 - м и с а л. $\sqrt[5]{8}$ жана $2^{\frac{2}{3}}$ сандарын салыштыралы.

$\sqrt[5]{8}$ санын рационалдык көрсөткүчтүү даража түрүндө жазалы:

$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$. $7^0$ касиет боюнча $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$, себеби $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

6 - м и с а л. $2^{300}$ жана $3^{200}$ сандарын салыштыралы.
Бул сандарды бирдей көрсөткүчтүү даража түрүндө жазалы:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}; \quad 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

$8 < 9$ болгондуктан $6^0$ касиет боюнча алабыз:

$$8^{100} < 9^{100}, \text{б.а. } 2^{300} < 3^{200}. \bullet$$

### *Көнүгүүлөр*

**428.** Берилген сандарды тамыр аркылуу жазгыла:

а) $3^{1,2}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}$; в) $4^{1,25}$; г) $6^{-1\frac{1}{2}}$.

**429.** Берилген туюнтманы көрсөткүчү рационалдык сан болгон даража түрүндө жазгыла:

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; б) $\sqrt[7]{3b}$; в) $\sqrt[13]{b^{-7}}$; г) $\sqrt[8]{4^5}$.





Сан туюнтмасынын маанисин тапкыла (430—431).

**430.** а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; в) $16^{\frac{5}{4}}$; г) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

**431.** а) $8^{\frac{1}{2}} : (8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}})$; б) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$;

в) $8^{2\frac{1}{3}} : 81^{0,75}$; г) $(1\frac{11}{25})^{-0,5} \cdot (4\frac{17}{27})^{-\frac{1}{3}}$.

Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла (432—433).

**432.** а) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; б) $a - a^{\frac{1}{2}}$; в) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}}$.

**433.** а) $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1$; б) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$;

в) $4 - 4x^{\frac{1}{3}}$; г) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$.

Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (434—435).

**434.** а) $\frac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{z - 8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}$; в) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}$; г) $\frac{a + b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$.

**435.** а) $\frac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\frac{a - 1}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{2}{3}} - 1} + 2a^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\frac{1}{a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$; г) $\frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$.

**436.** Сандарды салыштыргыла:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ жана $3^{\frac{19}{8}}$; б) $0,4^{-2,7}$ жана $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}$;

в) $\sqrt[3]{6^5}$ жана $6^{1,7}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ жана $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

---

**437.** Туюнтмалардын маанилерин тапкыла:

а) $81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

б) $0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$;

в) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{0,75} - 25^{0,5}$;

г) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - (2\frac{1}{4})^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$.

**438.** Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө:

а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} - 27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right) - \sqrt[3]{a^2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{m+\sqrt{2}} - \dfrac{m^2+4}{m^2+2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{m}\right)$.

**439.** Туюнтманын көрсөткүчү рационалдык сан болгон даража түрүндө жазгыла:

а) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5 \cdot ax^3}$; б) $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}}$; в) $\sqrt[7]{b^3} \cdot \sqrt[4]{b}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}$.

**440.** Туюнтманы тамыр түрүндө жазгыла:

а) $3 \cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; б) $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}}$; в) $2b^{-\frac{2}{3}}$; г) $b^{\frac{1}{3}} \; c^{\frac{2}{7}}$.

**441.** Сандарды салыштыргыла:

а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ жана $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$; б) $3^{600}$ жана $5^{400}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ жана $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$; г) $7^{30}$ жана $4^{40}$.

**442.** Туюнтмалар мааниге ээ болобу:

а) $(-3)^{-\frac{1}{7}}$; б) $(-2)^{-4}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$; г) $0^{-\frac{4}{7}}$?

**443.** Туюнтмалардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$; б) $x^{\frac{3}{5}}$; в) $x^{-\frac{3}{4}}$; г) $(x-5)^{\frac{2}{3}}$.

**444.** Өзгөрүлмөлөрдүн кандай маанилеринде барабардык туура:

а) $(a^{\frac{1}{6}})^6 = a$; б) $(a^4)^{\frac{1}{4}} = -a$; в) $(a^8)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}$; г) $(a^{0,7})^{1\frac{3}{7}} = -a$?





## § 10. КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

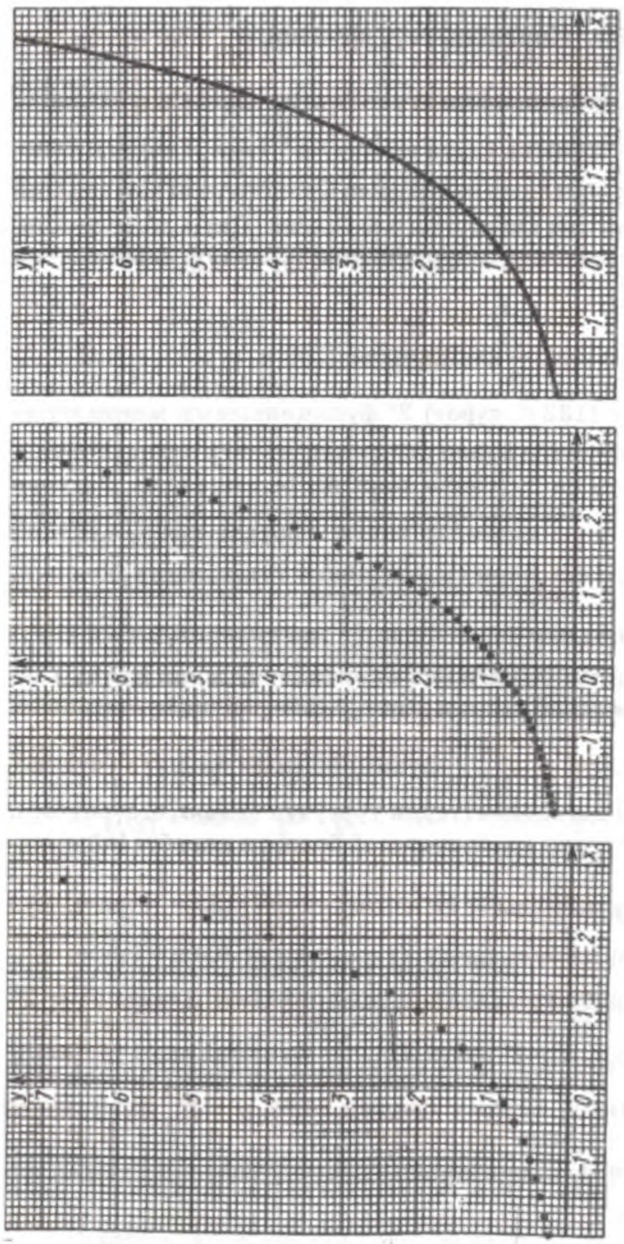
### 35. Көрсөткүчтүү функция

**1. Көрсөткүчү иррационалдык сан болгон даража.** $a$ оң санын белгилеп, ар бир $\frac{m}{n}$ санына туура келүүчү $a^{\frac{m}{n}}$ санын коёбуз. Ошону менен бирге рационалдык сандардын $Q$ көптүгүндө аныкталган жана 34-п. келтирилген касиеттерге ээ болгон $f(x) = a^x$ функциясын алабыз. $a = 1$ болгондо $a^x$ функциясы туруктуу, себеби $x$ тин бардык мааниси үчүн $1^x = 1$.

$[-2; 3]$ кесиндисинде $\frac{1}{4}$ кадам менен (132-*а*, сүрөт), андан кийин $\frac{1}{8}$ кадам менен (132-*б*, сүрөт) $2^x$ функциясынын маанилерин калькулятордун жардамы менен алдын ала эсептеп алып, $2^x$ функциясынын графигинин бир нече чекитин белгилейбиз. Ушунун эле өзүн $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ ж.у.с.. кадамдар менен оюбузда түзүп, алынган чекиттерди үзгүлтүксүз ийри сызык менен туташтырса болорун, аны $x = \frac{m}{n}$ рационалдык чекиттерде $2^{\frac{m}{n}}$ маанилерин кабыл алуучу жана бүткүл сан түз сызыгында аныкталуучу жана өсүүчү кайсы бир функциянын графиги деп эсептөө табигый нерсе экендигин көрөбүз (132-*в*, сүрөт). $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясынын графиги үчүн жетишээрлик көп сандагы чекиттерди тургузуп (133-*а*, *б*, сүрөттөр), бул функцияда жогорку касиеттерге ээ болорун көрөбүз (айырмасы эле $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясы $R$ де кемигенинде (133-*в*, сүрөт). Бул байкоолор төмөнкү айтылыштын тууралыгына өбөлгө түзөт.

Бул байкоолордон ар кандай иррационалдык $\alpha$ саны үчүн $2^\alpha$ жана $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ сандарын, $y = 2^x$ жана $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциялары үзгүлтүксүз болгондой кылып, бардык сандык окто $y = 2^x$ функциясы өсүүчү, ал эми $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциясы кемүүчү болгондой аныктоо керектиги көрүнөт.

$a > 1$ учурда иррационалдык $\alpha$ саны үчүн $a^\alpha$ саны кандайча



в) б) а)

132-сурет





**аныкталарын жалпы жагынан көрсөтөлү. Биз $y = a^x$ функциясы өсүүчү экендигин көрсөтөбүз. Ал үчүрда $r_1 < \alpha < r_2$ шартын канааттандырган ар кандай рационалдык $r_1$ жана $r_2$ сандары үчүн $a^\alpha$ саны $a^{r_1} < a^\alpha < a^{r_2}$ барабарсыздыгын канааттандырыш керек.**

$x$ ке жакындоочу $r_1$ жана $r_2$ нин маанилерин тандап, аларга туура келүүчү $a^{r_1}$ жана $a^{r_2}$ лердин маанилери бир аз айырмаланарын байкайбыз. Бардык рационалдык $r_1$ үчүн бардык $a^{r_1}$ ден чоң жана бардык рационалдык $r_2$ үчүн бардык $a^{r_2}$ ден кичине болгон бир гана $y$ саны бар экендигин далилдөөгө болот. Ушул $y$ саны аныктама боюнча $a^\alpha$ болот.

Мисалы, $2^x$ функциясынын $x_n$ жана $x'_n$ чекиттердеги маанилерин калькулятордун жардамы менен эсептеп, мында $x_n$ жана $x'_n$ маанилери $x = \sqrt{3}$ санынын ондук жакындаштыруулары, $x_n$ жана $x'_n$ канчалык $\sqrt{3}$ кө жакын болушса, $2^{x_n}$ жана $2^{x'_n}$ тер да ошончолук аз айырмаланышарын байкайбыз.

$1 < \sqrt{83} < 2$ болгондуктан

$$2^1 = 2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4.$$

$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, демек,

$$2^{1,7} \approx 3,2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3,4822022.$$

Ушундай эле жол менен $\sqrt{3}$ түн ашыгы жана кеми менен алынган ондук жакындаштырууларын карап көрүп, төмөнкү барабарсыздыктарга келебиз:

$$2^{1,73} \approx 3,3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3,3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3,3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3,321801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3,3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3,3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3,3219975.$$

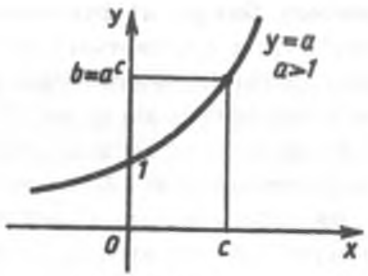
$2^{\sqrt{3}}$ түн калькулятордо эсептелинген мааниси мына мындай:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3,321997.$$

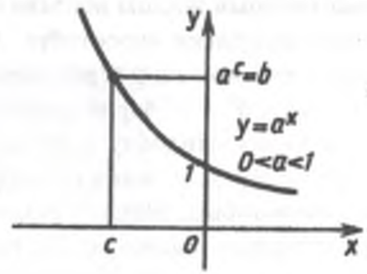
$0 < \alpha < 1$ үчүн $a^\alpha$ саны жогоркуга окшош аныкталат. Андан башка бардык $\alpha$ үчүн $1^\alpha = 1$ жана $\alpha > 0$ үчүн $0^\alpha = 0$ деп алынат.

**2. Көрсөткүчтүү функциянын касиеттери.**

А н ы к т а м а. **$y = a^x$ (мында $a > 0$, $a \neq 1$) формуласы менен берилген функция $a$ негизиндеги көрсөткүчтүү функция деп аталат.**




133-сүрөт




134-сүрөт

Көрсөткүчтүү функциянын негизги касиеттерин санап өтөлү (алардын далилдөөсү мектептин курсуна кирбейт).

1. $a^x$ *функциясынын аныкталуу областы — анык сандардын* $\boldsymbol{R}$ *көптүгү.*

2. $a^x$ *функциясынын маанилеринин областы — бардык оң анык сандардын* $\boldsymbol{R}_+$ *көптүгү.*

3. $a>1$ *учурда* $a^x$ *функциясы бүткүл сан түз сызыгында өсөт;* $0<a<1$ *учурда* $a^x$ *функциясы* $\boldsymbol{R}$ *көптүгүндө кемийт (133-сүрөт).*

$a>1$ *жана* $0<a<1$ *учурлардагы көрсөткүчтүү функциялардын графиктери 133—134-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн.*

4. $x$ *жана* $y$ *тин каалагандай анык маанилеринде төмөнкү барабардыктар туура:*

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Бул формулаларды *даражалардын негизги касиеттери деп атайбыз.*

3- жана 4-касиеттери $y=a^x$ функциясынын адегенде жалаң гана $x$ тин рационалдык маанилеринде аныкталган учурдагы касиеттери $y=a^x$ функциясы бүткүл сан түз сызыгында аныкталганда да сакталып кала берет дегенди билгизишет (34-п. $1^0$—$7^0$ касиеттерди кара).

### *Көнүгүүлөр*

**445.** Функциялардын касиеттерин санагыла жана алардын графиктерин чийгиле:

а) $y=4^x$; б) $y=0,2^x$; в) $y=0,7^x$; г) $y=2,5^x$.





**446.** Функциялардын маанилеринин областын тапкыла:

а) $y=-2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$; в) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$; г) $y=5x-2$.

**447.** Сандарды салыштыргыла:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ жана $1$; б) $3^{-\sqrt{12}}$ жана $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$;

в) $2,5^{-\sqrt{3}}$ жана $1$; г) $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ жана $0,3^{\frac{1}{3}}$.

**448.** Эсептегиле:

а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}}:2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\sqrt[4]{8}})^{\sqrt[4]{4}}$.

Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (449—450).

**449.** а) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; б) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}$;

в) $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; г) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,3}:\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$.

**450.** а) $\frac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$; б) $\frac{(a^{2\sqrt{3}}-1)(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$; г) $\sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2-(4^{\frac{1}{\pi}}xy)^{\pi}}$.

---

**451.** 0,1 тактыкка чейинки маанилерди эсептегиле (таблицалардын же калькулятордун жардамы менен):

а) $10^{1,41}$ жана $10^{1,42}$; б) $10^{1,414}$ жана $10^{1,415}$;

в) $10^{2,23}$ жана $10^{2,24}$; г) $10^{2,236}$ жана $10^{2,237}$.

**452.** 451-маселедеги алынган натыйжаларды пайдаланып, 0,2 тактыкка чейинки $10^{\sqrt{2}}$ жана $10^{\sqrt{5}}$ тин маанилерин тапкыла.

**453.** Берилген функциялардын $R$ көптүгүндө кайсынысы өсүүчү, кайсынысы кемүүчү экендигин көрсөткүлө:

а) $y=(\sqrt{2})^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; б) $y=(\sqrt{5}-2)^x$, $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}$;

в) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; г) $y=(3-\sqrt{7})^x$, $y=\frac{1}{(3-\sqrt{7})^x}$.

**454.** Функциялардын маанилеринин областын тапкыла:

а) $y=3^{x+1}-3$; б) $y=\left|2^x-2\right|$; в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$; г) $y=4^{|x|}$.

455. Берилген функциянын $R$ көптүгүндөгү эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $y = (\frac{1}{2})^{\sin x}$; б) $y = 5 + 3^{|\cos x|}$; в) $y = 4^{\cos x}$; г) $y = (\frac{1}{3})^{|\sin x|} - 2$.

456. Теңдеменин тамырынын белгисин тапкыла:

а) $(\frac{1}{6})^x = 10$; б) $0,3^x = 0,1$; в) $10^x = 4$; г) $0,7^x = 5$.

Теңдемени графиктик жол менен чыгаргыла (457—458).

457. а) $3^x = 4 - x$; б) $(\frac{1}{2})^x = x + 3$;

в) $(\frac{1}{3})^x = x + 1$; г) $4^x = 5 - x$.

458. а) $3^{1-x} = 2x - 1$; б) $4^x + 1 = 6 - x$;

в) $2^x - 2 = 1 - x$; г) $3^{-x} = -\frac{3}{x}$.

459. $f(x) = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы үчүн төмөндөгүлөр туурабы:

а) экстремумдарга ээ;
б) кандайдыр бир $x_0$ чекитинде эң чоң мааниге ээ болот;
в) кандайдыр бир чекитте мааниси нөлгө барабар;
г) жуп (так) функция болуп эсептелеби?

## 36. Көрсөткүчтүү теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгаруу

**1. Теңдемелер.** Көрсөткүчтүү эң жөнөкөй

$$a^x = b \qquad (1)$$

теңдемесин карап көрөлү, мында $a > 0$ жана $a \neq 1$ функциясынын маанилеринин көптүгү — оң сандардын көптүгү. Ошондуктан $b < 0$ же $b = 0$ учурда (1) теңдеме чыгарылышка ээ болбойт.

$b > 0$ болсун дейли. Анда $a > 1$ учурда $y = a^x$ функциясы $(-\infty; \infty)$ аралыгында өсөт ($0 < a < 1$ учурунда кемийт) жана бардык оң маанилерге ээ болот. Тамырлар жөнүндөгү теореманы пайдаланып (8-п.) $a$ нын 1 ден айырмалуу болгон бардык оң маанилеринде (мында $b > 0$) (1) теңдеменин жалгыз тамырын алабыз. Аны табуу үчүн $b$ ны $b = a^c$ түрүндө жазуу керек. Мында $a^x = a^c$ теңдемесинин чыгарылышы $c$ болору айкын көрүнүп турат (134-сүрөт).





○ 1-мисал. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла: $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$.

$49 = 7^2$, ал эми $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$ экендигин билебиз. Ошондуктан берилген теңдемени $7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$ түрүндө жазса болот. Демек, берилген теңдеменин тамырлары болуп, $x - 2 = \frac{2}{3}$, б. а. $x = 2\frac{2}{3}$ ни канааттандырган сандар гана эсептелинет. Жообу: $x = 2\frac{2}{3}$.

2-мисал. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла: $5^{x^2-2x-1} = 25$.

Аны $5^{x^2-2x-1} = 5^2$ түрүндө жазабыз. Бул теңдеменин тамырлары болуп, $x^2 - 2x - 1 = 2$ ни канааттандырган сандар гана эсептелишет. Тамырлары 3 жана −1 сандары болгон квадраттык теңдемени алабыз. Жообу: 3; −1.

3-мисал. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла: $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$.

$6^{x+1} = 36 \cdot 6^{x-1}$ экенин эске алып, берилген теңдемени $36 \cdot 6^{x-1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$, б.а. $71 \cdot 6^{x-1} = 71$ түрүндө жазса болот, мындан $6^{x-1} = 6^0$, $x - 1 = 0$ жана $x = 1$. Жообу: 1.

4-мисал. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

$t = 2^x$ өзгөрмөсү менен алмаштырабыз. $4^x = (2^x)^2 = t^2$ экендигин эске алсак, берилген теңдеме төмөнкү түргө келет: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Бул квадраттык теңдеменин чыгарылышын табабыз; $t_1 = 1$ жана $t_2 = 4$. $2^x = 1$ жана $2^x = 4$ теңдемелерин чыгарып, $x = 0$ жана $x = 2$ни алабыз. Жообу: 0; 2. ●

**2. Барабарсыздыктар жана теңдемелердин системалары.** Эң жөнөкөй көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаруу $a^x$ функциясынын бизге белгилүү касиеттерине негизделген: бул функция $a > 1$ болгондо өсөт жана $0 < a < 1$ болгондо кемийт.

○ 5-мисал. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгаргыла: $0,5^{7-3x} < 4$.

$0,5^{-2} = 4$ экендигин эске алып, берилген барабарсыздыкты

$$0,5^{7-3x} < 0,5^{-2}$$

түрүндө жазабыз. $y = 0,5^x$ көрсөткүчтүү функциясы кемийт, себеби $0{,}5 < 1$. Ошондуктан берилген барабарсыздык $7 - 3x > -2$ барабарсыздыгына тең күчтө, мындан $x < 3$. Ж о о б у: $(-\infty;\ 3)$.

6 - м и с а л. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгаралы: $6^{x^2+2x} > 6^3$.

$y = 6^x$ көрсөткүчтүү функциясы өсөт. Ошондуктан берилген барабарсыздык $x^2 + 2x > 3$ барабарсыздыгына тең күчтө. Кийинки барабарсыздыктын, демек, мурункунун чыгарылышы болуп $(-\infty;-3)$ жана $(1;\ \infty)$ интервалдарынын биригүүсү эсептелет.

7 - м и с а л. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгаралы:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0.$$

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ өзгөрмөсүн киргизебиз, анда $\left(\frac{1}{9}\right)^x = t^2$ жана барабарсыздык

$$t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0$$

түрүндө жазылат, мында $\frac{1}{3} < t < 9$. Бул квадраттык барабарсыздыктын чыгарылышы болуп, б.а. $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ барабарсыздыгын канааттандырган саны эсептелет. Бирок $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, ал эми $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясы кемийт, себеби $\frac{1}{3} < 1$.

Демек, $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ барабарсыздыгынын чыгарылышы болуп $-2 < x < 1$ барабарсыздыгын канааттандырган $x$ саны эсептелет. Ж о о б у: $(-2;\ 1)$.

8 - м и с а л. Төмөнкү системаны чыгарабыз:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ 3^{2x-y} = 3. \end{cases}$$

Системанын экинчи теңдемесинен $2x - y = 1$ экендигин алабыз, мындан $y = 2x - 1$. Биринчи теңдемедеги $y$ тин ордуна $2x - 1$ ди коюп, $2^x + 2^{2x-1} = 12$ ни алабыз, мындан $2^x + \frac{1}{2}\cdot 2^{2x} = 12$. $2^x$ ти $t$ аркылуу белгилеп $t^2 + 2t - 24 = 0$ квадраттык теңдемесине келебиз, мындан $t_1 = -6$; $t_2 = 4$. $2^x = -6$ өзгөрмөсүнөн теңдеме чыгарылышка ээ болбойт. $2^x = 4$ теңдемесинин чыгарылышы болуп, $x = 2$ саны эсептелет. $y$ тин туура келүүчү мааниси 3 кө барабар. Ж о о б у: $(2;3)$. ●





### *Көнүгүүлөр*

Теңдемелерди чыгаргыла (460—464).

**460.** а) $4^x = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $3^x = 81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

**461.** а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$;

в) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

**462.** а) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;

в) $\sqrt{3^x} = 9$; г) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$.

**463.** а) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$;

в) $4^{x+1} + 4^x = 320$; г) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.

**464.** а) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$; б) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$;

в) $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; г) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

**465.** Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25, \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7}. \end{cases}$

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (466—467).

**466.** а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$; б) $(\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36}$;

в) $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$; г) $(1{,}5)^x < 2{,}25$.

**467.** а) $4^{5-2x} \leq 0{,}25$; б) $0{,}3^{7+4x} > 0{,}027$;

в) $0{,}4^{2x+1} > 0{,}16$; г) $3^{2-x} < 27$.

---

Теңдемелерди чыгаргыла (468—470)

**468.** а) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8$;

в) $5 \cdot (\frac{1}{2})^{x-3} + (\frac{1}{2})^{x+1} = 162$;  г) $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

**469.** а) $2^{x-2} = 3^{x-2}$;  б) $(\frac{1}{3})^{x-1} = (\frac{1}{4})^{1-x}$;

в) $5^{x+1} = 8^{x+1}$;  г) $7^{x-2} = 4^{2-x}$.

**470.** а) $3^x + 3^{3-x} = 12$;  б) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;

в) $(\frac{1}{5})^{1-x} - (\frac{1}{5})^x = 4,96$;  г) $4^x - 0,25^{x-2} = 15$.

**471.** Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases}$  б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases}$  г) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1. \end{cases}$

Барабарсыздыктарды чыгаргыла. (472—474)

**472.** а) $2^{x^2} > (\frac{1}{2})^{2x-3}$;  б) $(\frac{1}{25})^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$.

в) $2^{4x+3} \le (\frac{1}{9})^{\frac{x^2}{2}}$;  г) $(\frac{1}{4})^{10x} > 64^{2\frac{2}{3}x^2}$.

**473.** а) $(\frac{2}{3})^x + (\frac{2}{3})^{x-1} > 2,5$;  б) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

в) $(\frac{4}{3})^{x+1} + (\frac{4}{3})^x > \frac{3}{16}$;  г) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

**474.** а) $\pi^x - \pi^{2x} \ge 0$;  б) $(\frac{1}{3})^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$;

в) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$;  г) $(\frac{1}{36})^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \le 0$.

**475.** Барабарсыздыктарды график жолу менен чыгаргыла:

а) $2^x \le 3 - x$;  б) $(\frac{1}{3})^x \le 2x + 5$;

в) $(\frac{1}{4})^x \ge 2x + 1$;  г) $3^x \ge 4 - x$.

## 37. Логарифмалар жана алардын касиеттери

**1. Логарифм.** $a^x = b$ теңдемесине кайрылып, мында $a > 0$ жана $a \ne 1$. Мурдагы пунктта көрсөтүлгөндөй $b \le 0$ учурда бул теңдеме чыгарылышка ээ болбойт жана $b > 0$ учурда жалгыз тамырга ээ. Бул тамырды $a$ негизиндеги $b$ санынын логарифми деп аташат жана $\log_a b$ деп белгилешет, б.а.

$$a^{\log_a b} = b.$$

А н ы к т а м а. **Негизи $a$ болгон $x$ санынын логарифмасы болуп, $x$ ти алуу үчүн $a$ санын даражага көтөрүүгө керек болгон көрсөткүч эсептелет.**

$a^{\log_a b} = b$ (мында $b > 0$, $a > 0$, $a \ne 1$) теңдештиги *негизги логарифмалык теңдештик* деп аталат.

○ 1 - м и с а л. Төмөнкү маанилерди табалы: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0,04$.

а) $32 = 2^5$ экендигин, б.а. 32 санын алуу үчүн 2 ни 5-даражага көтөрүү керектигин эске алып, $\log_2 32 = 5$ти алабыз.

б) $0,04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ болгондуктан, $\log_5 0,04 = -2$.

2 - м и с а л. Негизи $\sqrt{3}$ боюнча $\frac{1}{9}$ санынын логарифмасын табалы. $(\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{9}$ экендигин байкайбыз. Ошондуктан логарифманын аныктамасы боюнча $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$.

3 - м и с а л. Төмөнкүлөрдөн $x$ санын табалы: а) $\log_8 x = \frac{1}{3}$; б) $\log_x 8 = -\frac{3}{4}$.

Логарифмалык негизги теңдештикти пайдаланабыз:

а) $x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$,  б) $x^{\log_x 8} = 8$, б.а. $x^{-\frac{3}{4}} = 8$, мындан $x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$. ●

**2. Логарифмалардын негизги касиеттери.** Логарифмалар менен иштөөдө көрсөткүчтүү функциянын касиеттеринен келип чыгуучу төмөндөгүдөй касиеттерди пайдаланышат:

*Ар кандай $a > 0$ ($a \ne 1$) жана ар кандай $x$ жана $y$ тин оң маанилери, ошондой эле бардык анык сан $p$ үчүн төмөнкүдөй барабардыктар орун алышат.*

$1^0$. $\log_a 1 = 0$.
$2^0$. $\log_a a = 1$.
$3^0$. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
$4^0$. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
$5^0$. $\log_a x^p = p \log_a x$.

$3^0$-эрежени далилдөө үчүн логарифмалык негизги теңдештикти пайдаланабыз:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y}. \tag{1}$$

Бул эки барабардыкты мүчөлөп көбөйтүп төмөнкүнү алабыз:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

б.а. $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Демек, логарифманын аныктамасы боюнча

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Кыскача айтканда, көбөйтүндүнүн *логарифмасы көбөйтүүчүлөрдүн логарифмаларынын суммасына барабар.*

$4^0$-эрежени (1) барабардыктын жардамы менен далилдейбиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

Демек, логарифманын аныктамасы боюнча

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Бөлчөктүн логарифмасы алардын логарифмдеринин айырмасына барабар деп айтышат.

$5^0$-эрежени далилдөө үчүн $x = a^{\log_a x}$ теңдештигин пайдаланабыз, мындан $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}$. Демек, аныктама боюнча

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

Даражанын логарифмасы *даража көрсөткүч менен бул даражанын негизинин логарифмасынын көбөйтүндүсүнө барабар деп айтышат.*

Логарифмалардын негизги касиеттери логарифмаларды камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүүдө кеңири колдонулат. Мисалы, логарифманын бир негизден экинчи негизге өтүү формуласын далилдейли:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

(Бул формула анын эки жагы тең мааниге ээ болгон учурда гана орун алат, б.а. $x > 0$, $a > 0$ жана $a \neq 1$, $b > 0$ жана $b \neq 1$.

Даражаны логарифмалоо жана логарифманын негизги теңдештигинин эрежеси боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$\log_b x = \log_b(a^{\log_a x}),$$

мындан

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Бул барабардыктын эки жагын тең $\log_b a$ га бөлүп, керектүү формуланы алабыз.

Логарифманын бир негизден экинчи негизге өтүү формуласынын жардамында кандайдыр бир $b$ негизи үчүн түзүлгөн логарифмалар таблицасына ээ болуу менен каалагандай $a$ негиздеги логарифманын маанисин табууга болот. Ондук жана натуралдык логарифмалардын таблицалары кеңири пайдаланылат (негизи 10 болгон логарифманы ондук логарифма дейбиз, натуралдык логарифма менен 41-п.та таанышасыңар).





○ 4 - м и с а л. $\log_{0,3} 7$ ни табалы.

Калькуляторду (же таблицаларды) пайдаланып, $\lg 7 \approx 0,8451$ жана $\lg 0,3 \approx 0,4771 - 1 = -0,5229$ ду алабыз.

Демек, өтүү формуласы боюнча

$$\log_{0,3} 7 \approx \frac{0,8451}{-0,5229} \approx -1,6162.$$

5 - м и с а л. $\log_2 5 = a$ жана $\log_2 3 = b$ экендиги белгилүү. $\log_2 300$ санын $a$ жана $b$ аркылуу туюнталы.

Логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып, төмөнкүнү алабыз:

$$\log_2 300 = \log_2(3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2.$$

6 - м и с а л. $8a^3\sqrt[7]{b^4}$ туюнтмасынын логарифмасын $\log_2 a$ жана $\log_2 b$ аркылуу туюнталы. (Муну кыскача: берилген туюнтманы 2 негизи боюнча логарифмалайбыз деп айтышат.)

Логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып, муну алабыз:

$$\log_2(8a^3\sqrt[7]{b^4} = \log_2(2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b =$$
$$= 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b.$$

7 - м и с а л. Эгерде

$$\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2$$

болсо, анда $x$ ти табалы.

Адегенде логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып, берилген барабардыктын оң жагын өзгөртүп түзөбүз:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

б.а. $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$, ошондуктан $x = \frac{63}{8} = 7,875$.

8 - м и с а л. $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$ туюнтмасынын маанисин табалы.

Логарифманын негизги касиеттерин пайдаланып, бөлчөктүн бөлүмүн да, алымын да өзгөртүп түзөбүз: $\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} = \lg 8 = 3\lg 2$; $\lg 28 - \lg 7 = \lg \frac{28}{7} = \lg 4 = 2\lg 2$. Демек,

$$\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}.$$ ●

### *Көнүгүүлөр*

Даражанын негизи $a$ аркылуу берилген сандардын $a$ негизи боюнча логарифмаларын тапкыла (476—478).

**476.** а) $3^2 = 9$; б) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; в) $4^2 = 16$; г) $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

**477.** а) $9^{\frac{1}{9}} = 3$; б) $7^0 = 1$; в) $32^{\frac{1}{5}} = 2$; г) $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

**478.** а) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; б) $32^{\frac{3}{5}} = 8$; в) $81^{\frac{3}{4}} = 27$; г) $125^{\frac{2}{5}} = 25$.

Барабардыктардын тууралыгын текшергиле (479—482).

**479.** а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; б) $\log_{16} 1 = 0$;

в) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_5 125 = 3$.

**480.** а) $\log_5 0,04 = -2$; б) $\log_7 343 = 3$;

в) $\log\ 0,01 = -2$; г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$.

**481.** а) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$; б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; г) $\log_{0,5} 4 = -2$.

**482.** а) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; б) $\log_{0,2} 0,008 = 3$;

в) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$; г) $\log_{0,2} 125 = -3$.

**483.** Берилген сандардын $a$ негизи боюнча логарифмасын тапкыла:

а) $a=5$ болгондо $25,\ \frac{1}{5},\ \sqrt{5}$ тин; б) $a=8$ болгондо $64,\ \frac{1}{8},\ 2$ нин; в) $a=2$ болгондо $16,\ \frac{1}{4},\ \sqrt{2}$ нин; г) $a=3$ болгондо $27,\ \frac{1}{9},\ \sqrt{3}$ түн.

$x$ санын тапкыла (484—486).

**484.** а) $\log_3 x = -1$; б) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$;

в) $\log_5 x = 2$; г) $\log_7 x = -2$.

**485.** а) $\log_4 x = -3$; б) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

**486.** а) $\log_x 81 = 4$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 2$;

в) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; г) $\log_x 27 = 3$.

**487.** Берилген сандарды $a$ негизи боюнча логарифма түрүндө жазгыла.



476-486



а) $a=4$ болгондо $2;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 0$дүн; б) $a=3$ болгондо $3;-1;-3;1$дин;

в) $a=2$ болгондо $3;\ \frac{1}{2};\ 0;-1$дин; г) $a=5$ болгондо $1;-2;\ 0;\ 3$түн.

Негизги логарифмалык теңдештиктерди пайдаланып туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (488—490).

**488.** а) $1,7^{\log_{1,7} 2}$; б) $\pi^{\log_\pi 5,2}$; в) $2^{\log_2 5}$; г) $3,8^{\log_{3,8} 11}$.

**489.** а) $5^{1+\log_5 3}$; б) $10^{1-\lg 2}$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$; г) $3^{2-\log_3 18}$.

**490.** а) $4^{2\log_4 3}$; б) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_{\frac{1}{2}} 3}$; г) $6^{-2\log_6 5}$.

**491.** Негизи 3 боюнча логарифмалагыла ($a > 0,\ b > 0$)

а) $(\sqrt[5]{a^3 b})^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$; в) $9a^4\sqrt[5]{b}$; г) $\frac{b^2}{27a^7}$.

Негизи 10 боюнча логарифмалагыла, мында $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ (492—493).

**492.** а) $100\sqrt{ab^3c}$; б) $\frac{a^5}{0,1c\sqrt[5]{b}}$; в) $\sqrt[3]{10}\, a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{0,01 c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} b^3}$.

**493.** а) $10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3}$; б) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5}$; в) $10^{-4} a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}}$; г) $\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7 a^{\frac{2}{3}} b^8}$.

---

**494.** $\log_5 2$ =a жана $\log_5 3 = b$ экендиги белгилүү. $a$ жана $b$ аркылуу туюнткула:

а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_5 12$; г) $\log_5 30$.

Эсептегиле (495—496).

**495.** а) $\lg 8 + \lg 125$; б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$;

в) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; г) $\lg 13 - \lg 130$.

**496.** а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$;

в) $\log_2 11 - \log_2 44$; г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$.

**497.** $x$ ти тапкыла, эгерде:

а) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$;

б) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c$;

в) $\lg x = 5\lg m + \frac{2}{3}\lg n - \frac{1}{4}\lg p$;

г) $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$.

**498.** Далилдегиле:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$; б) $4^{\log_5 7} = 4^{\log_5 4}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

## 38. Логарифмалык функция

$a$ саны 1ге барабар болбогон оң сан болсун дейли.

А н ы к т а м а .

$$y = \log_a x, \qquad (1)$$

**формуласы аркылуу берилген функцияны *негизи a болгон логарифмалык функция* деп аташат.**

Логарифмалык функциянын негизги касиеттерин келтирели.

*1. Логарифмалык функциянын аныкталуу областы — бардык оң $\boldsymbol{R}_+$ сандардын көптүгү,* б.а. $D(\log_a) = \boldsymbol{R}_+$.

Чындыгында, мурдагы пунктта белгиленгендей, ар бир $x$ оң саны $a$ негизи боюнча логарифмага ээ.

2. *Логарифмалык функциянын маанилеринин көптүгү — бардык анык сандардын көптүгү.*

Чындыгында эле, ар кандай анык сан $y$ үчүн логарифманын аныктамасы боюнча

$$\log_a(a^y) = y \qquad (2)$$

барабардыгы орун алат, б.а. $y = \log_a x$ функциясы $y_0$ чекитинде $x_0 = a^{y_0}$ маанисине ээ.

3. *Логарифмалык функция бардык аныкталуу областында же өсөт ($a > 1$ үчүрда), же кемийт ($0 < a < 1$ үчүрда).*

Мисалы, $a > 1$ учурда функциянын өсүшүн далилдейли ($0 < a < 1$ учурдагысы ага окшош жүргүзүлөт).

$x_1$ жана $x_2$ — каалаган сандар жана $x_2 > x_1$ болсун дейли. $\log_a x_2 > \log_a x_1$ экендигин далилдөө керек. Тескерисинче болсун дейли, б.а.

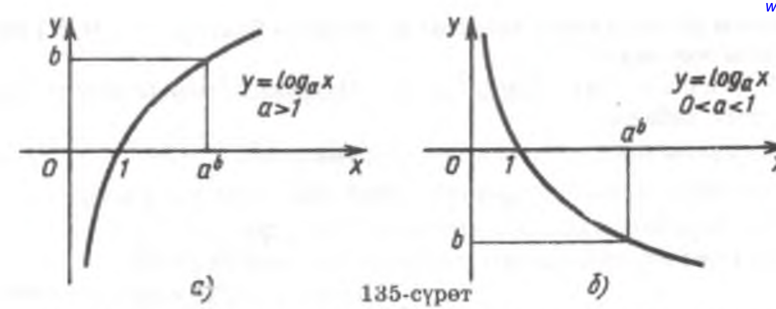
$$\log_a x_2 \le \log_a x_1 . \qquad (3)$$

$a > 1$ учурда $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы өскөндүктөн, (3) барабарсыздыктан

$$a^{\log_a x_2} \le a^{\log_a x_1} \qquad (4)$$

келип чыгат. Бирок $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$ логарифманын аныктамасы боюнча, б.а. (4) барабарсыздык $x_2 \le x_1$ экендигин билдирет. Бул $x_2 > x_1$ ге карама-каршы болот.






135-сүрөт

Графикти түзүү үчүн логарифмалык функциянын мааниси 0 болсо 1 чекитинде орун алат; $\log_a 1 = 0$ болгондуктан, ар кандай $a > 0$ үчүн $a^0 = 1$ болот.

$a > 1$ учурда функциянын өсүшүнөн улам, $x > 1$ учурда логарифмалык функция бардык оң маанилерди, ал эми $0 < x < 1$ учурда — терс маанилерди алат.

$0 < a < 1$ болсо, анда $y = \log_a x$ функциясы, $\boldsymbol{R}_+$ де кемийт, ошондуктан $0 < x < 1$ болгондо $\log_a x > 0$ жана $x > 1$ болгондо $\log_a x < 0$ болот.

Далилденген касиеттерге таянып, $a > 1$ (135, $a$-сүрөт) жана $0 < a < 1$ (135, б-сүрөт) учурларында $y = \log_a x$ функциясынын графигин түзүү кыйын эмес.

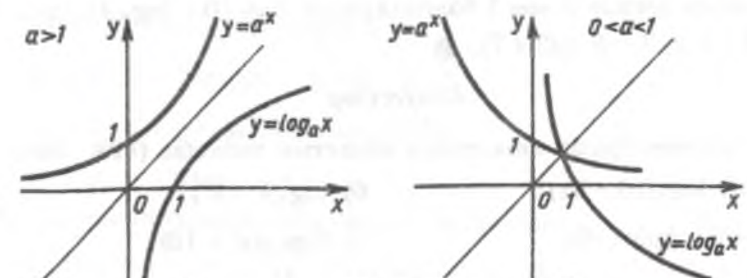
Төмөнкүдөй ырастоону келтиребиз (далилдөөсү 40-п. та).

*Бирдей негиздеги көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялардын графиктери $y = x$ түз сызыгына карата симметриялуу* (136-сүрөт).

Логарифмалык функциянын касиеттерин колдонууга мисалдарды карайлы.

○ 1 - м и с а л. $f(x) = \log_8(4 - 5x)$ функциясынын аныкталуу областын табалы.

Логарифмалык функциянын аныкталуу областы $\boldsymbol{R}_+$ көптүгү. Ошондуктан берилген функция $4 - 5x > 0$ барабарсыздыгын канааттандырган $x$ үчүн, б.а. $x < 0{,}8$ үчүн гана аныкталган. Демек,

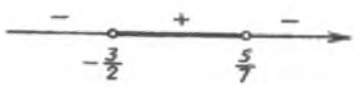



136-сүрөт

берилген функциянын аныкталуу областы болуп $(-\infty;\ 0,8)$ интервалы эсептелет.

2-мисал. $f(x)=\log_2(x^2-3x-4)$ функциясынын аныкталуу областын табалы.

Бул дагы мисалдагыдай эле, $f$ функциясы $x^2-3x-4>0$ барабарсыздыгын канааттандырган $x$ үчүн гана аныкталган. Бул квадраттык барабарсыздыкты чыгарып, $D(f)$ функциясы $(-\infty;-1)$ жана $(4;\infty)$ интервалдарынын биригүүсү экенин алабыз.




137-сүрөт

3-мисал. Төмөнкү функциянын аныкталуу областын табалы:

$$f(x)=\log_7\frac{2x+3}{5-7x}.$$

$\frac{2x+3}{5-7x}>0$ барабарсыздыгына интервалдар методу менен чыгарып $D(f)=(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{7})$ экенин табабыз (137-сүрөт).

4-мисал. Сандарды салыштыргыла: а) $\log_3 5$ жана $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{1}{3}}5$ жана $\log_{\frac{1}{3}}7$; в) $\log_3 10$ жана $\log_4 12$.

а) Негизи 1ден чоң болгон логарифмалык функция бардык сандык окто өсөт. $7>5$ болсо, $\log_3 7>\log_3 5$.

б) Берилген учурда логарифманын негизи 1ден кичине, ошондуктан $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ функциясы кемийт, демек, $\log_{\frac{1}{3}}7<\log_{\frac{1}{3}}5$.

в) $10>9=3^2$ болгондуктан $\log_3 10>2$, экинчи жактан $12<16=4^2$, демек $\log_4 12<2$. Ошентип, $\log_3 10>\log_4 12$.

5-мисал. Кайсынысы чоң: $\log_2 3+\log_2 7$ би же $\log_2(3+7)$ би?

Логарифмалардын негизги касиети боюнча $\log_2 3+\log_2 7=\log_2 21$. Ал эми $\log_2(3+7)=\log_2 10$ жана $10<21$ жана логарифманын негизи 2 чоң 1 болгондуктан $\log_2 10<\log_2 21$, демек, $\log_2 3+\log_2 7=\log_2(3+7)$. ●

### *Көнүгүүлөр*

Туюнтмалардын аныкталуу областын тапкыла (499—500).

**499.** а) $\log_\pi(10-5x)$; б) $\log_5(9-x^2)$;
в) $\log_3(x-4)$; г) $\log_{0,3}(x^2-16)$.

**500.** а) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; б) $\lg\frac{2x+5}{x-1}$;
в) $\log_{0,9}\frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

Сандарды салыштыргыла (501—503).

**501.** а) $\log_2 3,8$ жана $\log_2 4,7$; б) $\log_{\frac{1}{3}}0,15$ жана $\log_{\frac{1}{3}}0,2$;
в) $\log_3 5,1$ жана $\log_3 4,9$; г) $\log_{0,2}1,8$ жана $\log_{0,2}2,1$.

**502.** а) $\log_{\sqrt{2}}3$ жана 1; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}1,9$ жана $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}2,5$;
в) $\log_\pi 2,9$ жана 1; г) $\log_{0,7}\sqrt{2}$ жана $\log_{0,7}0,3$.

**503.** а) $\log_2 10$ жана $\log_5 30$; б) $\log_{0,3}2$ жана $\log_5 3$;
в) $\log_3 5$ жана $\log_7 4$; г) $\log_3 10$ жана $\log_8 57$.

**504.** Функциянын негизги касиеттерин келтиргиле жана анын графигин түзгүлө:

а) $y=\log_3 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$; в) $y=\log_4 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$.

---

**505.** Туюнтмалардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $\log_2\sin x$; б) $\log_3(2^x-1)$; в) $\log_{\frac{1}{2}}\cos x$; г) $\lg(1-3^x)$.

**506.** Туюнтмалардын маанисин тапкыла:

а) $\log_2 2\sin\frac{\pi}{15}+\log_2\cos\frac{\pi}{15}$;

б) $\log_4(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3})+\log_4(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9})$;

в) $\lg \mathrm{tg}4+\lg \mathrm{ctg}4$;

г) $\log_\pi(5+2\sqrt{6})+\log_\pi(5-2\sqrt{6})$.

**507.** Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y=\log_3(x-2)$; б) $y=-\log_{\frac{1}{2}}x$;

в) $y=\log_2(x+1)$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}}x+2$.

**508.** Теңдемени чыгаргыла:

а) $\log_3 x=2\log_9 6-\log_9 12$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{0,2}35-2\log_{0,2}25\sqrt{7}$;

в) $\log_5 x=\frac{1}{2}\log_3 144+\log_3 0,75$;

г) $\log_\pi x=3\log_{0,1}4+2\log_{0,1}1\frac{1}{4}$.

**509.** Теңдемени график жолу менен чыгаргыла:

а) $\lg x=1-x$; б) $\log_{\frac{1}{3}}x=x-4$;

в) $\log_{\frac{1}{5}}x=x-6$; г) $\log_2 x=3-x$.





$2^x=3,8$
$2^x=4,7$

**510.** Төмөнкүлөр логарифмалык функция болушабы:

а) экстремумдарга ээ;

б) так функция болуп эсептелишеби;

в) мезгилдүү функция болобу;

г) так функциябы?

**511.** $I$ аралыгында $f$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x,\ I = [1;\ 4]$; б) $f(x) = \log_9 x,\ I = [\frac{1}{9};\ 9]$;

в) $f(x) = \log_5 x,\ I = [\frac{1}{5};\ 1]$; г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x,\ I = [\frac{1}{2};\ 4]$.

## 39. Логарифмалык теңдемелердин жана барабарсыздыктардын чыгарылышы

Эң жөнөкөй логарифмалык теңдемени карайлы:

$$\log_a x = b.$$

Логарифмалык функция $(0;\infty)$аралыгында өсөт (же кемийт) жана ал аралыкта бардык анык маанилерге ээ болот (135-сүрөт). Мындан, тамыр жөнүндөгү теорема (10-п.) боюнча бардык $b$ үчүн берилген теңдеме жалгыз гана бир чыгарылышка ээ экендиги келип чыгат. Сандын логарифмасынын аныктамасы боюнча $a^b$ саны ушул чыгарылыштын өзү болору көрүнүп турат.

○ 1 - м и с а л. Төмөнкү теңдемени чыгаралы:

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3.$$

$x^2 + 4x + 3 = 2^3$ барабардыгын канааттандырган $x$ тин маанилери гана бул теңдеменин чыгарылышы боло алат. Биз $x^2 + 4x - 5 = 0$ квадраттык теңдемени алдык. Анын тамырлары 1 жана $-5$. Демек, 1 жана $-5$ сандары бул теңдеменин чыгарылыштары болот.

2 - м и с а л. Төмөнкү теңдемени чыгаралы:

$$\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1).$$

Бул теңдеме $2x + 3 > 0$ жана $x + 1 > 0$ барабарсыздыктарын канааттандырган $x$ тин маанилери үчүн гана аныкталган болот, $x$ тин мындай маанилери үчүн берилген теңдеме $2x + 3 = x + 1$ теңдемесине тең күчтө. Мындан $x = -2$ ни табабыз. Бирок, $x = -2$ саны $x + 1 > 0$ барабарсыздыгын канааттандырбайт. Демек, берилген теңдеменин тамыры жок.

Ушул эле теңдемени башка жол менен да чыгарууга болот. Берилген теңдеменин $2x + 3 = x + 1$ натыйжасына өтүп $x = -2$ ни табабыз. Тең күчтө болбогон өзгөртүп түзүүлөрдөн келип чыккан маанини берилген теңдемеге коюп текшерип көрүү зарыл. Биздин





учурда $\log_5(-1) = \log_5(-1)$ барабардыгы туура эмес (анын эч кандай мааниси жок).

3 - м и с а л. Төмөнкү теңдемени чыгаралы:

$$\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1.$$

Төмөнкү эки барабарсыздыкты: $x > 0$ жана $x \neq 1$($x$ — логарифмалык функциянын негизи) жана бир теңдемени:

$$x^2 - 2x + 2 = x$$

б.а.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

дү канааттандырган $x$ тин маанилери гана бул теңдеменин чыгарылышы болот. Алынган квадраттык теңдеме 1 жана 2 тамырларына ээ. Бирок $x = 1$ берилген теңдеменин чыгарылышы боло албайт. Демек, берилген теңдеменин чыгарылышы 2 саны гана болот.

4 - м и с а л. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгаралы:

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2.$$

— 2 саны $\log_{\frac{1}{3}} 9$ га барабар. Ошондуктан берилген барабарсыздыкты

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

түрүндө жазса болот.

Негизи $\frac{1}{3}$ болгон логарифмалык функция аныкталган жана $R$ де кемийт, себеби $\frac{1}{3} < 1$. Демек, экинчи барабарсыздыгын $0<5-2x<9$, мындан $-2<x<2,5$ шарттары аткарылган $x$ тин маанилери гана канааттандыра алат.

Ошентип, $(-2;\ 2,5)$ интервалы берилген барабарсыздыктын чыгарылышы болот.

5 - м и с а л . Төмөнкү теңдемени чыгаргыла:

$$\log^{\frac{2}{5}} x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0.$$

Экинчи кошулуучуда 5 боюнча негизге өтүп, өзгөрмөнү $t = \log_5 x$ түрүнө алмаштырсак, анда

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Эми берилген теңдеме

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

түрүнө келет. Бул квадраттык теңдеменин тамырлары 3 жана $-1$. $\log_5 x = 3$ жана $\log_5 x = -1$ ордуна коюу теңдемелерин чыгарып, $x = 5^3 = 125$ жана $x = 5^{-1}=0,2$ ни табабыз.

6 - м и с а л. Төмөнкү теңдемелер системасын чыгаралы:

$$\begin{cases} \lg(y - x) = \lg 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Системанын биринчи теңдемеси $y - x = 2$ теңдемесине, ал эми экинчиси $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ теңдемесине тең күчтө, себеби $x > 0$ жана $y > 0$. $y = x + 2$ ни $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ теңдемесине коюп, $x(x + 2) = 48$ ди алабыз, мындан $x^2 + 2x - 48 = 0$, б.а. $x = -8$ же $x = 6$. Бирок, $x > 0$ болгондуктан, $x = 6$ же $y = 8$ Ошентип теңдемелердин берилген системасы бир чыгарылышка ээ: $x = 6$, $x = 8$.

$a^x = b$ (мында $b > 0$) түрүндөгү көрсөткүчтүү теңдеменин ар кандай тамырын логарифманын жардамы менен жазууга болоорун байкайбыз (36-п.та мындайча жаза алган эмеспиз). Анын тамыры: $x = \log_a b$ болот.

7 - м и с а л. $5^{1-3x} = 7$ теңдемесин чыгаралы.

Логарифманын аныктамасы боюнча $1 - 3x = \log_5 7$ жана $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_5 7$. ●

### *Көнүгүүлөр*

Теңдемелерди чыгаргыла (512—515).

**512.** а) $9^x = 0,7$; б) $(0,3)^x = 7$; в) $2^x = 10$; г) $10^x = \pi$.

**513.** а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_{0,4} x = -1$; в) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; г) $\lg x = 2$.

**514.** а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4) = -2$; б) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$;
в) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; г) $\log_2(3 - x) = 0$.

**515.** а) $(0,2)^{4-x} = 3$; б) $5^{x^2} = 7$; в) $x^{2-3x} = 8$; г) $7^{2x} = 4$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (516—517).

**516.** а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_{0,5} x > -2$; в) $\log_{0,7} x < 1$; г) $\log_{2,5} x < 2$.

**517.** а) $\log_4(x - 2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3 - 2x) > -1$;
в) $\log_5(3x + 1) > 2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x + 1) < -2$.

Теңдемелерди чыгаргыла (518—520).

**518.** а) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$; б) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$;
в) $\log_a x = \log_a 10 - \log_a 2$; г) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$.

**519.** а) $\frac{1}{2}\log_2(x - 4) + \frac{1}{2}\log_2(2x - 1) = \log_2 3$;
б) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$;



в) $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$;
г) $\log_5(x^2 + 8) - \log_5(x + 1) = 3\log_5 2$.

**520.** а) $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$; б) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$;
в) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; г) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$.

**521.** Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4(x + y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

---

Теңдемелерди чыгаргыла (522—524).

**522.** а) $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$; б) $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$;
в) $\frac{2\lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$; г) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$.

**523.** а) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$; б) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;
в) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; г) $\log_{25} x + \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{8}$.

**524.** а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;
б) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;
в) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
г) $\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (525—528).

**525.** а) $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$; б) $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1)$;
в) $\lg(3x - 7) \le \lg(x + 1)$; г) $\log_{0,5}(4x - 7) < \log_{0,5}(x + 2)$.

**526.** а) $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$; б) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;
в) $\lg x + \lg(x - 1) < \lg 6$; г) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$.

**527.** а) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0$;
в) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; г) $\log_3^2 x - 9 \le 0$.

**528.** а) $\log_2(\sin\frac{x}{2}) < -1$; б) $|3 - \log_2 x| < 2$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1$; г) $|3\lg x - 1| < 2$.

Теңдемелер системасын чыгаргыла (529—530).

**529.** а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_3(x-y)=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_{48} x+\log_{48} y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y=2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}} y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 13, \\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8. \end{cases}$

**530.** а) $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=2-\lg 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x\cdot 9^y=576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \lg x-\lg y=\lg 15-1, \\ 10^{\lg(3x+2y)}=39. \end{cases}$

## 40. ▽ Тескери функция жөнүндө түшүнүк

**1. Функциянын кайтарылмалуулугу.** Ар кандай функцияларды изилдөөдө төмөнкүдөй маселени: берилген аргументтин $x_0$ мааниси боюнча $f$ функциясынын маанисин табууну көп эле чыгаргансыңар. Көп учурда тескери маселени чыгарууга да туура келет: $y_0$ берилген маанини кабыл алгандагы $f$ функциясынын аргументинин маанисин табуу.

○ 1-мисал. $f(x)=kx+b\,(k\neq 0)$ болсун дейли. $f(x)=y_0$ болгондогу $x$ аргументинин маанисин табуу үчүн $f(x)=y_0$ теңдемесин, б.а.

$$kx+b=y_0$$

теңдемесин чыгаруу керек. Муну чыгарып, ар кандай $y_0$ үчүн бул теңдеме жалгыз гана бир чыгарылышка ээ болорун алабыз:

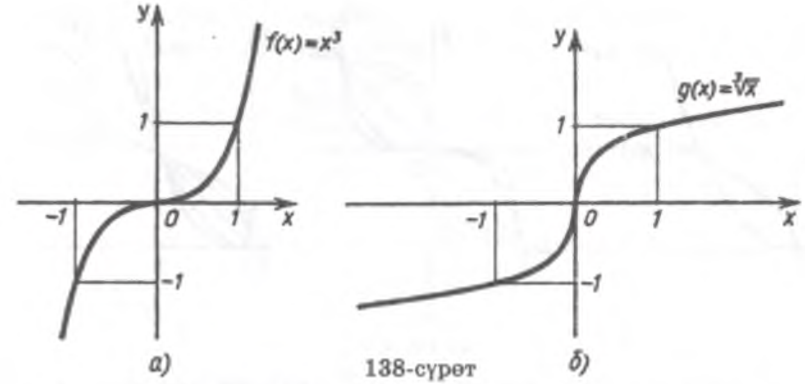
$$x=\frac{y_0-b}{k}.$$

2-мисал. $f(x)=x^2$ функциясы үчүн $f(x)=y_0$ теңдемеси $y_0>0$ болгондо эки чыгарылышка ээ: $x_1=\sqrt{y_0}$, $x_2=-\sqrt{y_0}$. (Эгерде $y_0=0$ болсо, анда бир чыгарылышка ээ: $x_0=0$.) ●

**Аныкталуу областынын жалгыз гана бир чекитинде өзүнүн ар бир маанисин кабыл алуучу функцияны кайтарылма функция деп айтабыз.** Мына ошентип, $k\neq 0$ болсо, $f(x)=kx+b$ функциясы кайтарылма функция, ал эми $f(x)=x^2$ функциясы (бүткүл сан түз сызыгында аныкталган) кайтарылма функция болуп эсептелбейт.







138-сүрөт

Э с к е р т ү ү. Эгерде $f$ функциясы кайтарылма функция болсо, ал эми $a$ саны $E(f)$ аныкталуу областына таандык болсо, анда $f(x)=a$ теңдемеси жалгыз гана бир чыгарылышка ээ болору кайтарылма функциянын аныктамасынан дароо эле келип чыгат.

**2. Тескери функция.** $f$ — каалагандай кайтарылма функция болсун дейли. Анын $E(f)$ маанилеринин көптүгүндө жаткан каалагандай $y_0$ саны үчүн, $D(f)$ аныкталуу областында, тактап айтканда, $f(x_0)=y_0$ болгондой бир $x_0$ мааниси бар. Мында $x_0$ санына $y_0$ туура келет десек, анда аныкталуу областы $E(f)$ жана маанилеринин областы $D(f)$ болгон жаңы $g$ функциясын алабыз. Мисалы, $f(x)=kx+b\,(k\neq 0)$ кайтарылма функциясы үчүн жаңы функция $g$ нын каалагандай $y_0$ чекитиндеги мааниси

$$g(y_0)=\frac{y_0-b}{k}$$

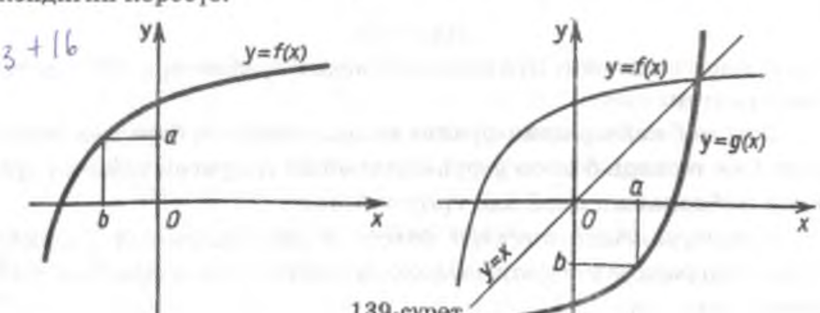
формуласы аркылуу берилет.

$g$ функциясынын аргументи үчүн бизге көнүмүш болгон эле $x$ ти алып

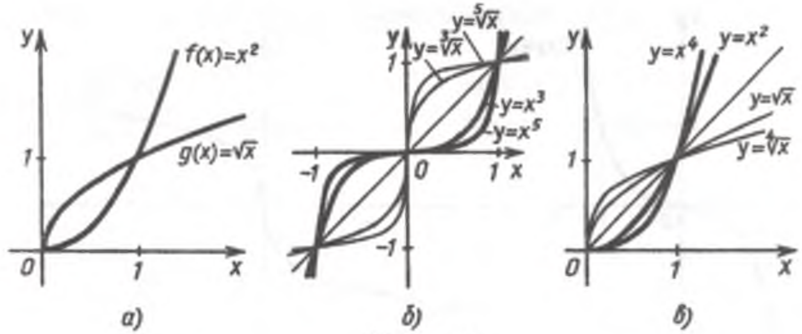
$$g(x)=\frac{x-b}{k}$$

экендигин көрөбүз.

$-3+16$



139-сүрөт




а) б) в)

140-сүрөт

$f$ — кайтарылма функциясынын маанилеринин областында жаткан ар бир $x$ чекитинде $f(y) = x$ болгондой $y$ тин маанисин кабыл алуучу $g$ функциясын $f$ ке карата тескери функция деп атайбыз.

Жогоруда көрсөтүлгөндөй $f(x) = kx + b\,(k \neq 0)$ функциясынын тескери функциясы болуп $g(x) = \frac{x-b}{k}$ функциясы эсептелет. Дагы бир мисалды карап көрөлү.

○ 3 - м и с а л. $f(x) = x^3$ функциясынын кайтарылма функция экендигин далилдейбиз жана $f$ ке тескери болгон $y = g(x)$ функциясын берүүчү формуланы чыгарабыз.

Тескери функциянын аныктамасы боюнча адегенде $f(y) = x$ теңдемеси $x$ тин каалагандай маанисинде жалгыз бир $y$ чыгарылышка ээ болорун далилдөө керек. Биздин учурда бул теңдеме төмөнкүчө:

$$y^3 = x.$$

Бул $x$ тин бардык маанилеринде бир гана $y = \sqrt[3]{x}$ чыгарылышына ээ (8-п.ты карагыла). Ошондуктан $f(x) = x^3$ функциясы кайтарылма функция жана ага тескери функция болуп,

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

функциясы эсептелет. Бул функциялардын графиктери 138-сүрөттө келтирилген.

Эгерде $f$ кайтарылма функциясынын графиги берилген болсо, анда $f$ ке тескери болгон $g$ функциясынын графигин төмөнкү эрежени пайдаланып оңой эле түзүүгө болот:

*$f$ функциясына тескери болгон $g$ функциясынын графиги $f$ тин графигине $y = x$ түз сызыгына карата симметриялуу жайланышкан.*





Бул касиетти далилдейли. $f$ функциясынын графиги боюнча ага тескери болгон $g$ функциясынын каалаган $a$ чекиттеги маанисин график боюнча табууга болорун байкайбыз. Ал үчүн горизонталь октон эмес (адаттагыдай эле), вертикаль октон координатасы $a$ болгон чекитти алуу керек. Тескери функциянын аныктамасы боюнча $g(a)$ нын мааниси $b$ га барабар экендиги келип чыгат (139-*а*, сүрөттү кара).

Мына ошентип, эгерде бир аз башкачараак координата системасы берилди десек (аргумент вертикаль окто, ал эми функциянын мааниси — горизонталь окто жайгаштырылган) анда $f$ ке тескери болгон $g$ функциясынын графиги катары $f$ тин графигин алсак болот (кадимки координата системасында түзүлгөн). $g$ нын графигин кадимки координата системасында сүрөттөп көрсөтүш үчүн $f$ тин графигин $y = x$ түз сызыгына карата чагылдыруу керек (139-*б*, сүрөт).

Эгерде $g$ функциясы — $f$ ке тескери функция болсо, анда $g$ — кайтарылма функция жана анын тескери — $f$ функциясы болот. Ошондуктан $f$ жана $g$ *өз ара тескери функциялар* деп айтышат.

Т е о р е м а *(тескери функция жөнүндө). **Эгерде $f$ функциясы $I$ аралыгында өссө (же кемисе), анда ал кайтарылма функция болот. $f$ ке тескери болгон, $f$ тин маанилеринин областында аныкталган $g$ функциясы да өсүүчү (кемүүчү) болуп эсептелет.***

Д а л и л д ө ө. Аныктык үчүн $f$ функциясы өсүүчү болсун дейли. $f$ функциясынын кайтарылмалуулугу тамыр жөнүндөгү теореманын (8-п.) натыйжасы экендигинин дал өзү. Ошондуктан $f$ ке тескери болгон $g$ функциясынын $E(f)$ көптүгүндө өсо тургандыгын далилдөө гана калды.

$x_1$ жана $x_2$ — бул $E(f)$ тен алынган жана $x_2 > x_1$ ни канааттандырган каалагандай чекиттер жана $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$ болсун дейли. Тескери функциянын аныктамасы боюнча $x_1 = f(y_1)$ жана $x_2 = f(y_2)$.

Берилген шартты пайдаланып ($f$ — өсүүчү функция), $y_1 \geq y_2$ десек, анда ал $f(y_1) \geq f(y_2)$ б.а. $x_1 \geq x_2$ деген жыйынтыкка алып келерин табабыз. Бул болсо $x_2 > x_1$ дегенге карама-каршы. Ошондуктан $y_1 > y_2$ б.а. $x_2 > x_1$ деген шарттан $g(x)_2 > g(x)_1$ келип чыгат. Ушунун өзүн далилдөө талап кылынган.

○ 4 - м и с а л. Жогоруда айтылгандай $f(x) = x^2$ функциясы кайтарылма функция эмес. Бирок $[0; \infty)$ аралыгында $f^*(x) = x^2$ формуласы менен аныкталган $f^*$ функциясы бул аралыкта өсөт, демек, тескери функцияга ээ. $f^*$ тин тескериси болуп $g(x) = \sqrt{x}$ функциясы эсептелет. Бул функциялардын графиктери 140,-*а*, сүрөттө келтирилген. ●

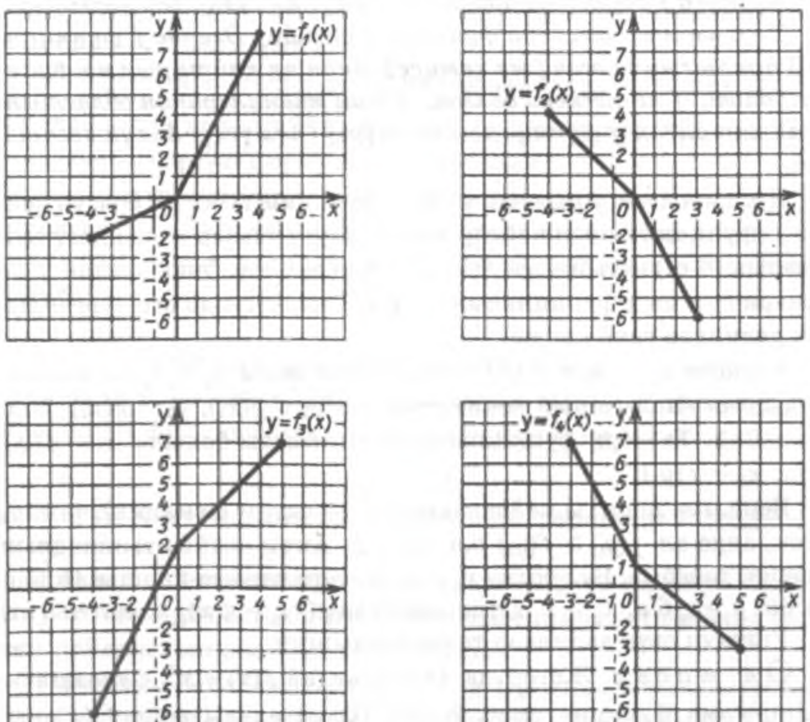
Жалпы алганда $[0;\ \infty)$ аралыгында аныкталган $f(x) = x^n$ функциясы $n$ дин каалагандай натуралдык маанилеринде өсүүчү функция, ошондуктан тескери функцияга ээ. $x^n$ ге тескери болуп $\sqrt[n]{x}$ функциясы эсептелет. $x^n$ функциясынын жана ага тескери болгон $g(x) = \sqrt[n]{x}$ функциясынын графиктери $n$ дин айрым маанилери үчүн 140-*б,в* сүрөттөрдө келтирилген.

### *Көнүгүүлөр*

Берилген $f$ функциясына тескери болгон $g$ функциясынын берилиш формуласын чыгаргыла, $g$ функциясынын аныкталуу областын жана маанилеринин областын көрсөткүлө (531—532).

**531.** а) $f(x) = 2x + 1$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$;

в) $f(x) = -2x + 1$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$.




141-сүрөт





**532.** а) $f(x) = -\frac{1}{x}$; б) $f(x) = 2x^2\ (x \geq 0)$;

в) $f(x) = \frac{x}{x+2}$; г) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

**533.** $f$ ке тескери функциянын графигин түзгүлө:

а) $f(x) = 2x^3 + 1$; б) $f(x) = (x+1)^2,\ x \in (-\infty;\ -1]$;

в) $f(x) = -2x^3 + 1$; г) $f(x) = (x-1)^2,\ x \in [1;\ \infty)$.

**534.** Берилген $f$ функциянын графиги боюнча $f$ ке тескери болгон $g$ функциясынын $-2,1$ жана $3$ чекиттериндеги маанилерин тапкыла. $g$ функциясынын графигин чийгиле, анын аныкталуу областын жана маанилеринин областын көрсөткүлө (141-сүрөт).

а) $f(x) = f_1(x)$; б) $f(x) = f_2(x)$; в) $f(x) = f_3(x)$; г) $f(x) = f_4(x)$.

Берилген аралыкта $f$ функциясы тескери функцияга ээ болорун далилдегиле. $f$ ке тескери функциянын графигин түзгүлө.

**535.** а) $f(x) = x^2 + 1,\ x \leq 0$; б) $f(x) = 2x,\ (-\infty;\ \infty)$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x \geq 0$; г) $f(x) = x^3 + 1,\ (-\infty;\ \infty)$.

**536.** а) $f(x) = \sin x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$;

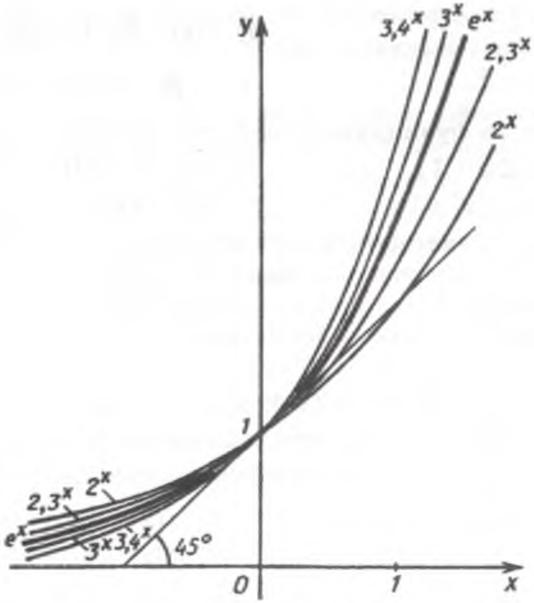
в) $f(x) = \cos x,\ x \in [0;\ \pi]$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0;\ \pi)$.

## § 11. КӨРСӨТКҮЧТҮҮ ЖАНА ЛОГАРИФМАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ТУУНДУЛАРЫ

### 41. Көрсөткүчтүү функциянын туундусу

**1. *е* саны.** Мурдагы пункттарда көрсөткүчтүү функциянын графиги анын ар бир чекитине жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болгондой, (сынык эмес) жылмакай сызык түрүндө көрсөтүлгөн. Бирок функциянын графигинин $x_0$ чекитинде жаныманын жүргүзүлүшү анын бул чекитте дифференцирленүүсүнө эквиваленттүү. Ошондуктан көрсөткүчтүү функция аныкталуу областынын бардык чекиттеринде дифференцирлене алат деген ой туура.

$y = a^x$ функциясынын $a = -2;\ 2{,}3;\ 3;\ 3{,}4$ болгондогу бир нече графиктерин сызалы (142-сүрөт) да, абсциссасы 0 чекитте аларга жаныма жүргүзөлү. Бул жанымалардын абсцисса огуна жантайган бурчтары болжолдуу түрдө 35, 40, 48 жана 51° тарга жакын, б.а. $a$ нын чоңоюшу менен катар $a^x$ функциясынын графигине $M(0;1)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти да акырындык менен tg 35° тан tg 51° ка чейин жогорулайт. $a$ ны




142-сүрөт

2 ден 3 кө чейин чоңойтуп, тиешелүү жаныманын бурчтук коэффициенти бирге барабар боло турган $a$ нын маанисин табабыз (б.а. анын жантаюу бурчу 45° ка барабар). Мунун так баяндалышы (биз аны далилдөөсүз кабыл алабыз) мындайча:

*$y = e^x$ көрсөткүчтүү функциясы 0 чекитинде 1ге барабар туундуга ээ болгондой*, б.а.

$$\Delta x \to 0 \quad \text{учурда} \quad \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1 \qquad (1)$$

болгондой 2 ден чоңураак 3 төн кичирээк сан бар (ал сан $e$ тамгасы менен белгиленет).

Эскертүү. $e$ саны иррационалдуу экендиги далилденген, ошондуктан ал чексиз мезгилсиз бөлчөк түрүндө жазылат. Электрондук эсептөөчү машинанын жардамы менен $e$ санынын эки миңден ашык ондук мааниси табылган. Бул сандын биринчи маанилери мындай:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots .$$

$e^x$ функциясы көпчүлүк учурда *экспонент* деп аталат.

**2. Көрсөткүчтүү функциянын туундусунун формуласы**

**1-теорема.** $e^x$ көрсөткүчтүү функциясы ар бир чекитте дифференцирленет жана

$$(e^x)' = e^x.$$



Далилдөө. Адегенде $y = e^x$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги өсүндүсүн табабыз:

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1).$$

(1) шартты пайдаланып, төмөндөгүнү табабыз:

$$\Delta x \to 0 \text{ учурда } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to e^{x_0}.$$

Туундунун аныктамасы боюнча мындан ар кандай $x$ үчүн $y' = e^x$, б.а. $(e^x)' = e^x$ келип чыгат.

○ 1-мисал. $y = e^{5x}$ функциясынын туундусун табалы:

$$(e^{5x})' = e^{5x}(5x)' = 5e^{5x} \; ●$$

$e$ саны оң жана бирден айырмалуу болгондуктан, $e$ негизи боюнча логарифма аныкталган.

Аныктама. ***Натуралдык логарифма деп*** (ln аркылуу белгиленет) ***негизи e боюнча логарифма аталат:***

$$\ln x = \log_e x. \qquad (2)$$

Логарифмалык негизги теңдештик боюнча ар кандай оң саны үчүн $e^{\ln a} = a$. Ошондуктан $a^x$ көрсөткүчтүү функциясы

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \qquad (3)$$

түрүндө жазылат.

Эми $a$ нын ар кандай маанисинде көрсөткүчтүү функциянын туундусунун формуласын чыгаралы.

**2-теорема.** $a^x$ көрсөткүчтүү функциясы аныкталуу областынын ар бир чекитинде дифференцирлене алат жана

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Далилдөө. Татаал функциянын туундусу жөнүндөгү теорема боюнча (3) формуладан көрсөткүчтүү функция ар бир чекитте дифференцирленүүчү болорун жана

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \qquad (5)$$

экендигин алабыз.

Натыйжа. $a^x$ көрсөткүчтүү функциясы өзүнүн аныкталуу областынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз, б.а. $x \to x_0$ учурда

$$a^x \to a^{x_0}.$$

Бул болсо көрсөткүчтүү функциянын дифференцирленүүчүлүгүнөн жана дифференцирленүүчү функция үзгүлтүксүз деген леммадан (108-бетти кара) келип чыгат.

○ 2-мисал. $y = 2^x$ жана $y = 5^{-3x}$ функцияларынын туундуларын табалы.

(4) формула боюнча

$$(2^x)' = 2^x \ln 2, \; (5^{-3x})' = (-3) \cdot 5^{-3x} \ln 5 \text{ ти алабыз.}$$

3 - м и с а л. $f(x) = xe^x$ функциясынын өсүүсүн (кемүүсүн) жана экстремумун изилдейли.

Бул функциянын туундусун табалы:

$$f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

Ар кандай $x$ үчүн $e^x > 0$ болгондуктан $f'$ тин белгиси $(1 + x)$ тин белгиси менен туура келет. Демек, $(-1; \infty)$ аралыгында $f'(x) > 0$, ошондуктан $[-1; \infty)$ аралыгында $y$ өсөт. $(-\infty; -1)$ аралыгында $f'(x) < 0$, ошол себептен $(-\infty; 1]$ аралыгында $f$ кемийт. $x_0 = -1$ чекитинде туунду өз белгисин минустан плюска өзгөртөт, демек, $x_0 = -1$ чекити минимум чекити болот.

Функциянын графиги 143-сүрөттө көрсөтүлгөн. ●

### 3. Көрсөткүчтүү функциянын баштапкы функциясы

3 - т е о р е м а $\frac{a^x}{\ln a}$ **функциясы $a^x$ функциясы үчүн $R$ де баштапкы функция болот.**

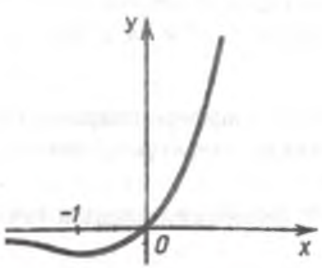
Чындыгында $\ln a$ — турактуу, ошондуктан бардык $x$ үчүн

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a}a^x \ln a = a^x.$$

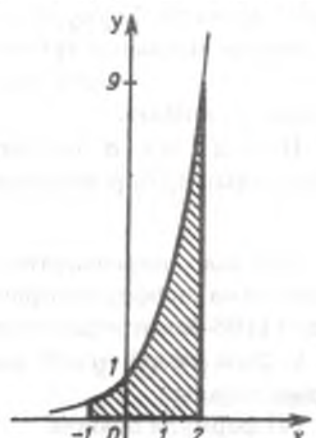
Муну менен $\frac{a^x}{\ln a}$ функциясы $R$ де $a^x$ функциясы үчүн баштапкы болору далилденди. Ал эми $(e^x)' = e^x$ барабардыгынан $e^x$ функциясы бардык $x$ үчүн $e^x$ тин $R$ де баштапкы функциясы болору келип чыгат.

○ 4 - м и с а л. Төмөнкү функциялардын баштапкы функцияларын табалы:

а) $f(x) = 5^x$; б) $g(x) = 4 \cdot 2^x$; в) $h(x) = 4e^{3x} - 10 \cdot 0{,}6^x$.




143-сүрөт




143-сүрөт





3-теореманы жана баштапкы функцияларды табуунун эрежелерин пайдаланып ж о о п т о р у н жазабыз:

а) $F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + C$; б) $G(x) = \frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$; в) $H(x) = \frac{4}{3}e^{3x} - 10 \cdot \frac{0{,}6^x}{\ln 0{,}6} + C$.

5 - м и с а л. Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын табалы:

$$y = 3^x,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 2.$$

Көрсөтүлгөн фигура ийри сызыктуу трапеция (144-сүрөт). Ошондуктан анын $S$ аянтын ийри сызыктуу трапециянын аянтын табуу формуласы боюнча табабыз:

$$S = \int_{-1}^{2} 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} = \frac{26}{3\ln 3}. \ ●$$

### *Көнүгүүлөр*

**537.** Натуралдык логарифмалардын таблицасы боюнча (же калькулятордун жардамы менен) тапкыла:

а) ln 3, ln 5,6, ln 1,7;
б) ln 8, ln 17, ln 1,3;
в) ln 2, ln 35, ln 1,4;
г) ln 7, ln 23, ln 1,5.

Функциянын туундусун тапкыла (538—539).

**538.** а) $y = 4e^x + 5$; б) $y = 2x + 3e^{-x}$;
в) $y = 3 - \frac{1}{2}e^x$; г) $y = 5e^{-x} - x^2$.

**539.** а) $y = e^x \cos x$; б) $y = 3e^x + 2^x$;
в) $y = 3^x - 3x^2$; г) $y = x^2 e^x$.

**540.** Абсциссасы $x_0$ болгон чекитте $f$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла:

а) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

**541.** Функциялар үчүн баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 5e^x$; б) $f(x) = 2 \cdot 3^x$;
в) $f(x) = 4^x$; г) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1$.

**542.** Интегралды чыгаргыла:

а) $\int_0^1 0{,}5^x dx$; б) $\int_0^1 e^{2x} dx$; в) $\int_{-2}^{1} 2^x dx$; г) $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} 3^x dx$.

546 – 587

Берилген функциялардын туундусун тапкыла (543—544).

**543.** а) $y = e^{x^2}\sin\frac{x}{2}$;  б) $y = 7^{\frac{x}{2}}\operatorname{tg} 3x$;

в) $y = e^{\sqrt{x}}\cos 2x$;  г) $y = 2^{-x}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

**544.** а) $y = \frac{x^6}{4^x + 5}$;  б) $y = \frac{e^{-x}}{x^2 + 2}$;

в) $y = \frac{3^x}{2^x + 5^x}$;  г) $y = \frac{0{,}3^{x}}{\sqrt{x + 0{,}5}}$.

**545.** Функциянын өсүшүн (кемишин) жана экстремумдарын изилдегиле:

а) $f(x) = xe^{5x}$;  б) $f(x) = x^2\, 2^{-x}$;  в) $f(x) = xe^{-x}$;  г) $f(x) = x^4\, 0{,}5^x$.

**546.** Берилген функция үчүн баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = e^{3-2x}$;  б) $f(x) = 2\cdot 0{,}9^x - 5{,}6^{-x}$;

в) $f(x) = 2^{-10x}$;  г) $f(x) = e^{3x} + 2{,}3^{1+x}$.

Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (547—548)

**547.** а) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;  б) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$;

в) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$; $x = 2$;  г) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

**548.** а) $y = (\frac{1}{3})$, $y = 3$, $x = 1$;  б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$;

в) $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = 1$, $x = -2$;  г) $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = 4^x$, $x = 4$.

## 42. Логарифмалык функциянын туундусу

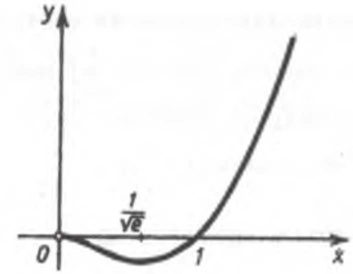
Адегенде логарифмалык функциянын ар бир чекитте дифференцирленерин көрсөтөлү. $y = \log_a x$ жана $y = a^x$ функцияларынын графиги $y = x$ түз сызыгына карата симметриялуу жайгашкан. Көрсөткүчтүү функция ар кандай чекитте дифференцирленүүчү болгондуктан, анын туундусу нөлгө барабар болбойт, көрсөткүчтүү функциянын графиги ар кандай чекитте горизонталдык эмес жанымага ээ. Ошондуктан логарифмалык функциянын графиги да ар кандай чекитте вертикалдуу эмес жанымага ээ. Муну өзү логарифмалык функция өзүнүн аныкталуу областында дифференцирленүүчү экендигин көрсөтөт.

Эми логарифмалык функциянын өзүнүн аныкталуу областынын ар кандай $x$ чекитиндеги туундусу

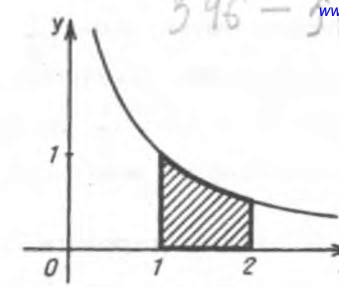
$$\ln' x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

формуласы боюнча табыларын көрсөтөлү.






145-сүрөт




146-сүрөт

Бардык оң $x$ тер үчүн логарифманын негизги теңдештиги $x = e^{\ln x}$ боюнча, б.а. бул барабардыктын оң жана сол жактарында ($R_+$ де аныкталган) бир эле функция турат. Ошондуктан $x$ жана $e^{\ln x}$ функцияларынын туундулары барабар, б.а.

$$x' = (e^{\ln x})'. \qquad (2)$$

$x' = 1$ экендиги белгилүү. Оң жагынын туундусун татаал функциянын туундусун табуунун эрежеси жана 1-теорема (41-п.) боюнча табабыз:

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x}\cdot \ln' x = x\ln' x.$$

Табылган туундуларды (2) барабардыкка коюп, $1 = x\ln' x$ ти табабыз, мындан $\ln' x = \frac{1}{x}$.

○ 1 - м и с а л. Функциялардын туундусун табалы: а) $y = \ln(5 + 2x)$, б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_7(2x)$.

а) $(\ln(5 + 2))' = \frac{1}{5 + 2x}(5 + 2x)' = \frac{2}{5 + 2x}$;

б) $(\log_3 x)' = (\frac{\ln x}{\ln 3})' = \frac{1}{x\ln 3}$;

в) $(\log_7 2x)' = (\frac{\ln 2x}{\ln 7})' = \frac{2}{2x\ln 7} = \frac{1}{x\ln 7}$.

2 - м и с а л. $f(x) = x^2\ln x$ функциясынын өсүшүн, кемишин, экстремумун изилдейли жана анын графигин түзөлү.

Функция $x > 0$ учурда аныкталган. Бул функциянын туундусун табалы:

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x(\ln x + \frac{1}{2}).$$

$x > 0$ болгондуктан туундунун белгиси $(\ln x + \frac{1}{2})$ дин белгиси менен дал келет. Мындан $(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty)$ аралыгында $f'(x) > 0$ экендиги келип чыгат, демек $[\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty)$ аралыгында функция өсөт; $(0; \frac{1}{\sqrt{e}})$ аралыгында туунду терс болот, ошондуктан $(0; \frac{1}{\sqrt{e}}]$ аралыгында $f$ кемийт. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ чекитинде туунду өз белгисин минустан плюска өзгөртөт, демек, бул минимум чекити: $(f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

Функциянын графиги 145-сүрөттө келтирилген. ●

$(0; \infty)$ *аралыгында* $\frac{1}{x}$ *функциясынын ар кандай баштапкы функциясы*

$$\ln x + C$$

*түрүндө жазылары* (1) *формуладан көрүнүп турат.*

$\frac{1}{x}$ функциясы $(-\infty; 0)$ аралыгында да баштапкы функцияга ээ, бул $\ln(-x)$ функциясы болот. Чындыгында

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-1} \cdot (-x)' = \frac{1}{-1} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

$x > 0$ учурда $|x| = x$ жана $x < 0$ учурда $|x| = -x$ болгондуктан, $\frac{1}{x}$ *функциясы үчүн баштапкы функция болуп, 0 ду камтыбаган ар кандай аралыктагы* $\ln|x|$ *функциясы эсептелерин далилдедик.*

3 - м и с а л. $\frac{1}{x+3}$ функциясынын баштапкы функциясы ($-3$ чекитин камтыбаган ар кандай аралыкта) $\ln|x+3| + C$ га барабар. $\frac{1}{5x+7}$ функциясы үчүн баштапкы функциянын жалпы түрү ($-\frac{7}{5}$ чекитин камтыбаган ар кандай аралыкта) $\frac{1}{5}\ln|5x+7| + C$ болот.

4 - м и с а л. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ сызыктары менен чектелген фигуранын (146-сүрөт) аянтын табалы.

$x > 0$ учурда $\frac{1}{x}$ функциясы үчүн баштапкы болуп $\ln x$ эсептелгендиктен, бизди кызыктырган ийри сызыктуу трапециянын аянты буга барабар:

$$S = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \quad ●$$

*Көнүгүүлөр*

Функциялардын туундусун тапкыла (549—550).

**549.** а) $y = \ln(2 + 3x)$; б) $y = \log_{0{,}3} x + \sin x$;
в) $y = \ln(1 + 5x)$; г) $y = \lg x - \cos x$.





**550.** а) $y = x^2 \log_2 x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$; в) $y = x \ln x$; г) $y = \frac{x}{\ln x}$.

**551.** Төмөнкү функциялар үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = \frac{3}{7x+1}$; б) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+5}$;
в) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; г) $f(x) = \frac{4}{x}$.

**552.** Абсциссасы $x_0$ болгон чекитте $f$ функциясынын графигине жаныманын теңдемесин жазгыла, эгерде:

а) $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \ln x + 2$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = 2\ln x$, $x_0 = e$; г) $f(x) = \log_2(x-1)$, $x_0 = 2$.

**553.** Интегралды чыгаргыла:

а) $\int_1^7 \frac{2\,dx}{x}$; б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$.

---

**554** Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y = \frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$; б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-2x)}$; в) $y = \frac{x^2}{\ln 5x}$; г) $y = \frac{\log_3 x^2}{x+1}$.

Функциянын өсүшүн (кемишин) жана экстремумдарын изилдегиле (555—556).

**555.** а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
в) $f(x) = 2x - \ln x$; г) $f(x) = x\ln x$.

**556.** а) $f(x) = x\ln^2 x$; б) $f(x) = \frac{2x}{\lg x}$;
в) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

**557.** Берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

а) $y = \frac{4}{x} + 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$;

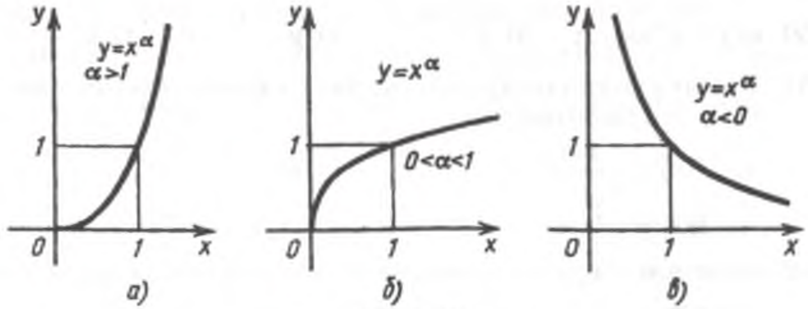
б) $y = -\frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -1$;

в) $y = \frac{1}{2x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

г) $y = 3 - \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -6$, $x = -3$.

## 43. Даражалуу функция

**1. Даражалуу функция жана анын туундусу.** Ар кандай $\alpha$ анык саны үчүн жана ар кандай оң сан $x$ үчүн $x^\alpha$ саны аныкталарын силер билесиңер. $(0; \infty)$ аралыгынан $\alpha$ санын алалы.




147-сүрөт

А н ы к т а м а. **$f(x) = x^{\alpha}$ формуласы аркылуу берилген функция (даража көрсөткүчү $\alpha$ болгон)** ***даражалуу*** функция деп аталат.

Эгерде $\alpha > 0$ болсо, анда $0^{\alpha} = 0$ болгондуктан, даражалуу функция $x = 0$ чекитинде да аныкталган болот. $\alpha$ бүтүн учурда $f(x) = x^{\alpha}$ даражалуу функция $x < 0$ үчүн да аныкталган. $\alpha$ жуп учурда бул функция жуп, ал эми $\alpha$ так учурда так болот. Ошондуктан даражалуу функцияны изилдөөнү $(0;\infty)$ аралыгында жүргүзүү жетиштүү.

Курстун мурдагы бөлүмдөрүндө $y = x^{\alpha}$ функциясынын туундусу үчүн формулалар даражанын бүтүн көрсөткүчтөр учурунда, ошондой эле $\alpha = \frac{1}{2}$ де алынган эле. Эми бизге даражалуу функциянын туундусу үчүн формулаларды $\alpha$ үчүн чыгаруу калды:

$$(x^{\alpha})' = ax^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Чындыгында, $x = e^{\ln x}$ болгондуктан, $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ келип чыгат. Андан татаал функциянын туундусун табуу эрежеси боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(1) формула далилденди.

$\alpha < 0$ учурда $(0;\infty)$ аралыгында даражалуу функция кемийт, анткени $x > 0$ учурда $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ болот. $\alpha > 0$ учурда $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$ гө ээ болобуз, ошондуктан даражалуу функция $x > 0$ учурда өсөт. Андан тышкары, $x = 0$ учурда даражалуу функция 0 гө барабар, $x > 0$ жана $x \to 0$ учурда $x^{\alpha} \to 0$ экендигин эске алуу керек. Ошондуктан 0 чекити өсүү аралыгына кошулат, б.а. $\alpha > 0$ учурда даражалуу функция $[0;\ \infty]$ аралыгында өсөт. $\alpha$ нын ар кандай маа-





нисиндеги даражалуу функциянын графиктеринин айрымдары 147-сүрөттө келтирилген.

(1) формуладан көрүнүп тургандай, $f(x) = x^{\alpha}$ даражалуу функциясынын туундусу ($f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ болгон) даражалуу функция болуп эсептелет. Даражалуу функциянын баштапкы функциясы менен иштөө башкача болот.

$\alpha \neq -1$ учурда $f(x) = x^{\alpha}$ даражалуу функциясынын баштапкы функцияларынын жалпы түрү $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ экендигин текшерип көрүү кыйын эмес.

$\alpha = -1$ учурда, бизге белгилүү болгондой, $f$ функциясынын баштапкы функциясы болуп $F(x) = \ln|x| + C$ эсептелет.

**2. Даражалуу функциянын маанилерин эсептөө.**

Жакындатылган

$$(1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x \qquad (2)$$

формуласын чыгаралы.

$f(x) = x^{\alpha}$ функциясын карайлы. 20-п. тан белгилүү болгон

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \qquad (3)$$

жакындатылган формуласын $x_0 = 1$ жана $x = 1 + \Delta x$ учурунда колдонобуз. Анда $f(x_0) = f(1) = 1$ жана $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, мындан $f'(x_0) = f'(1) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$ (3) формула боюнча

$$f(x) = (1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x.$$

Бул формула көбүнчө тамырларды эсептөөдө колдонулат. $\alpha = \frac{1}{n}$ деп алып, төмөнкүнү табабыз:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} = (1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \qquad (4)$$

○ М и с а л. Жакындатылган маанилерин эсептейли: а) $\sqrt[4]{1{,}08}$; б) $\sqrt[3]{27{,}03}$; в) $\sqrt[10]{1000}$.

(4) формуланы пайдаланабыз:

а) $\sqrt[4]{1{,}08} = (1 + 0{,}08)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}08 = 1{,}02;$

б) $\sqrt[3]{27{,}03} = \sqrt[3]{27(1 + \frac{0{,}03}{27})} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0{,}03}{27}} \approx 3\,(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}03}{27}) \approx 3{,}0011.$

($\sqrt[3]{27{,}03}$ нин үтүрдөн кийинки сегиз мааниси мындай: $\sqrt[3]{27{,}03} \approx$ $\approx 3{,}0011107.$)

в) $2^{10} = 1024$ экендигин байкайбыз. Төмөнкүгө ээ болобуз:

$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \cdot \sqrt[10]{1 - \frac{24}{2^{10}}} \approx 2\,(1 - \frac{24}{10 \cdot 2^{10}}) \approx 1{,}995$ ●

### *Көнүгүүлөр*

$f$ функциясынын графигин түзгүлө жана анын туундусун тапкыла (558—559).

**558.** а) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; б) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$;

в) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; г) $f(x) = x^{-\sqrt{5}}$.

**559.** а) $f(x) = x^{-e}$; б) $f(x) = (\frac{x}{3})^{-\lg 5}$;

в) $f(x) = x^{\pi}$; г) $f(x) = (2x)^{\ln 3}$.

(4) формуланын жардамы менен жакындатылган маанилерин тапкыла (560—561).

**560.** а) $24^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[4]{625 \cdot 3}$; в) $\sqrt[5]{81}$; г) $\sqrt[4]{48}$.

**561.** а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[4]{90}$; в) $\sqrt{9{,}02}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

**562.** $I$ аралыгында $f$ функциясынын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

а) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$, $I = [1; 32]$; б) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$, $I = [\frac{1}{8}; 27]$;

в) $f(x) = x^{-4}$, $I = [\frac{1}{2}; 1]$; г) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, $I = [\frac{1}{16}; 81]$.

**563.** Функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$; б) $f(x) = x^{2\sqrt{3}}$;

в) $f(x) = 3x^{-1}$; г) $f(x) = x^{e}$.

**564.** Интегралды эсептегиле:

а) $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx$; б) $\int_1^8 \frac{4\,dx}{x^{\frac{2}{3}}}$; в) $\int_e^{e^2} 2x^{-1}\,dx$; г) $\int_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{4}}\,dx$.

---

**565.** Берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

а) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $x = 1$; б) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$;

в) $y = x^{-0{,}8}$, $y = 0$; $x = 1$; $x = 32$; г) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 3$; $x = 5$.

**566.** $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ $(x \geq 0)$ функцияларынын графиктерин миллиметрдик кагазга түзгүлө.

1) Графиктин жардамы менен жакындатылган маанилерин тапкыла: а) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2{,}5}$; в) $\sqrt[3]{2{,}5}$, $\sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt[4]{2}$.

2) Бул тамырлардын маанилерин калькулятордун жардамы менен тапкыла.





3) (4) формуланы колдонуп алардын жакындатылган маанилерин эсептегиле. Көрсөтмө: $2{,}5 = 1{,}6^2 - 0{,}06$;

$2{,}5 = 1{,}3^3 + 0{,}303$; $2{,}5 = 1{,}25^4 + \frac{15}{256}$; $2 = 1{,}4^2 + 0{,}04$;

$3 = 1{,}4^3 + 0{,}256$; $3 = 1{,}3^4 = 0{,}1439$.

(4) Алынган жыйынтыктарды салыштыргыла.

**567.** $f(x) = x^{\sqrt{5}}$ функциясынын төмөнкү касиеттерге ээ болору чынбы:

а) анын аныкталуу областынын учтарында функциянын белгиси ар башка болгон кесиндини табууга болот;

б) функция жуп болуп эсептелет: в) экстремумдарга ээ;

г) функциянын эң кичине маанисине туура келүүчү $x_0$ чекити бар.

## 44. Дифференциалдык теңдемелер жөнүндө түшүнүк

**1. Түздөн-түз интегралдоо.** Табиятты окуп үйрөнүүдө көп маселелерде кандайдыр бир функциянын туундусун (биринчи, экинчи тартиптеги ж.б.), функциянын өзүн жана аргументти байланыштырып турган туюнтмалар көп кездешет. Мисалы, Ньютондун экинчи законуна ылайык, турактуу массадагы материалдык чекиттин түз сызык боюнча кыймылы үчүн $F = ma$ формуласы орун алат, мында $F$ — кыймылды пайда кылуучу күч, $a$ — нерсенин ылдамдануусу. $F$ күчү убакыт $t$ дан гана көз каранды болсун, б.а. $F = F(t)$. Ылдамдануу — бул координаттын убакыт боюнча алынган экинчи тартиптеги туундусу экендигин эске алып ($a(t) = x''(t)$), $x(t)$ функциясына карата дифференциалдык теңдемени алабыз:

$$F(t) = mx''(t), \text{ б.а. } x''(t) = \frac{F(t)}{m},$$

чыгаруу үчүн адегенде $x'(t)$ функциясынын баштапкы функциясы катары $\frac{F(t)}{m}$ ти таап, андан кийин $v(t) = x'(t)$ функциясынын баштапкы функциясы катары $x(t)$ ти табабыз. Жалпы чыгарылышы эки эркин турактуу санды камтыйт. Аларды табуу үчүн, көбүнчө $t$ убакыттын кандайдыр бир моментинде координаттын жана ылдамдыктын маанилерин белгилүү деп алышат.

○ 1 - м и с а л. Оордук күчүнүн таасири астында вертикалдуу кыймылда болгон $h(t)$ чекиттин координатасы ($Oz$ огу вертикаль төмөн жайлашкан)

$$h''(t) = g$$

дифференциалдык теңдемени канааттандырат. Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$h(t) = h_0 + \upsilon_0 t + \frac{g}{2}t^2$$

түрүнө ээ, мында $h_0 = h(0)$, $\upsilon_0 = \upsilon(0)$.

$h_0$ менен $\upsilon_0$ берилсе, бир гана чыгарылышты алабыз. ●

Жалпысынан $f$ функциясынын баштапкы функциясы $F$ ти *эң жөнөкөй дифференциалдык теңдеменин:*

$$F'(x) = f(x)$$

чыгарылышы катары кароого болот, мында $f(x)$ — берилген функция, $F(x)$ — бул теңдеменин чыгарылышы.

**2. Көрсөткүчтүү өсүүнүн жана көрсөткүчтүү кемүүнүн дифференциалдык теңдемеси.** Физиканын, техниканын, биологиянын жана социалдык илимдердин көптөгөн маселелерин чыгаруу төмөнкү дифференциалдык теңдемени

$$f'(x) = kf(x) \tag{2}$$

канааттандырган $f$ функциясын табуучу маселеге алып келет, мында $k$— кандайдыр бир константа.

Көрсөткүчтүү функциялардын туундусунун формуласын билип, (2) теңдеменин чыгарылышы

$$f(x) = Ce^{kx}, \tag{3}$$

түрүндөгү каалаган функция болорун көрүү кыйын эмес, мында $C$ — турактуу чоңдук. $C$ каалагандай чоңдук болгондуктан, (2) дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы чексиз көп болот.

(2) теңдеменин (3) түрдөгү функциялардан башка чыгарылышы жок экендигин далилдейли. Ал үчүн (2) теңдемени канааттандырган каалагандай $f$ функциясын жана төмөнкү жардамчы функцияны:

$$g(x) = f(x)e^{-kx} \tag{4}$$

карап көрөлү. Анын туундусун табалы:

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

$f'(x)$ тин ордуна анын (2) теңдемедеги $kf(x)$ маанисин коюп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$g'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

$g$ функциясынын туундусу нөлгө барабар болгондуктан, бардык $x$ үчүн $g(x) = C$ келип чыгат. (4) формуладан

$$f(x)e^{-kx} = C, \text{ мындан } f(x) = Ce^{kx}$$

экендигин алабыз, ушуну далилдөө талап кылынган.





Э с к е р т у у. Жогоруда келтирилген ой жүгүртүүлөрдө $f$ функциясы бүткүл сан түз сызыгында аныкталып жана (2) теңдемени канааттандырат деп алдын ала болжолдогонбуз. Конкреттүү маселелерде көпчүлүк учурда (2) теңдемени кандайдыр бир аралыкта гана канааттандыра турган функцияны кароого туура келет. Мындай учурда (3) формула (2) теңдемени колдонууга боло турган аралыкта гана маселенин жалпы чыгарылышын берери табигый иш.

(2) дифференциалдык теңдеменин мааниси, $x$ чекитинде функциянын өзгөрүү ылдамдыгы, функциянын өзүнүн ушул чекиттеги маанисине пропорциялуу экендигинде. Бул теңдеме практикалык маселелерди чыгарууда көп кездешет.

○ 2 - м и с а л. (Радиоактивдүү бөлүнүү.) Убакыттын баштапкы моментинде радиоактивдүү заттын массасы

$$m(0) = m_0 \tag{5}$$

го барабар болсун.

$t$ убакыттын өтүшү менен заттын $m(t)$ массасынын азаю ылдамдыгы анын санына пропорциялуу экендиги белгилүү, б.а.

$$m'(t) = -km(t)$$

теңдемеси аткарылат, мында $k > 0$. Жогоруда көрсөтүлгөн боюнча

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

$C$ константасы (5) шарттан табылат. Атап айтканда $t = 0$ болгондо

$$m_0 = m(0) = Ce^{-k\cdot 0} = C, \text{ б.а. } C = m_0.$$

Эң акырында төмөндөгүнү алабыз:

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \tag{6}$$

Каралган мисал типтүү мисал: дифференциалдык теңдеменин чексиз чыгарылыштарында бир чыгарылышты бөлүп алуу үчүн, адатта баштапкы шарттарды дагы киргизүү талап кылынат (биздин учурда бул (5) шарт).

Радиоактивдүү заттын массасынын эки эсе азайышына кеткен $T$ убакыт аралыгы бул заттын *жарым бөлүнүүсүнүн мезгили* деп аталат. $T$ ны билип, $k$ ны табууга болот.

$$m(T) = \frac{1}{2}m_0, \text{ б.а. } m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2}m_0$$

болгондуктан, төмөндөгүнү алабыз:

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}.$$

Демек, $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$, мындан

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Мисалы, радий үчүн, $T \approx 1550$ жыл. Ошондуктан (эгерде убакыт жыл менен эсептелсе)

$$k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0{,}000447.$$

Миллион жылдан кийин радийдин баштапкы $m_0$ массасынан

$$m(10^6) \approx m_0\, e^{-447} \approx 0{,}6 \cdot 10^{-194} m_0$$

гана калат.

**3. Гармоникалык термелүүлөр.** $f'$ функциясынын туундусунан ($f$ тен) алынган туундуну $f$ функциясынын *экинчи туундусу* деп аташат жана аны $f''$ аркылуу белгилешет («Эф эки штрих» деп окулат). Мисалы:

$$\sin' x = \cos x,\ \sin'' x = \cos' x = -\sin x,$$
$$\cos' x = -\sin x,\ \cos'' x = -\sin' x = -\cos x. \qquad (7)$$

Экинчи туунду функцияны тагыраак изилдөөгө мүмкүндүк берет. Биринчи туунду — функциянын өзгөрүшүнүн ылдамдыгы, ал эми экинчи туунду — бул ылдамдыктын өзгөрүшүнүн ылдамдыгы.

(7) формуланы анализдеп, синустун жана косинустун экинчи туундулары функциянын өзүнөн белгилери менен гана айырмаланганын байкоого болот. Башкача айтканда, бул эки функция тең $t$ аргументинин бардык маанилеринде

$$f''(t) = -f(t)$$

теңдемесин канааттандырат.

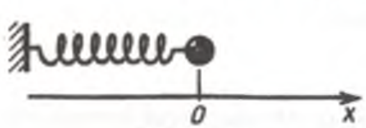
Физикада, айрым алганда механикада,

$$f''(t) = -\omega^2 f(t) \qquad (8)$$

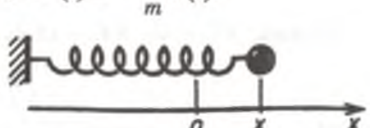
теңдемесин канааттандырган $f$ функциясы чоң ролду ойнойт, мында $\omega$ — оң турактуу сан.

Ушундай түрдөгү теңдемеге алып келген механикадагы бир маселени карап көрөлү. Массасы $m$ болгон шарга горизонталь жайланышкан пружина бекитилген, анын экинчи учу — бекитилген, тең салмактуу абалда шардын борборунун координатасы $x$ нөлгө барабар болсун (148-сүрөт). Борбору координатасы $x \neq 0$ болгон чекитке жылдырганда шарды тең салмактуу абалга алып келүүгө умтулган күч пайда болот. Гуктун закону боюнча бул күч $x$ тин жылышына пропорционалдуу, б.а $F = -kx$, мында $k$ — оң сан (149-сүрөттү кара). Ньютондун экинчи закону боюнча $F = ma$, ошондуктан, түз сызыктуу кыймылдын ылдамдануусу экинчи туундуну берерин эске алып, муну алабыз:

$$ma(t) = mx''(t) = F, \text{ б.а } x''(t) = -\frac{k}{m} x(t).$$



148-сүрөт



149-сүрөт





Башкача айтканда, серпилгич күчтүн таасири астындагы шардын борборунун кыймылы $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ учурда (8) теңдемени канааттандырат.

(8) теңдемеге ылайык убакыт боюнча өзгөрүлгөн физикалык чоңдук гармоникалык термелүүнү (7-ты кара) түзөрүн көрсөтөлү. (8) теңдеменин өзү *гармоникалык термелүүнүн дифференциалдык теңдемеси* деп аталат.

$A$ жана $\varphi$ турактуу сандарынын ар бир маанилеринде

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (9)$$

функциясы (8) теңдеменин чыгарылышы болоорун текшеребиз. Чындыгында, татаал функциядан туунду табуунун формуласын пайдаланып, буларды алабыз:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$
$$f''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Тескерисинче да туура: (8) теңдеменин ар кандай чыгарылышы — (9) түрүндөгү функцияны берет, көбүнчө $A \geq 0$, $\varphi \in [0;\ 2\pi\,]$ деп кабыл алышат. Муну далилдөө мектептин курсунун рамкасына кирбейт.

Эгерде баштапкы шарттар берилсе: $f(0) = y_0$, $f'(0) = v_0$, анда эрктүү $A$ жана $\varphi$ турактууларын аныктоого болот.

▽ **4. Нерселердин атмосфералык чөйрөдө түшүшү.** Өтө татаал мисалды карап көрөлү. Нерсенин атмосфералык чөйрөдө түшүүшүндө абанын каршылык көрсөтүүсүн эске алуу керек. Абанын каршылык күчү кыймылдын ылдамдыгына пропорционалдуу экендиги эксперименталдуу далилденген, б.а. нерсеге таасир эткен күч $F$ буга барабар: $F(t) = mg - kh'(t)$, мында $m$ — нерсенин массасы, $g$ — эркин түшүүнүн ылдамдануусу $h(t)$ — түз сызыктагы координата. ($Oh$ огу вертикаль боюнча төмөн багытталган), $k$ —пропорционалдуулуктун коэффициенти. Ньютондун экинчи закону боюнча $F = ma$, ошондуктан бул теңдемени алабыз:

$$mz''(t) = mg - kz'(t), \text{ б.а. } z''(t) = g - \frac{k}{m} z'(t),$$

жана аны кыймылдын ылдамдыгы $v(t) = z'(t)$ га карата дифференциалдык теңдеме

$$v'(t) = g - bv(t), \text{ мында } b = \frac{k}{m} > 0 \qquad (10)$$

деп кароо ыңгайлуу. Бул теңдемени бизге белгилүү түргө келтирүү үчүн $y(t) = \frac{g}{b} - v(t)$жаңы өзгөрүлмөсүн киргизебиз, анда $y'(t) = (\frac{g}{b} -$

$-v(t))' = v'(t)$ жана (10) теңдемени

$$-y'(t) = by(t), \text{ б.а. } y'(t) = -by(t),$$

түрүндө жазууга болот жана анын чыгарылышы белгилүү: $y(t) = Ce^{-bt}$. Демек, $v(t) = \frac{g}{b} - y(t) = \frac{g}{b} - Ce^{-bt}$.

$y = e^{-bt}$ функциясы $R$ де кемийт атап айтканда $t$ нын өсүшү менен анын мааниси кичиреет (б. а. ар кандай $C$ үчүн $t \to \infty$ учурда $Ce^{-bt}$ ). Мунун өзү ылдамдык турактуу маани $\frac{g}{b}$ га умтулат дегенди билдирет, бул турактуу масса $m$ ден жана пропоционалдуулуктун коэффициенти $k$ дан көз каранды. Мисалы, салмактуу секирүүдө (парашют ачыла элек!) бул ылдамдык болжол менен 50 м/с га барабар, ал эми парашютисттин жерге түшөрүндөгү ылдамдыгы болжол менен 4–5 м/саат ($k$ бир топ чоң болгондо). ▲

Каралган мисалдар изилдөөлөрдө дифференциалдык теңдемелер канчалык күчтүү аппарат болоорун түшүнүүгө мүмкүндүк берет. Кандайдыр бир процесстерди башкарууда эң эле жөнөкөй закондор дифференциалдык теңдемелер түрүндө жазылат. Ал процесс убакыттын өтүшүндө кандайча өсө аларын билиш үчүн дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу керек.

### *Көнүгүүлөр*

**568.** $y(t)$ функциясы берилген дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болорун текшергиле:

а) $y(t) = 3\cos(2t + \pi)$, $y'' = -4y$;

б) $y(t) = 4\sin(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3})$, $y'' = -\frac{1}{4}y$;

в) $y(t) = 2\cos 4t$, $y'' + 16y = 0$;

г) $y(t) = \frac{1}{3}\sin(0{,}1t + 1)$, $y'' + 0{,}01y = 0$.

**569.** $y = 5e^{3x}$ функциясы $y' = 3y$ теңдемесин канааттандырарын далилдегиле.

**570.** $y = 7e^{-2x}$ функциясы $y' = -2y$ теңдемесин канааттандыра тургандыгын далилдегиле.

**571.** $y = 3e^{-7x}$ функциясы $y' = -7y$ теңдемесин канааттандырарын далилдегиле.

**572.** Дифференциалдык теңдеменин нөлгө барабар болбогон чыгарылыштарынын бирин тапкыла:

а) $y'' = -25y$; б) $\frac{1}{9}y'' + 4y = 0$;

в) $4y'' + 16y = 0$; г) $y'' = -\frac{1}{4}y$.





**573.** Гармоникалык термелүүлөрдүн дифференциалдык теңдемесин жазгыла:

а) $x = 2\cos(2t - 1)$; б) $x = 6{,}4\cos(0{,}1t + \frac{\pi}{7})$;

в) $x = 4\sin(3t - \frac{\pi}{4})$; г) $x = 0{,}71\sin(0{,}3t - 0{,}7)$.

---

**574.** $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ жана $x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ эки гармоникалык термелүүнүн суммасынын мезгилдүү функция болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болуп, алардын катышы $r$ рационалдык санды берери эсептелет, б.а. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$.

**575.** $m$ мг болгон $C$ радийден $t$ мүнөт радиоактивдүү бөлүнүүдөн кийин $n$ мг калды. $C$ радийдин жарым бөлүнүү мезгилин тапкыла.

**576.** Радиоактивдүү бөлүнүүнүн башталышында $A$ радийден 1 г бар эле. Эгер анын жарым бөлүнүү мезгили 3 мүнөткө барабар болсо, канча мүнөттөн кийин анда 0,125 г калат?

**577.** Радиоактивдүү заттын жарым бөлүнүү мезгили 1 саатка барабар. Канча сааттан кийин анын саны 10 эсе азаят? Эгер радийдин жарым бөлүнүү мезгили 1550 жылга барабар болсо, 1000 жылдан кийин анын кандай үлүшү каларын эсептегиле.

**578.** Бир нерсенин температурасы $200^\circ$, ал эми экинчи нерсеники $100^\circ$. Нерселерди температурасы $0^\circ$ болгон абалга алып чыгышты. 10 мүнөттөн кийин биринчи нерсе $100^\circ$ ка, ал эми экинчиси $80^\circ$ ка чейин сууду. Канча убакыттан кийин нерселердин температуралары теңелет?
(Нерсенин температурасы $T(t)$, $T'(t) = -k(T - T_1)$ теңдемесин канааттандырат, мында $T_1$ курчап турган чөйрөнүн температурасы.)

**579.** Эки нерсе $100^\circ$ болгон бирдей температурага ээ. Алар абага алып чыгарылды (абанын температурасы $0^\circ$). 10 мүнөттөн кийин биринчи нерсенин температурасы $80^\circ$, ал эми экинчисиники $64^\circ$ болду. Сууй баштагандан тартып, канча мүнөт өткөндөн кийин алардын температураларынын айырмасы $25^\circ$ болот?

**580.** Моторлуу кайык 30 км/саат ылдамдык менен бара жатты. Кайыктын моторун өчүргөндөн 3 мүнөт өткөндөн кийин анын ылдамдыгы канчалык болот? (Кайыктын $v(t)$ ылдамдыгы $v'(t) = -kv(t)$ дифференциалдык теңдемесин канааттандыра тургандыгынан пайдаланыш керек, мында $k = \frac{5}{3}$, $v$ —ылдамдык, метр мүнөт менен.)

## Тарыхтан маалыматтар

**1. Терминдердин жана белгилөөлөрдүн келип чыгышы.** Бирдей көбөйтүүчүлөрдү көбөйтүү маселеси көп маселелерди чыгаруудан келип чыгат. Натуралдык көрсөткүчтүү даража жөнүндөгү түшүнүк Байыркы Грецияда эле пайда болгон (*сандын квадраты* жөнүндөгү туюнтма квадраттын аянтын эсептөөдө, *сандын кубу* — кубдун көлөмүн табууда пайда болгон). Бирок азыркы белгилөөлөрдү $a^4$, $a^5$ тибиндеги) XVII к. Декарт киргизген.

Бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражалар жана бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражалар менен болгон амалдардын эң жөнөкөйлөрү XIV к. француз математиги Н. О р е м а н ы н (1323—1382) эмгектеринде кездешет. Даражанын көрсөткүчү ноль жана терс болгон учурларды Ш ю к е (болж.м. 1445— болж. м. 1500) караган. Тамыр $\sqrt[n]{a}$ ди $a^{\frac{1}{n}}$ деп түшүнүү керектигин С. С т е в и н сунуш кылган. Бирок, рационалдуу көрсөткүчтөрдү системалуу түрдө биринчи жолу Ньютон колдонгон.

Немец математиги М. Ш т и ф е л ь (1487—1567) $a \neq 1$ учурдагы $a^{\circ} = 1$ деген аныктаманы берген жана *көрсөткүч* деген атоону киргизген (бул *Exponent* деген немец тилинен которулган). Немец тилинде *potenzieren* — даражага көтөрүү дегенди билдирет. (Мындан дайыма пайдаланылуучу $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)}$ тибиндеги өтүүлөрдө колдонулуучу п о т е н ц и р л ө ө деген сөз келип чыгат.) Ушул эле учурда *exponenten* деген термин Д и о ф а н т тарабынан белгисиз чоңдуктун квадратын белгилеген грек сөзүн так эмес которуудан пайда болгон.

XII к. киргизилген *радикал* жана *тамыр* деген терминдер латынча *radix жак* жана *тамыр* деген эки маанилүү сөздөн чыккан. Грециялык математиктер «тамырдан чыгаруу» дегендин ордуна «берилген чоңдук (аянт) боюнча квадраттын жагын табуу» деп айтышкан. Тамырдын $\sqrt{\phantom{x}}$ деген символу биринчи жолу 1525-ж. пайда болгон. Горизонталдык сызыкчаны кошумчалаган азыркы символ Декарт тарабынан киргизилген. Ньютон тамырдын көрсөткүчтөрүн да пайдаланган:

$$\sqrt[3]{\phantom{x}},\ \sqrt[4]{\phantom{x}}.$$

*Логарифма* деген сөз гректин *λογоф* (сан) жана *αρίνμοφ* (катыш) деген сөзүнөн чыккан жана *сандардын катышы* дегендей которулат. Логарифманы ойлоп тапкан Дж. Непердин мындай терминди тандап алышы (1594-ж.) логарифма эки санды салыштыруудан пайда болгону менен түшүндүрүлөт, ал сандардын бирөө—



арифметикалык прогрессиянын мүчөсү, ал эми экинчиси — геометриялык прогрессиянын мүчөсү болуп эсептелет (төмөнкүнү кара). Негизи $e$ болгон логарифманы С п е й д е л (1619-ж.) киргизген, ал $\ln x$ функциясынын биринчи таблицасын түзгөн. Кийинчерээк пайда болгон натуралдык (табигый) деген ат бул логарифманын пайда болушу анын «табигыйлыгы» менен түшүндүрүлөт. Бул атты сунуш кылган Н. М е р к а т о р (1620—1687) $\ln x$ — бул $y = \frac{1}{x}$ гиперболасынын астындагы аянт экендигин байкаган. Ал *гиперболалык* деген атты да сунуш кылган.

**2. Логарифманын тарыхынан.** XVI к. ичинде ар кандай маселелерди чыгарууда жакындаштырып эсептөөлөргө байланышкан иштердин көлөмү кескин түрдө көбөйгөн, биринчи иретте түздөн-түз практикалык колдонууларга ээ болгон астрономиялык маселелерде (алсак, жылдыздарга жана Күнгө карап кемелердин абалын аныктоодо). Көбөйтүү жана бөлүү амалдарын аткарууда проблемалар жогорку чегине жеткенин түшүнүү кыйын эмес. Бул амалдарды кошууга алып келүү жолу менен аз болсо да жөнөкөйлөтүүгө умтулган аракеттер чоң ийгиликтерди алып келген жок (мисалы, 1ден 100 000ге чейинки бүтүн сандардын квадраттарынын таблицасы түзүлүп жана ал көбөйтүүнү $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$ формуласы боюнча эсептөөгө мүмкүндүк берет). Ошондуктан сандарды көбөйтүүнү жана бөлүүнү алардын логарифмаларын кошууга жана кемитүүгө алып келген ачылыш, Лапластын сөзү менен айтканда, эсептөөчүлөрдүн өмүрүн узарткан.

Логарифмалар укмуштуудай тездикте практикага кирип кетти. Логарифманы ойлоп тапкандар жаңы теорияны түзүү менен чектелип калышкан жок. Эсептөөчүлөрдүн эмгек өндүрүмдүүлүгүн кескин түрдө жогорулаткан практикалык каражат — логарифмалардын таблицалары — түзүлдү. Англиялык математик Д. Г а н т е р тарабынан чыгарылган биринчи таблицадан кийинки бар болгону 9 жылдан кийин, б.а. 1623-ж. биринчи логарифмалык сызгыч ойлонуп табылган жана ал көптөгөн муундар үчүн инструмент болуп калган. (Эң акыркы убакытка чейин, качан гана биздин көз алдыбызда электрондук эсептөөчү техниканын жайылтылышы менен логарифмалардын ролу эсептөөнүн куралы катары кескин төмөндөөдө.) Логарифмалардын биринчи таблицасы өз ара байланышы жок эле шотланддык математик Дж. Н е п е р (1550—1617) жана швейцариялык И. Б ю р г и (1552—1632) тарабынан түзүлгөн. «Логарифмалардын таң калтыруучу таблицасынын жазылышы» (1614-ж.) жана «Логарифмалардын таң калтыруучу таблицасынын түзүлүшү» (1619-ж.) деген китептеринде жарыяланган Непердин таблицасына 0дөн $90^{\circ}$ ка чейинки бурчтар үчүн синустардын, косинустардын жана тангенстердин логарифмаларынын маанилери 1 мүнөт менен кирген. Бюрги өзүнүн сандардын логарифмаларынын таблицасын, 1610-жылы чыгарууга даярдаган, бирок алар 1620-ж., Непердин таблицалары чыккандан кийин жарык көргөн, ошондуктан байкоосуз калган.

Логарифмаларды ойлоп табуунун негизиндеги чоң идеялардын бири көпчүлүккө мурда эле белгилүү. Ш т и ф е л ь (1487—1567) жана бир катар математиктер

$$\ldots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

геометриялык прогрессиясынын мүчөлөрүн көбөйтүү жана бөлүү алардын көрсөткүчтөрүнөн түзүлгөн

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрүн кошууга жана кемитүүгө туура келет.

Бирок жалгыз бул идеянын болушу жетишсиз. Мисалы, 2 санынын бүтүн даражаларынын «жыштыгы» такыр жетишсиз; көп сандар «логарифмасыз калышат», ошондуктан дагы бир идея зарыл эле: бирге өтө жакын сандарды даражага көтөрүү керек. $n$ дин чоң маанилеринде $(1+\frac{1}{10^n})^n$ жана $(1+\frac{1}{10^n})^{n+1}$ сандарынын даражалары жакын болорун эске алышып, Непер жана Бюрги окшош чечимге келишкен: Непер негиз кылып $(1-\frac{1}{10^7})$ санын, ал эми Бюрги — $(1+\frac{1}{10^4})$ санын алышкан.

Алардын андан аркы ой жүгүртүүлөрүн жана эсептөөлөрүнүн схемасын айтуу бир топ кыйынчылыкты туудурат, анткени, көптөгөн өзгөчө деталдар бар, жана деги эле XVI к. тексттер айкын эмес. Андан ары иш жүзүндө Непер $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$ негизине, ал эми Бюрги $(1+\frac{1}{10^4})^{10^4}$ негизине өткөнүн белгилей кетели. Бул иштин маңызын өзгөрткөн жок, бирок эсептөөлөрдү жана таблицанын өзүн бир топ жөнөкөйлөткөн (силерге белгилүү болгондой $\log_a 10^n x = \frac{1}{10^n}\log_a x$, ошондуктан көрсөтүлгөн өтүүлөр логарифмадагы үтүрлөрдү жылдырууга гана алып келет).

Мына ошентип, логарифмаларды ойлоп тапкычтардын экөөтең $(1+\frac{1}{M})^M$ түрүндөгү даражаларды кабыл алуу максатка ылайык деген жыйынтыкка келишкен, мында $M$ — өтө чоң сан. Буга окшогон сандарды кароо силерге белгилүү болгон $e$ санына алып келет, ал $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ катарында аныкталат (удаалаштыктын пре-



Непер Джон

1550—1617—
англис математиги. Логарифманы ойлоп табуучу көптөгөн муундардын эсептөө иштерин жеңилдетүүчү жана математиканын тармактарын өрчүтүүгө чоң таасир тийгизүүчү логарифмалардын биринчи таблицасын түзүүчү.

дели жөнүндөгү аныктама III главадагы «Тарыхтан маалыматтарда» берилген). Логарифманын негизги катары $e$ санын алуу идеясына жетүүгө аз гана калган (Бюргинин логарифмасынын негизи үч белгиге чейинки аныктыкта $e$ саны менен дал келет, Непердин логарифмасынын таблицасынын негизи $\frac{1}{e}$ санына жакын).

Ондук логарифмалардын таблицасы (1617-ж.) Непердин кеңеши боюнча англиялык математик Г. Б р и г г с (1561—1630) тарабынан түзүлгөн. Алардын көпчүлүгүн Бриггс ойлоп тапкан

$$\log_{10} a \approx \frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{m(\sqrt[m]{10}-1)}.$$

$m$ жана $n$ чоң учурда жогорку тактыкта берген жакындатып эсептөө формуласынын жардамы менен табылган. Бриггс $m$ жана $n$ дин маанилерин экинин даражалары катарында алган:мунун өзү ага $\sqrt[n]{a}$ жана $\sqrt[m]{10}$ сандарын эсептөөнү улам квадраттык тамырларды чыгарууга алып келүүгө мүмкүндүк берген.

Бриггстин дагы бир идеясы кээ бир сандардын ондук логарифмасын таблицанын жардамысыз, өз алдынча табууга мүмкүндүк берген. Бүтүн сандын логарифмасынын бүтүн бөлүгү сандын өзүнүн цифраларынын санынан бир цифрага кем. Ошондуктан, мисалы, үч белгиге чейинки аныктык менен lg2 ни табуу үчүн $2^{10^3}$ санын табуу жетиштүү. Бул кыйын деле эмес.

Логарифмалардын таблицасын түзүүдө Непер менен Бюрги тарабынан табылган $y = \log_a x$ үчүн $x_0$ чекитиндеги $\Delta x$ жана $\Delta y$ өсүндүлөрүнүн ортосундагы туюнтма чоң мааниге ээ болгон. Алардын жазуу системасынын деталдарына токтолбогондо, негизги жыйынтыкты мындайча көрсөтсө болот: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{k}{x}$ мында $k$ — ту рактуу сан. Эгерде логарифманын негизи — $(1+\frac{1}{n})^n$ даражасы болсо, анда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{1}{x}$, мында $n$ — жетишерлик сан.

$\Delta x$ ти нөлгө умтултуп, $y' = \frac{1}{x}$ дифференциалдык теңдемесине келебиз, анын чыгарылышы болуп, силерге белгилүү болгондой, $\ln x + C$ функциясы эсептелет. $\ln x_0$ду башталгандан эле $\int_1^{x_0} \frac{dx}{x}$ түрүндө аныктаган, б.а. $\ln x_0$ — гипербола, абсцисса огу жана $x^1 = x_0$; $x = 1$ түз сызыктары аркылуу чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты түрүндө аныктаган жазуунун системасы бар. Силерге белгилүү болгон логарифмалардын касиеттерин бул аныктамалардын негизинде чыгаруу жөнөкөй эмес, бирок силер аларды чыгара аласыңар.

### Кайталоого суроолор жана маселелер

1. 1) Сандын $n$-даражадагы тамыры жөнүндөгү аныктаманы бергиле. $n$-даражадагы арифметикалык тамыр деген эмне?
   2) Маанилерин тапкыла:
   а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; д) $(\sqrt[n]{x})^n$.
   3) Теңдемени чыгаргыла:
   а) $x^3 = 125$; б) $x^4 = 64$; в) $x^5 = -\frac{1}{243}$; г) $x^4 = -16$.
2. 1) Арифметикалык тамырдын негизги касиеттерин санагыла.
   2) Туюнтмаларды өзгөртүп түзгүлө:
   а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{4}$; б) $\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}$; в) $\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2$; г) $\sqrt{\frac{a^4 b^2}{c^8}}$.
   3) Кайсы сан чоң:
   а) $\sqrt[7]{128}$ же $\sqrt[5]{4}$; б) $2^{100}$ же $100^{20}$;
   в) $\sqrt[8]{26}$ же $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[5]{5}$ же $\sqrt[3]{3}$?
3. 1) Рационалдуу көрсөткүчтүү даражалардын аныктамасын бергиле жана мындай даражалардын негизги касиеттерин санагыла.
   2) Маанилерин тапкыла:
   а) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \cdot (2^{\frac{1}{10}})^6$; в) $16^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$.
   3) Сандардын кайсынысы чоң:





   а) $\sqrt[3]{16}$ бы же $2^{\frac{5}{4}}$ пи; б) $3^{-\frac{2}{3}}$ бы же $9^{-\frac{3}{4}}$ пү;
   в) $0,3^{\frac{4}{7}}$ пү же $0,3^{-\frac{4}{7}}$ пү; г) $5^{-\frac{2}{3}}$ би же $5^{-0,6}$ бы?
4. 1) Көрсөткүчтүү функциянын негизги касиеттерин санагыла.
   2) Функциянын графигин түзгүлө:
   а) $y = 4^x$; б) $y = (\frac{1}{4})^x$; в) $y = 6^x$; г) $y = (\frac{1}{6})^x$.
   3) Сандардын кайсынысы чоң:
   а) $2^{0,4}$ пү же $2\frac{\sqrt{2}}{3}$ би; б) $1,2^{-\sqrt{3}}$ пү же $1,2^{\sqrt{5}}$ пи;
   в) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ пи же $(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}$ пү; г) $0,3^{-\pi}$ би же $0,3^{-3}$ пү?
5. 1) а) $a^x = a^c (a > 0,\ a = 1)$ теңдемесинин тамырын тапкыла.
   б) $a^x > a^c$ барабарсыздыгын чыгаргыла (эки учурду карагыла: $0 < a < 1$ жана $a > 1$ ).
   2) Теңдемени чыгаргыла:
   а) $27^x = 9^{\frac{1}{5}}$; б) $9^{x+1} + 3^{x+2} = 18$;
   в) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$; г) $3^{x+2} - 3^x = 72$.
   3) Барабарсыздыкты чыгаргыла:
   а) $5^{x^2-1} > \frac{1}{5}$; б) $0,2^{x^2-2} > 5$; в) $3^x < \frac{1}{9}$; г) $(\frac{1}{2})^{x+1} > 4$.
6. 1) Сандын логарифмасынын аныктамасын бергиле.
   2) Тапкыла:
   а) $\log_2 16\sqrt{2}$; б) $\log_{0,2} 25$; в) $\lg 0,01$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$.
   3) Логарифмалык негизги теңдештикти жазгыла. Анын жардамы менен эсептегиле:
   а) $3^{2+\log_3 5}$; б) $(\frac{1}{2})^{1+\log_2 3}$; в) $5^{-1+\log_5 2}$; г) $0,2^{1+\log_{0,2} 5}$.
7. 1) Логарифмалардын негизги касиеттерин санагыла.
   2) Туюнтманы $a$ негизи боюнча логарифмалагыла ($c > 0$, $b > 0$);
   а) $a = 2$ болгондо $16 b^7 \sqrt[5]{c}$ нын; б) $a = 10$ болгондо $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100 b^n}}$ дин;
   в) $a = 3$ болгондо $\frac{27\sqrt{6}}{c^4}$ түн; г) $a = 0,7$ болгондо $\frac{0,49 b^3}{c^5 \sqrt{c}}$ нын.
   3) $x$ ти тапкыла, эгерде:
   а) $\log_3 x = 2\log_3 7 + \frac{2}{3}\log_3 27 - \frac{3}{2}\log_3 16$;
   б) $\log_2 x = 2\log_2 5 - \frac{1}{3}\log_2 8 + \log_2 0,2$;

в) $\log_5 x = \log_5 1{,}5 + \frac{1}{3}\log_5 8$;

г) $\lg x = 1 + 2\lg 3 - \frac{2}{3}\lg 125$ болсо.

**8.** 1) Логарифмалык функциянын аныктамасын бергиле жана анын негизги касиеттерин санагыла.

2) Функциянын графигин түзгүлө:

а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{5}} (x-1)$;

в) $y = \log_5 x$; г) $y = \log_{\frac{1}{4}} x + 1$.

3) Кайсы сан чоң:

а) lg 7би же 3 lg 2 би; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ пи же $\log_{\frac{1}{3}} 6$ бы;

в) $\log_3 5$ пи же $\log_3 6$ бы; г) $\log_2 3$ пү же $\log_3 2$ би?

**9.** 1) а) $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) теңдемесинин бардык тамырын көрсөткүлө.

б) $\log_a x > \log_a c$ барабарсыздыгын чыгаргыла (эки учурду карагыла: $0 < a < 1$, $a > 1$).

2) Теңдемени чыгаргыла:

а) $\log_2(x-15) = 4$; б) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$;

в) $\ln^2(x-2) = 4$; г) $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg 11$.

3) Барабарсыздыкты чыгаргыла:

а) $\log_{0,8} x > 2$; б) $\lg x \le -2$;

в) $\lg x \ge -3$; г) $\log_7 x < 1$.

**10.** 1) $y = e^x$, $y = a^x$ функциялары үчүн туундунун формуласын жазгыла.

2) Функциянын туундусун тапкыла:

а) $v(x) = 5 - 2e^{4-3x}$; б) $u(x) = 3 \cdot 5^{7x-1}$;

в) $g(x) = e^{-3x}$; г) $f(x) = (\frac{1}{3})^{2x}$.

3) Функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $v(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$; б) $u(x) = 5e^{0,7x}$;

в) $g(x) = e^{-3x}$; г) $f(x) = e^{2x}$.

**11.** 1) $y = \log_a x$ функциясы кандай туундуга ээ? $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясы үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла.

2) Функциянын туундусун тапкыла:

а) $y = x\ln 3x$; б) $y = \log_2(7-2x)$; в) $y = 2\log_3 x$; г) $y = \ln\frac{x}{5}$.





3) Функция үчүн баштапкы функциялардын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = \frac{1}{5x}$; б) $g(x) = \frac{1}{x-3}$; в) $u(x) = \frac{5}{x}$; г) $h(x) = \frac{2}{x+1}$.

**12.** 1) Даражалуу функция $y = x^a$ кандай туундуга ээ?

2) Функциянын графигин түзгүлө жана анын туундусун тапкыла:

а) $y = x^7$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^{-0,3}$; г) $y = x^{\sqrt{2}}$.

3)Жакындатылган маанилерин тапкыла:

а) $\sqrt[5]{32,02}$; б) $\sqrt[7]{127,9}$; в) $\sqrt[3]{64,3}$; г) $\sqrt[4]{80,6}$.

**13.** 1) Кандай теңдемелер иррационалдык деп аталат?

2) Теңдемени чыгаргыла:

а) $\sqrt{x-3} = 2x - 7$; б) $\sqrt[3]{2x+3} = 2$;

в) $x - \sqrt{x} = 12$; г) $x + 3 = \sqrt{33 + x^2}$.

3) Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3, \\ x - y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 6, \\ xy = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ x^2 y = 12. \end{cases}$

**14.** 1) Эки белгисизи бар эки теңдеменин системасынын чыгарылышы деп эмнени айтабыз?

2) Теңдемелер системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2^{6y-x} = \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x-y} = 0{,}2, \\ 5^{y-x} = 125; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2xy = 9, \\ 4^{x-2y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{3x+y} = \sqrt{3}, \\ 5x - 4y = 15. \end{cases}$

3) Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} x - y = 4, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x-2y} = 1, \\ \lg x + \lg(y+5) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3 (5x - y) = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ \log_5 x = 1 + \log_5 y. \end{cases}$

# КАЙТАЛООГО МИСАЛДАР

## § 1. АНЫК САНДАР

### 1. Рационалдык жана иррационалдык сандар

1. Төмөнкү айтылгандар туурабы:
а) эгерде натуралдык сан 6 га бөлүнсө, анда ал 3 кө бөлүнөт;
б) эгерде эки сандын суммасы жуп сан болсо, анда ар бир кошулуучу жуп;
в) эгерде эки сандын көбөйтүндүсү нөлгө барабар болсо, анда ар бир көбөйтүүчү нөлгө барабар;
г) эгерде сандын кубу 8 ге бөлүнсө, анда ал сан жуп?
2. Эгерде үч удаалаш сандын суммасы 3 кө бөлүнсө, анда алардын көбөйтүндүсү 6 га бөлүнөрүн далилдегиле.
3. 523 санынын оң жагына эки цифраны кошуп жазганда алынган беш цифрадан турган сан: а) 3 жана 5 ке; б) 8 жана 9 га бөлүнгөндөй болгон цифраларды жазгыла.
4. $10^{56} - 1$ саны 3 кө жана 11 ге бөлүнөрүн далилдегиле.
5. Эки цифралуу сандагы бирдиктин цифрасы ондуктун цифрасынан 2 ге көп. Сандын өзү 30 дан чоң жана 40 тан кичине. Бул санды тапкыла.
6. Эгерде $\frac{a}{b}$ бөлчөгү туура болсо, анда $\frac{ab}{a+b}$ бөлчөгү да туура болоорун далилдегиле.
7. Далилдегиле:

а) $|a| = |-a|$; б) $x \le |x|$; в) $|x|^2 = x^2$.

Туюнтманын маанилерин тапкыла (8—9).

8. а) $\dfrac{2,75:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot(-3\frac{1}{3})}$; б) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0,175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$;

в) $(1,4-3,5:1\frac{1}{4}):2,4+3,4:2\frac{1}{8}$; г) $\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}$.

9. а) $\dfrac{0,5^2-0,5}{0,4^2+0,1^2+2\cdot 0,4\cdot 0,1}$; б) $\dfrac{1,2^2-1,8^2}{1,2\cdot 0,2-1,2\cdot 0,8}$;

в) $\dfrac{0,6^2+0,1^2-2\cdot 0,6\cdot 0,1}{1,5-1,5^2}$; г) $(1\frac{3}{5})^2-(4\frac{5}{8}-2,4):\frac{5}{8}$.





10. Жазуудагы сандын жакындаштырылган маанилеринин туура цифраларын көрсөткүлө:

а) $3,82 \pm 0,1$; б) $1,980\cdot 10^4 \pm 0,001\cdot 10^4$;

в) $7,891 \pm 0,1$; г) $2,8\cdot 10^{-4} \pm 0,3\cdot 10^{-4}$.

11. $(1+x)^n \approx 1+nx$ формуласын пайдаланып, жакындаштырылган маанилерин тапкыла:
а) $1,002^5$; б) $0,997^4$; в) $2,004^3$; г) $3,01^5$.
12. Берилди: $a \approx 11,5$, $b \approx 3,8$. Төмөнкү туюнтмалардын жакындаштырылган маанилерин тапкыла: а) $a+b$; б) $3a-b$; в) $ab$; г) $\frac{a}{b}$.
13. Жөнөкөй бөлчөк түрүндө жазгыла:
а) 2,(3); б) 0,(66); в) 1,0(8); г) 1,(33).
14. Төмөнкү сандардын ар бири рационалдык эмес экендигин далилдегиле:

а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $\sqrt{5}+1$; г) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

15. $a$ жана $b$ сандарынын суммасы (көбөйтүндүсү) рационалдык (иррационалдык) сан болот деген туурабы, эгерде:
а) $a$ жана $b$ — рационалдык сандар;
б) $a$ жана $b$ — иррационалдык сандар;
в) $a$ — рационалдык, ал эми $b$ — иррационалдык сандар болушса?
16. 0,01 тактыкта:

а) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$; б) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$; в) $\sqrt{3}+\frac{5}{6}$; г) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$.

17. Сандарды өсүү тартибинде жайгаштыргыла. Алардын кайсынысы рационалдык, ал эми кайсынысы — иррационалдык сандар экендигин көрсөткүлө:

а) $\sqrt{3}$; $-2$; $-1,7$; $\frac{\pi}{3}$; б) $\log_2 3$; $-1$; $\frac{5}{6}$; $-\sqrt{5}$;

в) $0,(2)$; $\frac{7}{6}$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $e$; $-1,(6)$; $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

Сандарды салыштыргыла (18—19).

18. а) $\dfrac{4}{\lg\frac{1}{2}}$ жана $\dfrac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; б) $(\sqrt{5}+2)$ жана $\sqrt{17}$;

в) $\log_3 7$ жана $\log_7 3$; г) $(\sqrt{7}+3)$ жана $\sqrt{31}$.

19. а) $15^{\log_3 10}$ жана $10^{\log_3 15}$; б) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ жана $(\sqrt{30}-\sqrt{3})$;

в) $\sin 2,1$ жана $\sin 7,98$; г) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})$ жана $(\sqrt{3}+\sqrt{10})$.

**20.** Рационалдык сандар экендигин далилдегиле:

а) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$;  б) $(\sqrt{2}+1)^2 + (1-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)$;

в) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-5} - \sqrt{35}$;  г) $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{50}) : \sqrt{2}$.

## 2. Проценттер. Пропорциялар

**21.** Эгерде а) $x$ санынын 320 нын 2,5% ин түзсө; б) $x$ санынын 2,5% и 75 болсо; в) 84 түн $x$% и 2,8 болсо; г) $x$ саны 35 тин 140% ин түзсө, $x$ санын тапкыла.

**22.** Ишканада 1987-жылы продукция 4% ке, андан кийинки жылы 8% ке өскөн. Продукциянын эки жылдык орточо өсүшүн тапкыла.

**23.** Берилген төрт сандын үчөө 5, 3, 20 сандарына пропорционалдуу, ал эми төртүнчүсү үчүнчүсүнүн 15% ин түзөт. Эгерде экинчи сан калгандарынын суммасынан 375 ке кем болсо, анда ал сандарды тапкыла.

**24.** Күз, кыш мезгилдеринде жашылчанын баасы 25% ке жогорулады. Жашылча жайында өз баасында болсун үчүн жазында анын баасын канча процентке төмөндөтүү керек?

**25.** Пропорциянын белгисиз мүчөсүн тапкыла:

а) $12 : \dfrac{1}{8} = x : \dfrac{5}{36}$;  б) $x : (-0{,}3) = 0{,}15 : 1{,}5$;

в) $\dfrac{0{,}13}{x} = \dfrac{26}{3\frac{1}{3}}$;  г) $\dfrac{x}{2{,}5} = \dfrac{-6{,}2}{15}$.

**26.** Теңдемени чыгаргыла:

а) $\dfrac{x-2}{2{,}5} = \dfrac{6}{x}$;  б) $\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{4{,}8}{1{,}2}$;

в) $\dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{6{,}5}{1{,}5}$;  г) $\dfrac{4-x}{1{,}2} = \dfrac{5}{x+3}$.

**27.** $ABC$ үч бурчтугунун $AB$ жагындагы $E$ чекитинен $AC$ жагына параллель кылып түз сызык жүргүзүлгөн. Тапкыла:
а) эгерде $AB = 22{,}5$ см, $AE = 18$ см, $BC = 15$ см болсо, анда түз сызыктын $BC$ жагын кандай кесиндилерге бөлөрүн;
б) эгерде $AB = 7{,}5$ см, $AE = 5$ см, ал эми $ABC$ үч бурчтугунун аянты 72 см² болсо, анда $ABC$ үч бурчтугу бөлүнгөн фигуралардын аянтын.





## 3. Прогрессиялар

**28.** Эгерде арифметикалык прогрессиянын биринчи мүчөсү 2 жана жетинчи мүчөсү 20 болсо, анда анын 20 мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

**29.** 4 жана 40 сандарынын ичинен арифметикалык прогрессияны түзгөндөй кылып, төрт санды тапкыла.

**30.** $\dfrac{1}{\log_3 2}$, $\dfrac{1}{\log_6 2}$, $\dfrac{1}{\log_{12} 2}$ сандары арифметикалык прогрессиянын удаалаш үч мүчөсүн түзөөрүн далилдегиле.

**31.** Арифметикалык прогрессиянын биринчи жана бешинчи мүчөлөрүнүн суммасы 26, ал эми анын экинчи жана төртүнчү мүчөлөрүнүн көбөйтүндүсү — 160. Прогрессиянын алгачкы алты мүчөсүнүн суммасын тапкыла.

**32.** Эгерде $a$, $b$, $c$, $d$ сандары ушундай тартипте геометриялык прогрессияны түзүшсө, анда бул туюнтманы жөнөкөйлөткүлө: $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2$.

**33.** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$ жана $\dfrac{1}{2}$ сандары геометриялык прогрессияны түзүшөрүн далилдегиле.

**34.** Геометриялык прогрессиянын төртүнчү мүчөсү экинчи мүчөсүнөн 24 кө көп, ал эми экинчи жана үчүнчүнүн суммасы 6 га барабар. Прогрессиянын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

**35.** Эгерде геометриялык прогрессиянын биринчи, экинчи жана акыркы мүчөлөрү 3, 12 жана 3072 болсо, анда анын мүчөлөрүнүн санын тапкыла.

**36.** Геометриялык прогрессиянын бөлүмү 1/3, төртүнчү мүчөсү 1/54 ге барабар, ал эми бардык мүчөлөрүнүн суммасы 121/162 ге барабар. Бул прогрессиянын канча мүчөсү бар?

**37.** Биринчи үчөө геометриялык прогрессияны, ал эми акыркы үчөө арифметикалык прогрессияны түзүп, четки сандардын суммасы 14, ал эми ортоңкуларынын суммасы 12 болгон төрт санды тапкыла.

**38.** Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ экендигин билип, анын бөлүмүн жана суммасын тапкыла.

**39.** Чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын алгачкы үч мүчөсүнүн суммасы 10,5 ке жана прогрессиянын суммасы 12 ге барабар. Анын биринчи мүчөсүн жана бөлүмүн тапкыла.

**40.** Үч сан негизи $a$ нын ($a > 0$, $a \neq 1$) даражалары болуп геометриялык прогрессияны түзүшөт. Ал сандардын логарифмалары арифметикалык прогрессияны түзүшөрүн далилдегиле.

## § 2. ТЕҢДЕШ ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮ

### 4. Алгебралык туюнтмаларды өзгөртүп түзүү

**41.** Көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла:

а) $a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab$;  б) $x^3 + (y-1)x + y$;

в) $a^6 - 8$;  г) $x^4 - x^2(y^2+1) + y^2$.

**42.** Далилдегиле:

а) $n \in N$ үчүн $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ көп мүчөсү 24 кө бөлүнөөрүн;

б) $n \in N$ үчүн $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)$ көп мүчөсү 24кө бөлүнөөрүн;

в) $n \in N$ үчүн $n^3 - n$ көп мүчөсү 6 га бөлүнөөрүн;

г) $n \in N$ үчүн $n$ — жуп, $n^3 - 4n$ көп мүчөсү 48 ге бөлүнөөрүн.

**43.** Бөлчөктү кыскарткыла:

а) $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$;  б) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$;

в) $\dfrac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$;  г) $\dfrac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}$.

Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө (44, 45).

**44.** а) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

б) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\dfrac{2b}{a+b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x}{4-x}+\dfrac{x+8}{x+2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{c^2+3c+2}+\dfrac{2c}{c^2+4c+3}+\dfrac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\dfrac{(c-3)^2+12c}{2}$.

**45.** а) $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{4y^2}{4x^2-y^2}$;

б) $\left(\dfrac{3}{a-3}+\dfrac{4}{a^2-5a+6}+\dfrac{2a}{a-2}\right):\left(\dfrac{3}{2a+1}\right)^{-1}-\dfrac{a-12}{3(3-a)}$;

в) $\left(\dfrac{x^3-8}{x-2}+2x\right)\cdot(4-x^2)^{-1}-\dfrac{x-1}{2-x}$;

г) $\dfrac{k^2}{3+k}\cdot\dfrac{9-k^2}{k^2-3k}+\dfrac{27+k^3}{3-k}:\left(3+\dfrac{k^2}{3-k}\right)$.





### 5. Радикалдарды жана бөлчөктүү көрсөткүчтүү даражаларды камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүү

**46.** Бөлүмдөгү иррационалдуулукту жойгула:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;  б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;  в) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$;  г) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

**47.** Эсептегиле:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1$;

б) $\dfrac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

в) $(\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{((1-\sqrt{2})^3)^2}+0{,}75$;

г) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})$.

Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (48—51).

**48.** а) $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{c}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\dfrac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

**49.** а) $\left(\sqrt{k}-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)-1-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

б) $\left(\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+1\right)$;

г) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}$.

**50.** а) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

б) $(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}):\dfrac{(a\,b)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

в) $(\dfrac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x})^{-1}\cdot(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}})$;

г) $(\dfrac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^{2}}+\dfrac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}})(1+\dfrac{2}{c^{2}})^{-2}$.

**51.** а) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$;

б) $(\dfrac{2\,(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y):\dfrac{y-x}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\dfrac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$;

г) $\dfrac{3(a\,b)^{\frac{1}{2}}-3\,b}{a-b}+\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^{3}+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

## 6. Тригонометриялык туюнтмаларды өзгөртүп түзүү

Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө (52, 53).

**52.** а) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

б) $\sqrt{\sin^2\beta\,(1-\mathrm{ctg}\,\beta)+\cos^2\beta(1+\mathrm{tg}\,\beta)}$;

в) $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-3\cos\alpha)^2$;

г) $\dfrac{\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin^2\beta}-\mathrm{ctg}\,\beta\cos\beta$.

**53.** а) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,(\alpha-\pi)+\mathrm{ctg}(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)$;

б) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha}-\dfrac{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\mathrm{ctg}\,\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\,(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$;



в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\,\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\sin\,(\frac{\pi}{2}-\beta)\,\mathrm{ctg}\,(\frac{\pi}{2}+\alpha)\;\;\mathrm{tg}\,(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}$;

г) $\dfrac{\mathrm{tg}\,(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{\mathrm{ctg}\,(\pi-\alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Теңдештиктерди далилдегиле (54, 55).

**54.** а) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha\;\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)}=\mathrm{tg}\,\beta$; б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$;

в) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\mathrm{ctg}\,\alpha$; г) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=-\mathrm{ctg}\,2\alpha$.

**55.** а) $\pi<\alpha<2\pi$ болгондо $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\dfrac{\alpha}{4}$ түн;

б) $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ болгондо $\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})$ нин;

в) $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болгондо $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$ нин;

г) $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ болгондо $\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})$ түн.

**56.** Барабардыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$;

б) $\mathrm{tg}\,20^\circ-4\sin 20^\circ\sin 50^\circ=-2\sin 20^\circ$;

в) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=2$;

г) $\cos 20^\circ+2\sin^2 55^\circ-\sqrt{2}\sin 65^\circ=1$.

**57.** Барабарсыздыктын тууралыгын далилдегиле:

а) эгерде $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ болсо, анда $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x\geq 2$ нин;

б) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4})\sin(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4})}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\leq 2\sqrt{3}$;

в) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)(\sin\varphi+$

$+\cos\varphi-1)\le 1;$

г) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha\ge -1.$

Эсептегиле (58, 59).

**58.** а) Эгерде $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$ болсо, $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$ нын;

б) эгерде $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=m$ болсо, $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$ нын;

в) эгерде $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ болсо, $\cos\alpha$ нын;

г) эгерде $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{2},\ \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos\dfrac{\alpha}{2}$ нин.

**59.** а) $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ.$

б) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ.$

**60.** Сандарды нөл менен салыштыргыла:

а) $\lg\sin 32^\circ\cdot\lg\cos 7^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}40^\circ\cdot\lg\operatorname{ctg}20^\circ;$

б) $\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}4^\circ+\lg\operatorname{ctg}2^\circ+\lg\operatorname{ctg}4^\circ.$

**61.** Эгерде $\cos x=\dfrac{a}{b+c},\ \cos y=\dfrac{b}{c+a},\ \cos z=\dfrac{c}{a+b},\ a+b+c\ne 0$ болсо, анда төмөнкү сумманы тапкыла:

$\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}.$

### 7. Даражаны жана логарифманы камтыган туюнтмаларды өзгөртүп түзүү

Сандарды салыштыргыла (62, 63).

**62.** а) $3^{400}$ жана $4^{300}$; б) $-\log_5\dfrac{1}{5}$ жана $7^{\log_3 1}$.

в) $5^{200}$ жана $2^{500}$; г) $\log_4\sqrt{2}$ жана $\log_3\dfrac{1}{81}$.

**63.** а) $\log_3 2+\log_3 7$ жана $\log_3(2+7)$;

б) $\log_4 5-\log_4 3$ жана $\log_4(5-3)$;

в) $3\log_7 2$ жана $\log_7(3-2)$;

г) $\log_3 1{,}5+\log_3 2$ жана $\log_3 1{,}5^2$. жана $\log_3 1{,}5^2$.



**64.** Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}$; б) $2^{4\log_4 a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}a}-a$;

**65.** Санды ондук бөлчөк түрүндө жазгыла:

а) $49^{1-\log_7 2}+5$; б) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}+2^{-\log_2 10}$.

**66.** Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$; б) $2\log_{0,3}3-2\log_{0,3}10$;

в) $\dfrac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}$; г) $(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)$.

**67.** Туюнтмаларды негизи $a$ боюнча логарифмалагыла:

а) $a=5$ болгондо $25b^3\sqrt[4]{c^7}$ нин;

б) $a=0{,}2,\ b>0,\ c>0$ болгондо $\dfrac{0{,}0016\,b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$ түн.

**68.** Эгерде:

а) $\log_4 x=2\log_4 10+\dfrac{3}{4}\log_4 81-\dfrac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}x=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}16-\log_{\frac{1}{3}}8+\log_{\frac{1}{3}}28$ болсо $x$ ти тапкыла.

**69.** Таблицанын жардамы менен эсептегиле:

а) $\dfrac{7{,}832\cdot\sqrt[4]{12{,}98}}{5{,}256^2}$; б) $\dfrac{102{,}3^2}{\sqrt[3]{92{,}14\cdot 6{,}341}}$.

**70.** Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө жана анын жакындаштырылган маанилерин тапкыла.

$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\ldots\cdot\log_{10}9.$

**71.** Берилди: $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A.$

Сумманы тапкыла: $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2).$

## § 3. ФУНКЦИЯЛАР

### 8. Рационалдык функциялар

**72.** Тең капталдуу трапециянын бир негизи каптал жагына барабар, анын каптал жагы менен түзгөн бурчу $30^\circ$. Формула менен жазгыла:

а) трапециянын аянтын анын каптал жагынан функция катары;

б) трапециянын периметрин анын бийиктигинен функция катары.

**73.** Туура үч бурчтуу призманын каптал кыры анын негизинин жагына барабар. Формула менен жазгыла:

а) призманын көлөмүн анын негизинин жагынан функция катары;

б) призманын каптал бетин анын көлөмүнөн функция катары.

**74.** Түз сызык боюнча кыймылда болгон нерсе гармоникалык термелүү жасайт. Формула менен жазгыла:

а) нерсенин координатасын убакыттан функция катары;

б) нерсенин ылдамдыгын убакыттан функция катары.

**75.** 150-сүрөттө *A* жана *B* пункттарынан бир убакытта бири бирине карама-каршы чыккан эки туристтин кыймылынын графиги сызылган.

а) *A* жана *B* пункттарына туристтер канча убакытта келишкен?

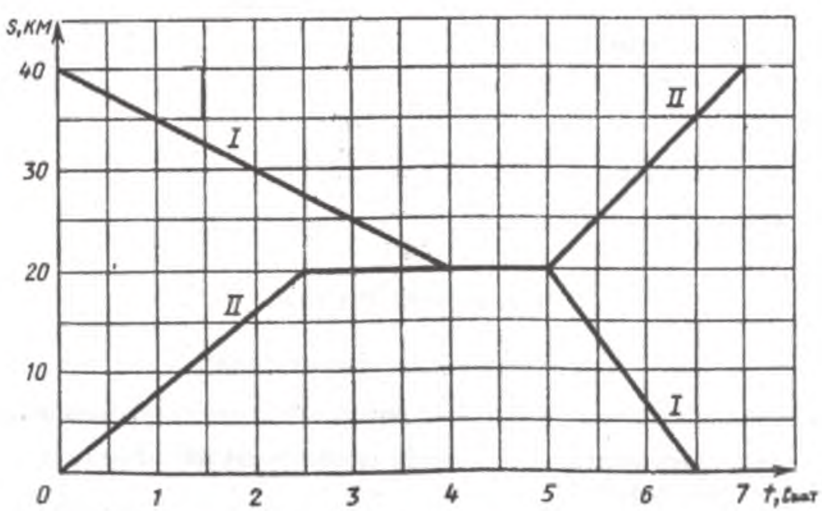
б) Алардын ар бири жолдо канча убакыт болушкан?

в) Ар бир турист аялдамага канча убакытта келишкен?

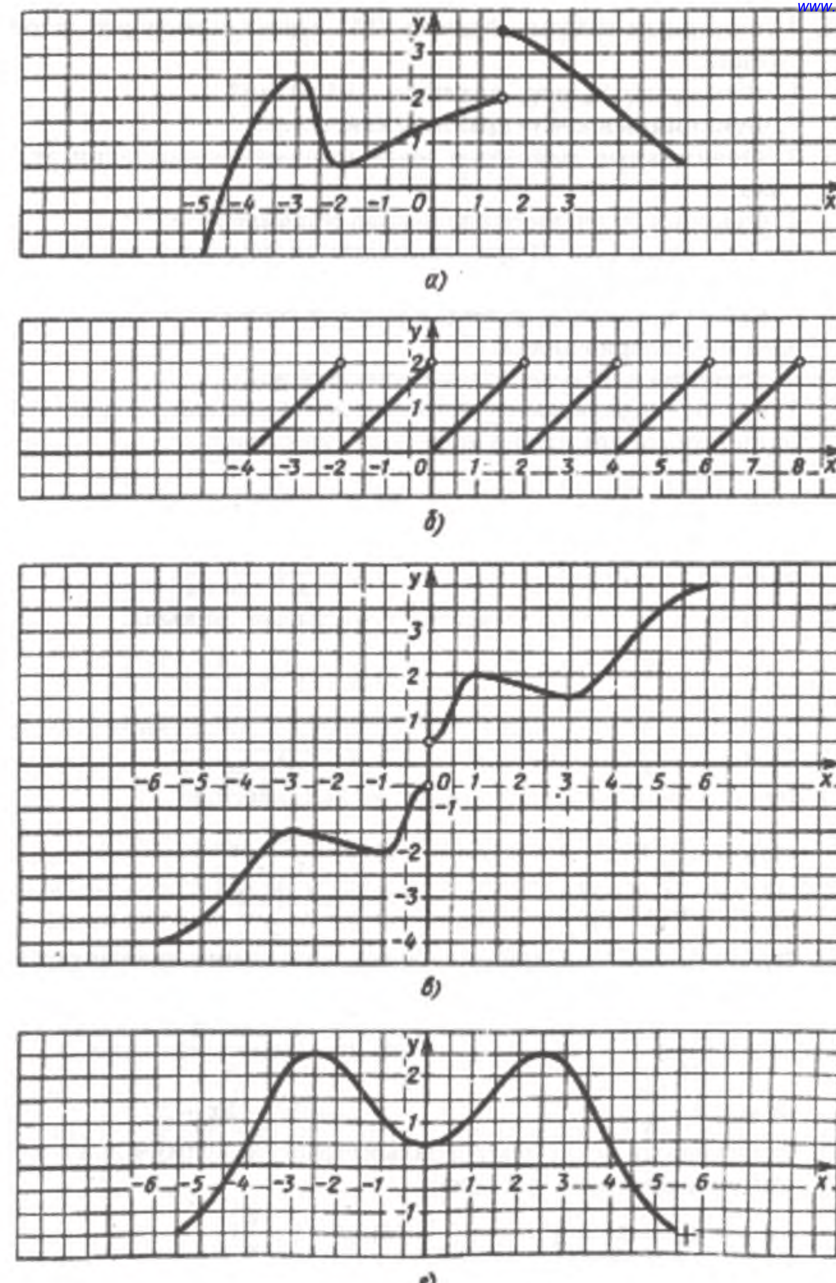
г) Алардын ар бири канча убакыт эс алышкан?

д) Ар бир турист аялдамага чейин жана андан кийин кандай ылдамдык менен жүрүшкөн?

е) Ар бир туристтин орточо ылдамдыгы кандай болгон?




150-сүрөт




151-сүрөт

**76.** Функциянын графиги боюнча (151-сүрөт) суроолорго жооп бергиле:

1. Функциянын өсүү аралыгы кайсылар?
2. Функциянын кемүү аралыгы кайсылар?
3. Функциянын максимум жана минимум чекиттерин атагыла.
4. Функция бул чекиттерде кандай маанилерге ээ?

Функциянын $[-2; 2]$ аралыгындагы эң чоң жана эң кичине маанилери кайсылар?

5. Кайсы чекиттерде функция үзгүлтүктүү жана бул чекиттердеги маанилери кандай?
6. Функция кайсы чекиттерде үзгүлтүксүз?
7. Бул функциялардын кайсынысы жуп жана кайсынысы так?

**77.** Функциянын аныкталуу областын тапкыла:

а) $y = \dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x^4-1}$;

в) $y = \dfrac{x^2-1}{x^4-9x^2+20}$; г) $y = \dfrac{x}{3x^2-5x+4}$.

**78.** Функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн аралыгын тапкыла:

а) $y = \dfrac{x-4}{x^3-x}$; б) $y = x^2 + \dfrac{4}{x-1}$;

в) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$; г) $y = \dfrac{1}{3x^3-2x^2+5}$.

**79.** Функциянын жуп (так) экендигин далилдегиле:

а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = \dfrac{5x^3}{1-x^2}$;

в) $y = x^4(x^2+2)$; г) $y = \dfrac{|x|+2}{x^2}$.

**80.** Функциянын белгисинин туруктуу болгондогу аралыктарын тапкыла:

а) $y = \dfrac{x-1}{3x}$; б) $y = \dfrac{x^2-4x-5}{9-x^2}$;

в) $y = 1 - \dfrac{2x-3}{5-x}$; г) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

**81.** Функциянын өсүү (кемүү) аралыктарын, максимум жана минимум чекиттерин тапкыла:

а) $y = 4x^2 + 3x - 1$; б) $y = 1 - \dfrac{2}{x}$;

в) $y = (x-1)^4 - 2$; г) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Функцияны изилдегиле жана анын графигин түзгүлө (82; 83):



**82.** а) $y = 3x - 5$; б) $y = 2x^2 - 7x + 3$;

в) $y = 2 - \dfrac{1}{4}x$; г) $y = 12 - 4x - x^2$.

**83.** а) $y = 2 - \dfrac{3}{x+1}$; б) $y = (x-2)^3 - 1$;

в) $y = \dfrac{x^4+1}{x^4}$; г) $y = 4 - (x+2)^4$.

Ар бир функциянын графигин түзгүлө (84—86).

**84.** а) $y = 3x - 2$; б) $y = x^2 - 4x - 5$; в) $y = \dfrac{1}{x} - 1$; г) $y = x^3 + 2$.

**85.** а) $y = 3x + |x|$; б) $y = |-x^2 - x + 2|$;

в) $y = 2x - |x-3|$; г) $y = x^2 - 4|x| + 3$.

**86.** а) $y = \dfrac{x+1}{|x|}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2} + 2$;

в) $y = \dfrac{|x|-2}{x}$; г) $y = \dfrac{2x^3-1}{x^3}$.

**87.** Функциялардын графиктеринин жалпы чекиттери барбы:

а) $y = x^2$ жана $y = x + 6$; б) $y = \dfrac{3}{x}$ жана $y = 4(x+1)$;

в) $y = x^4$ жана $y = 2x^2 + 1$; г) $y = \dfrac{1}{x^2}$ жана $y = x^2 - 2$?

**88.** Берилген $I$ аралыгында теңдеменин тамыры бар экендигин далилдегиле:

а) $x^3 - 6x + 2 = 0$, $I = [0; 1]$; б) $x^4 - 3x^2 + \dfrac{2}{9} = 0$, $I = [1; 2]$;

в) $x^5 + 3x = 5$, $I = [1; 2]$; г) $4 + 2x^3 - x^5 = 0$, $I = [-1; 2]$.

График жолу менен теңдемени (барабарсыздыкты) чыгаргыла (89, 90)

**89.** а) $4 - 3x \le x + 2$; б) $x^2 - 2x = -x$;

в) $\dfrac{1}{x} = 4x$; г) $x^2 + 2x + 2 \ge x + 1$.

**90.** а) $x^3 = \dfrac{8}{x-1}$; б) $|1-x| = 2 - |x|$;

в) $x^3 = \dfrac{1}{x}$; г) $|x-1| = 3 - |x|$.

**91.** $y = ax + b$ функциясынын графиги $A$ (2; 1) в (5; 10) чекиттери аркылуу өтөт. $a$ жана $b$ ны тапкыла.

**92.** Квадраттык функциянын графиги боюнча (152-сүрөт) $a, b, c$ коэффициенттерин жана $D$ дискриминантын тапкыла.

**93.** Сызыктуу жана квадраттык функциялар: а) жуп; б) так; в) мезгилдүү боло алышабы?

**94.** Функцияны жуп жана так функциялардын суммасы катарында жазгыла:

а) $y = \dfrac{x+1}{|x|}$; б) $y = x^3 - x|x| + 3$;

в) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1}$; г) $y = 2x^5 + x^4 - 3x + 8$.

**95.** Функция жуп же так боло алабы:

а) $y = 5x^6 - 2x^2 - 3$; б) $y = 4x^5 - 2x^3 + x$;

в) $y = \dfrac{3}{x^2} + 1$; г) $y = -\dfrac{2}{x^3}$?

## 9. Тригонометриялык функциялар

Ар бир функциянын аныкталуу областын тапкыла (96, 97).

**96.** а) $y = \dfrac{2}{\cos^2 x}$; б) $y = \dfrac{1}{1 + 2\sin 2x}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x - \dfrac{3}{2}}$; г) $y = \dfrac{x}{\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$.

**97.** а) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$; б) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x$;

в) $y = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$.

Ар бир функциянын маанилеринин областын тапкыла (98, 99).

**98.** а) $y = 1 - 3\sin\dfrac{x}{2}$; б) $y = 2\cos x\ \mathrm{tg}\,x$;

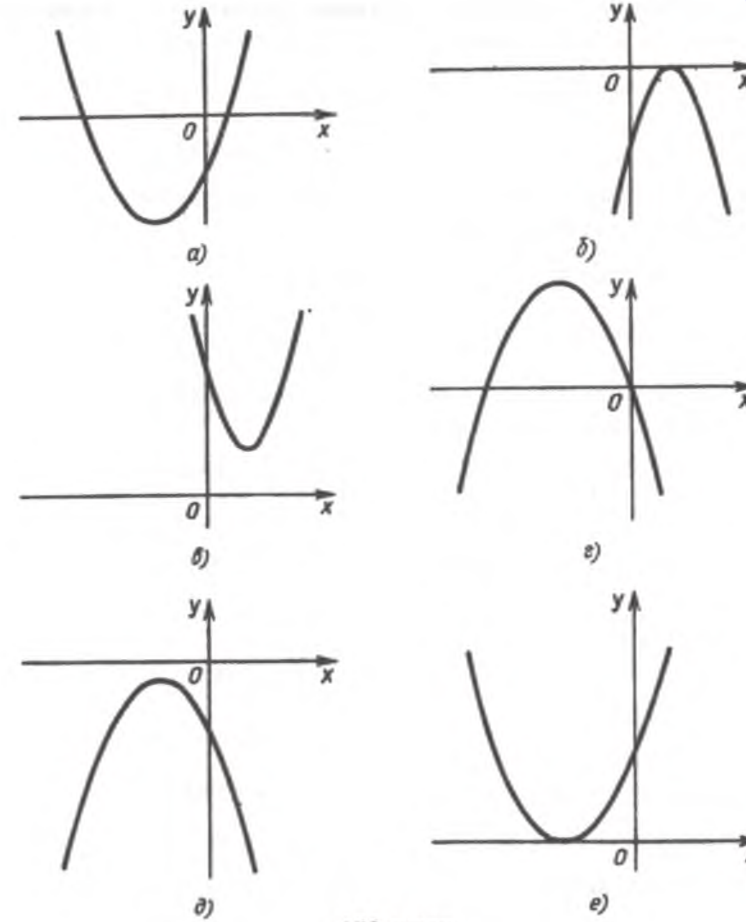
в) $y = 2 + 3\cos 5x$; г) $y = 2|\sin x| - 1$.

**99.** а) $y = \dfrac{1}{1 + \sin 2x}$; б) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$;

в) $y = \dfrac{3}{\cos x - 1}$; г) $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x$.








152-сүрөт

**100.** Функциянын белгилери турактуу болгондогу аралыктарды тапкыла:

а) $y = 3\cos(x + \frac{\pi}{4})$; б) $y = 1 - \mathrm{tg}\,3x$;

в) $y = 1 - \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}$; г) $y = 1 + 2\cos 2x$.

**101.** Берилген функциялардын кайсынысы жуп, кайсынысы — так:

а) $y = \mathrm{tg}\,3x - \mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{\sin x \cos^2 x}{x}$;

в) $y = \sin\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1}$; г) $y = \dfrac{\sin x}{x} - \cos x$?

**102.** Берилген функциялардын ичинен мезгилдүүсүн көрсөткүлө жана алардын эң кичине оң мезгилдерин көрсөткүлө:

а) $y = 1 - \sin 5x$; б) $y = x\sin^2 x - x\cos^2 x$;

в) $y = 3\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$; г) $y = (\sin x + \cos x)^2$.

**103.** Функциянын өсүү (кемүү) аралыгын, максимум чекиттерин, минимум чекиттерин тапкыла:

а) $y = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{6})$; б) $y = \frac{2}{1 - \cos x}$;

в) $y = 0{,}5\cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$; г) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

**104.** Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла (эгерде алар бар болсо);

а) $y = \cos 2x + \sin^2 x$; б) $y = 1 - 4\sin 3x$;

в) $y = \sin x - \cos x$; г) $y = 1 + |\mathrm{tg}\, x|$.

**Функциялардын графиктерин түзгүлө (105, 106).**

**105.** а) $y = 2\sin^2 \frac{x}{2}$; б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

в) $y = 1 + 2\cos 2x$; г) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) - 2$;

**106.** а) $y = \frac{|x|\sin x}{x}$; б) $y = (\sin x - \cos x)^2$;

в) $y = \cos x + |\cos x|$; г) $y = \sin x\,\mathrm{ctg}\, x$.

**107.** Функцияны изилдегиле жана анын графигин түзгүлө:

а) $y = \frac{1}{2} + \sin(x - \frac{\pi}{6})$; б) $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$;

в) $y = 1 + \frac{1}{2} - \cos(\frac{\pi}{6} - x)$; г) $y = 1 - \mathrm{tg}\, 2x$.

**108.** $\sin\frac{x}{10} = x^3$ теңдемесинин тамыры $x_0$ экендиги белгилүү. Мындан $(-x_0)$ саны да ал теңдеменин тамыры деген туурабы?

**109.** Сандарды салыштыргыла:

а) $\sin(\pi + \frac{1}{\pi})$ жана $\cos(\pi + \frac{1}{\pi})$; б) $\mathrm{tg}\,\pi^2$ жана $\mathrm{ctg}\,\pi^2$;

в) $\mathrm{tg}\,2$ жана $\mathrm{ctg}\,2$; г) $\sin 1$ жана $\cos 1$.

**110.** Далилдегиле: а) эгерде $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсо, $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ дин;

б) $\cos(\sin\alpha) > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.



**111.** График жолу менен теңдемени чыгаргыла:

а) $\sin x = -x$; б) $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{2}\cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\, x = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; г) $\cos x = 1 - x^2$.

## 10. Даражалуу, көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялар

Ар бир функциянын аныкталуу областын тапкыла (112—114).

**112.** а) $y = \sqrt{16x - x^3}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + 8}}$;

в) $y = \sqrt[6]{5 - x - \frac{4}{x}}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$.

**113.** а) $y = \sqrt{x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1}}$; б) $y = \sqrt[3]{2^{\sin x} - 1}$;

в) $y = \log_3(4 - 3x + x^2)$; г) $y = \log_2 \sin x$.

**114.** а) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\log(x + 10)^2}$; б) $y = \sqrt{\log_5 \cos x}$;

в) $y = \frac{\ln(3x - 2)}{x^2 - x - 2}$; г) $y = \sqrt[4]{\lg(3x^2 - 2x)}$.

Ар бир функциянын маанилеринин областын тапкыла (115, 116).

**115.** а) $y = 2\sqrt{x + 1}$; б) $y = 5^{2-x} - 1$;

в) $y = 2\lg x + 1$; г) $y = 3x^{-2}$.

**116** а) $y = 2^{\cos x}$; б) $y = 2 - \sqrt[4]{x}$;

в) $y = 1 + |\log_2 x|$; г) $y = 1 + |\sqrt[3]{x}|$.

Ар бир функциянын белгилери турактуу болгондогу аралыктарды тапкыла (117,118).

**117.** а) $y = (\frac{1}{2})^x - 4$; б) $y = \log_4(x + 3)$;

в) $y = 2 - 3^3$; г) $y = \sqrt{x} - 4$.

**118.** а) $y = 4^{x+2} - 4^x$; б) $y = \lg(x - 2) - 1$;

в) $y = \sqrt{x} + 3$; г) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$.

Берилген функциялардын ичинен жуптарын жана тактарын тапкыла (119, 120).

**119.** а) $y = 5^x + 5^{-x}$;  б) $y = \lg(1 - x^2)$;

в) $y = (\frac{1}{2})^{2x}$;  г) $y = x\sqrt[3]{x}$.

**120.** а) $y = x^{\frac{2}{3}}$;  б) $y = 3^x - 3^{-x}$;

в) $y = 2^{\cos x}$;  г) $y = \sqrt[5]{x^4} + 1$.

**121.** Функцияны изилдегиле жана анын графигин түзгүлө:

а) $y = 2\sqrt{x} - 1$;  б) $y = 4^{x-1} - 2$;

в) $y = \frac{1}{2}\log_2(x + 1)$;  г) $y = \sqrt[3]{x - 2} + 1$.

Функциялардын графиктерин түзгүлө (122, 123).

**122.** а) $y = \sqrt{x - 2} + 1$;  б) $y = (\frac{1}{3})^{x-1}$;

в) $y = 2 - \sqrt[3]{x + 1}$;  г) $y = 1 + \log_2(x + 2)$.

**123.** а) $y = 5^{\log_5(x-1)}$;  б) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| - 1$;

в) $y = 2^{|x|}$;  г) $y = \log_2 x^2$.

**124.** Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла (эгерде алар бар болсо):

а) $y = \sqrt{36 - x^2}$;  б) $y = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & \text{мында } 0 \le x \le 7, \\ x^3 + 1, & \text{мында } -2 \le x \le 0; \end{cases}$

в) $y = 3^{\sin x}$;  г) $y = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{мында } -1 \le x < 1, \\ \log_2 x, & \text{мында } 1 \le x \le 8. \end{cases}$

**125.** График жолу менен теңдемени чыгаргыла:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x = x - 3$;  б) $\sqrt{x - 2} = \frac{3}{x}$;

в) $\log_2 x = 2^{5-x}$;  г) $2^{|x|} = 11 - |x|$.

**126.** Барабарсыздыкты график жолу менен чыгаргыла:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x > x - 3$;  б) $\sqrt{x - 2} \le \frac{3}{x}$;

в) $2^{-|x|} \ge x^2 + 1$;  г) $\log_{\frac{1}{2}} x > 2x - 7$.





**127.** $y = (\log_2 3)^{\sin x}$ жана $y = (\log_3 3)^{\cos x}$ функцияларынын эң чоң маанилери барабар экендигин далилдегиле.

**128.** Эгерде:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x + 1}} - \sqrt{1 - x^2}$, $f(x_0) = 0$;

б) $f(x) = \lg(x + 15) + \lg x$, $f(x_0) = 2$

болсо, аргументтин $x_0$ маанисин тапкыла.

**129.** Далилдегиле:

а) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+1}$ функциясы $\boldsymbol{R}$ де кемий тургандыгын;

б) $f(x) = \log_2 3x$ функциясы $(0; \infty)$ де өсөөрүн.

## § 4. ТЕҢДЕМЕЛЕР, БАРАБАРСЫЗДЫКТАР, ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАНА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫН СИСТЕМАЛАРЫ

### 11. Рационалдык теңдемелер жана барабарсыздыктар

Теңдемелерди чыгаргыла (130, 131).

**130.** а) $3(x - 2) - 5 = 4 - (5x - 1)$;  б) $|2x - 3| = 5$;

в) $7 - 2(3 - x) = 4(x - 1) + 5$;  г) $|4 - 3x| = 2$.

**131.** а) $\frac{3x + 1}{5} = 2 - \frac{4(x - 3)}{15}$;  б) $\left|\frac{x - 3}{2} + 5\right| = 4$;

в) $1 - \frac{x - 3}{2} = x - \frac{3(5 - 2x)}{7}$;  г) $\left|1 - \frac{x + 2}{3}\right| = 5$.

**132.** $a$ нын кандай маанилеринде бул теңдемелер:

а) $ax - 2x = 3(x - 1)$;  б) $a(1 - x) + 2 = 3x - ax$;

в) $x(2 - a) - x = 5 + x$;  г) $5 + 3(x + 3a) = 9a + 5$

бир чыгарылышка ээ; чыгарылышка ээ эмес; чексиз көп чыгарылышка ээ?

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (133—135).

**133.** а) $\frac{x - 1}{2} + x < 1{,}5x + 3{,}5$;  б) $\frac{5x - 2}{2} - \frac{3 - x}{2} > 1$;

в) $x - 4(3 - x) \ge 2x + 7$;  г) $3 + \frac{2 - 3x}{4} \le 2x$.

**134.** а) $|4x-3|<5$; б) $|2x+5|\ge 1$;

в) $\frac{|x-7|}{3}\le 2$; г) $4|2-x|\le 12$.

**135.** а) $\frac{|2x-3|}{x}>0$; б) $\frac{x+2}{|x+4|}\le 0$;

в) $(x-4)|5-3x|<0$; г) $|2x+7|(3-x)\le 0$.

**136.** Теңдемени чыгаргыла:

а) $x^2+2x-15=0$; б) $7x^2+5x=0$;

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; г) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

**137.** $a$ нын кандай маанисинде теңдемелер жалпы тамырга ээ:

а) $x^2-ax=0$ жана $x^2-x-3a=0$;

б) $x^2-(a-1)x=3$ жана $4x^2-(4a+3)x+9=0$;

в) $x^2+ax+8=0$ жана $x^2+x+a=0$;

г) $2x^2+(3a-1)x=3$ жана $6x^2-(2a-3)x=1$?

**138.** Берилген теңдеме бир тамырга ээ боло тургандай кылып $k$ нын маанисин тапкыла:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$; б) $9x^2-2x+k=6-kx$;

в) $(2k-5)x^2-2(k-1)x+3=0$; г) $3kx^2-6x+k-2=0$.

**139.** $3x^2-5x-2=0$ теңдемесин чыгарбай туруп, буларды тапкыла: а) тамырларынын суммасын; б) тамырларынын көбөйтүндүсүн; в) тамырларынын квадраттарынын суммасын; г) тамырларынын кубдарынын суммасын.

Теңдемени чыгаргыла (140, 141).

**140.** а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

в) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$; г) $\frac{14}{x^2-4}+\frac{3}{(2-x)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

**141.** а) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; б) $2x^4-5x^2+2=0$;

в) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$; г) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,5$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (142—144).

**142.** а) $2x^2+6x+17>0$; б) $x^2-3,2x<0$;

в) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\ge 0$; г) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x)$.



**143.** а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\ge 0$; б) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\le 0$;

в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$; г) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$.

**144.** а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)\le 0$; б) $x^4-3x^2+2\le 0$;

в) $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$; г) $1+\frac{12}{x^2}<\frac{7}{x}$.

**145.** Барабарсыздыктардын тууралыгын далилдегиле:

а) $m>0$ учурда $m+\frac{4}{m}\ge 4$ түн;

б) $\frac{2m}{1+m^2}\le 1$ дин;

в) $a>0$, $b>0$ учурда $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ нин;

г) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a<b$ учурда $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ нын.

## 12. Иррационалдык теңдемелер жана барабарсыздыктар

Теңдемени чыгаргыла (146—149)

**146.** а) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$; б) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22$;

в) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; г) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$.

**147.** а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$; б) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$;

в) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$; г) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$;

**148.** а) $\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0$;

в) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{7}$; г) $\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{3x+1}=0$.

**149.** а) $\sqrt{225+x^2}=x^2-47$; б) $\sqrt[3]{x-2}=x-2$;

в) $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$; г) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (150, 151).

**150.** а) $\sqrt{x^2-5}\ge 2$; б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}>-1$;

в) $\sqrt{x^2-16}\ge 1$; г) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1)>0$.

**151.** а) $\sqrt{x^2-6x+9}>3$; б) $\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x+1}\ge 0$;

в) $\sqrt{25-20x+4x^2}\le 1$; г) $\sqrt{2x-x^2+15}\,(3x-x^2-4)\le 0$.

## 13. Тригонометриялык теңдемелер жана барабарсыздыктар

Теңдемени чыгаргыла (152—158).

**152.** а) $\cos x + 2\cos 2x = 1$; б) $4\sin 2x - 3\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 5$;

в) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$; г) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$.

**153.** а) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$; б) $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1$;

в) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin(\frac{\pi}{6} + x) - \sin(\frac{\pi}{6} - x) = 1$.

**154.** а) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$; б) $4(1 + \cos x) = 3\sin^2 \frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$;

в) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$; г) $4(1 - \cos x) = 3\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

**155.** а) $\cos 2x - \cos 6x = 0$; б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

в) $\sin x + \sin 3x = 0$; г) $\cos(\frac{\pi}{2} + 5x) + \sin x = 2\cos 3x$.

**156.** а) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$; б) $1 + 2\cos 3x \cos x - \cos 2x = 0$;

в) $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x$; г) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

**157.** а) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$; б) $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$;

в) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$; г) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$.

**158.** а) $\arccos\frac{1 + 2x}{3} = \frac{2\pi}{3}$; б) $\operatorname{arctg}(2x - 1) = -\frac{\pi}{4}$;

в) $\arcsin\frac{x + 2}{4} = -\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2 - 3x) = \frac{3\pi}{4}$.

Барабарсыздыкты чыгаргыла (159—162).

**159.** а) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) \ge -1$;

в) $\sin 2x \sin\frac{x}{2} - \cos 2x \cos\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$;

г) $\sin 3x \cos x + \sin x \cos x\, 3x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**160.** а) $2\sin^2 x \le 1$; б) $3\operatorname{tg}^2 x \le 1$;

в) $4\cos^2 x \le 3$; г) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 1 \ge 0$.





**161.** а) $|\cos x - 1| \le 0,5$; б) $\sin x < \cos x$;

в) $\left|\sin 2x + \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 0$.

**162.** а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{3}$; б) $\log_{0,5}\sin x > 1$;

в) $\sin x + \cos x < 1$; г) $\log\sqrt{2}\cos x > -1$.

## 14. Көрсөткүчтүү теңдемелер жана барабарсыздыктар

Теңдемени чыгаргыла (163—167).

**163.** а) $(0,2)^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}$; б) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$;

в) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$; г) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$.

**164.** а) $5^{3x} - 2\cdot 5^{3x-1} - 3\cdot 5^{3x-2} = 60$; б) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

в) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896$; г) $5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2}$.

**165.** а) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; б) $5^{3x+1} + 34\cdot 5^{2x} = 7\cdot 5^x$;

в) $16^x - 50\cdot 2^{2x} = 896$; г) $7^{4\sqrt{x}} - 8\cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7 = 0$.

**166.** а) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$; б) $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$;

в) $2\cdot 25^x - 5\cdot 10^x + 2\cdot 4^x = 0$; г) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

**167.** а) $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} = 11$; б) $5^{\sin^2 x} - 25^{\cos x} = 0$;

в) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$; г) $3\cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Барабарсыздыкты чыгаргыла (168—170).

**168.** а) $\frac{16}{\sqrt{32}} \ge (\frac{1}{2})^{3+x}$; б) $3^{x^2+x} < 10^{\lg 9}$;

в) $3\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2-3x} < \frac{1}{9}$; г) $4^{x^2+x-11} > 5^{\log_5 4}$.

**169.** а) $0,04^x - 26\cdot 0,2^x + 25 \le 0$; б) $9^x - 84\cdot 3^{-2x} + \frac{1}{3} > 0$;

в) $4^x - 10\cdot 2^x + 16 < 0$; г) $2^{2x+1} + (\frac{1}{2})^{2x+1} - \frac{5}{2} \ge 0$.

**170.** а) $x^2\cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$; б) $3,7^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 1$;

в) $x^2\cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$; г) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

## 15. Логарифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар

Теңдемени чыгаргыла (171—175).

**171.** а) $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$;

б) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) = 1 - \lg\sqrt{x-9}$;

в) $\log_3\sqrt{x-5} + \log_3\sqrt{2x-3} = 1$;

г) $3\lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$.

**172.** а) $2\log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9\lg x)$;

б) $\lg(3^x + x - 17) = x\lg 30 - x$;

в) $2\lg(\lg x) = \lg(3 - 2\lg x)$;

г) $x - x\lg 5 = \lg(2^x + x - 3)$.

**173.** а) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$; б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

в) $2\log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3$; г) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_{x^2} x + \log_8 x = 16$.

**174.** а) $x^{\log_2 x - 2} = 8$; б) $x^{\log_5 x} = 125x^2$;

в) $x^{\lg x} = 10000$; г) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$.

**175.** а) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$;

б) $\log_{0,1}\sin 2x + \lg\cos x = \lg 7$;

в) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\log_7 5$;

г) $\lg(3\cdot 5^x + 24\cdot 20^x) = x + \lg 18$.

Барабарсыздыктарды чыгаргыла (176—179).

**176.** а) $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$; б) $\log_{\sqrt{3}-1}(5 - 2x) > 2$;

в) $\lg(x^2 - x + 8) \geq 1$; г) $\log_{\sqrt{7}-1}(3 - 2x) < 2$.

**177.** а) $2\log_2 x < 2 + \log_2(x+3)$;

б) $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geq -1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(12 - x) \geq -2$;

г) $\log_{0,5}(4 - x) \geq \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x - 1)$.

**178.** а) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leq \lg 3$; б) $\log_2\frac{3x-1}{2-x} < 1$;

в) $\ln(x^2 + 3x - 10) - \ln(x - 2) \geq \ln 4$; г) $\log_3\frac{3x-5}{x+1} \leq 1$.





**179.** а) $\log_2(4^x - 5\cdot 2^x + 8) > 2$; б) $\log_{0,5}^2 x + 6 \geq 5\log_{0,5}^2 x$;

в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$.

## 16. Рационалдык теңдемелердин жана барабарсыздыктардын системалары

Теңдемелердин системасын чыгаргыла (180 – 183).

**180.** а) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ 4x - 12y = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1{,}6y = 1. \end{cases}$

**181.** а) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{y}{x} = 2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

**182.** а) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

**183.** а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3y^3 = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

**184.** *a* нын кандай маанисинде бул теңдемелер:

а) $\begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 2a \end{cases}$

бир чыгарылышка ээ; чыгарылышка ээ эмес; чексиз көп чыгарылышка ээ?

**185.** Барабарсыздыктардын системасын чыгаргыла:

а) $\begin{cases} 2x > 3 - \dfrac{13x - 2}{11}, \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x - 7) < \dfrac{3x - 20}{9}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+4}{3} \le \dfrac{x-1}{4} - 2, \\ 1{,}5x - 2{,}5 < x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{3} \ge \dfrac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0{,}5x < 2 - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2(3x - 1) < 3(4x + 1) + 16, \\ 4(2 + x) < 3x + 8. \end{cases}$

## 17. Иррационалдык теңдемелердин системалары

Теңдемелердин системасын чыгаргыла (186—188).

**186.** а) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{xy} = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

**187.** а) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ xy = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 64, \\ x - y + \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$

**188.** а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3\dfrac{3}{4}, \\ xy = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8. \end{cases}$





## 18. Тригонометриялык теңдемелердин системалары

Теңдемелердин системасын чыгаргыла (189,190).

**189.** а) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4\sin x \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

**190.** а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

## 19. Көрсөткүчтүү жана логарифмалык теңдемелердин системалары

Теңдемелердин системасын чыгаргыла (191—196).

**191.** а) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (\sqrt{5})^{x-y} = 25, \\ 2^{6y-x-1} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3. \end{cases}$

**192.** а) $\begin{cases} 4^{\log_4 2x} - y = -1, \\ 5^{2x-y} + 5^x = 5{,}2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{\log_3(y+x)} = 2, \\ 2^{2x+y} = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4, \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171. \end{cases}$

**193.** а) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x - 2^2 y = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5. \end{cases}$

**194.** а) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_2 (x+1) = \log_2 (y + \frac{1}{4}), \\ \log_2 x - 2\log_2 (y - \frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$

**195.** а) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15, \\ \log_3(x^2 - y^2) - \log_3(x - y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)} = 25, \\ \log_5(x^2 - y^2) = \log_5(x + y). \end{cases}$

**196.** а) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

## 20. Теңдемелерди жана теңдемелердин системаларын түзүүгө маселелер

**197.** Автобустун 325 км аралыкты өтүүгө кеткен убактысы автобустардын жүрүшүнүн жаңы расписаниеси боюнча 40 мүнөткө кыскарган. Эгер автобустун жаңы расписаниеси боюнча жүрүшүнүн орточо ылдамдыгы эски расписание боюнча жүрүшүнүн орточо ылдамдыгынан 10 км/саатка жогору болсо, автобустун жаңы расписание боюнча жүрүшүнүн орточо ылдамдыгын тапкыла.

**198.** Акпаган суудагы ылдамдыгы 15 км/саат болгон моторлуу кайык, суунун агымы боюнча төмөн карай $139\frac{1}{3}$ км аралыкта өтүп, кайра келди. Эгер кайык бардык жолуна 20 саат сарп кылса, анда дарыянын агымынын ылдамдыгын аныктагыла.

**199.** Поезд 220 км аралыкты белгилүү бир убакытта өтүүгө тийиш эле. Кыймыл башталгандан 2 саат өткөндөн кийин, 10 мүнөт миң кармалган пунктка өз убагында келүү үчүн ылдамдыгын 5 км/саатка жогорулаткан поезддин ылдамдыгын тапкыла.





**200.** Эки теплоход жолугушкандан кийин биринчиси түштүккө, ал эми экинчиси батышка жөнөп кетти. Жолуккандан кийинки 2 саатта алардын арасындагы аралык 60 км болду. Эгерде биринин ылдамдыгы экинчисиникинен 6 км/саатка чоң болсо, ар бир теплоходдун ылдамдыгын тапкыла.

**201.** Арасындагы аралык 390 м болгон эки пункттан эки нерсе бири-бирин көздөй жөнөдү. Бир нерсе биринчи секундда 6 м жүрүп, калган ар бир секундда мурдагысына караганда 6 м ге көп жүрдү. Экинчи нерсе 12 м/с ылдамдык менен бир калыпта жүрүп, биринчи жөнөп кеткенден кийин 5 с өткөндө жөнөдү. Биринчи нерсе жөнөп кеткенден кийин канча секундадан кийин алар жолугушушат?

**202.** Темир жол магистралынын курулушунда куруучулар бригадасы бир нече күн бою план боюнча иштеп 2160 $м^3$ топуракты казуу керек. Биринчи үч күндүн ичинде бригада пландагы нормасын аткарышты да, андан кийин күндүк планды 80 $м^3$ га ашык аткарышты, ошого байланыштуу мөөнөтүнө бир күн калганда бригада 2320 $м^3$ топуракты казышкан. Бригаданын пландагы күнүмдүк нормасы кандай болгон?

**203.** Окуучулардын эки бригадасы бирге иштешип, окуу-тажрыйба участогуна көчөттөрдү отургузууну 4 күндө бүтүштү. Эгер бригадалардын бирөө экинчисине караганда көчөттөрдү отургузууну 6 күнгө эрте бүтүрө алса, анда бул жумушту өз алдынча бүтүрүү үчүн ар бир бригадага канча күн керек болор эле?

**204.** 60 т жүктү ташуу үчүн кандайдыр бир сандагы машиналар керек. Белгиленгенге караганда ар бир машинага 0,5 т аз жүктөлгөндүктөн, дагы 4 машина кошумча талап кылынган. Адегенде канча машина пландаштырылган?

**205.** Эки бөлүк латундун массасы 30 кг. Биринчи бөлүктө 5 кг таза жез, ал эми экинчисинде 4 кг таза жез бар. Эгер экинчи бөлүктө биринчиге караганда жез 15% ке көп болсо, анда латундун биринчи бөлүгүндө канча процент жез бар?

**206** 40 г тузу бар эритмеге 200 г сууну кошкондон кийин, анын концентрациясы 10% ке төмөндөдү. Эритмеде канча суу болгон жана анын концентрациясы кандай болгон?

**207.** Бир пункттан бир эле убакытта жана бир эле багытта эки машина жөнөп чыкты. Биринчи машина 50 км/саат, ал эми экинчиси — 40 км/саат ылдамдык менен жүрөт. Ошол эле пункттан жарым сааттан кийин бул багытты көздөй үчүнчү машина чыкты жана ал биринчи машинаны экинчиге караганда 1 саат 30 мүнөттөн кийин кууп жетти. Үчүнчү машинанын ылдамдыгын тапкыла.

**208.** Эгерде поезд кыймылсыз байкоочунун жанынан 7 секундда туруктуу ылдамдык менен өтсө жана ошол эле ылдамдык менен узундугу 378 м болгон платформаны бойлото 25 с да өтөрү белгилүү болсо, анда поезддин ылдамдыгын жана узундугун тапкыла.

**209.** Аралыгы 50 км болгон $A$ жана $B$ пункттарынан бир эле убакытта бири бирин көздөй эки киши чыкты. 5 саат өткөндөн кийин алар кезигишти. Жолуккандан кийин $A$ дан $B$ га бараткан жөө киши өзүнүн ылдамдыгын 1 км/саатка азайтты, ал эми экинчиси — 1 км/саатка көбөйттү. Биринчи киши $B$ пунктка экинчинин $A$ га келгенинен 2 саат мурда келди. Ар бир кишинин алгачкы ылдамдыгын тапкыла.

**210.** Заводдо $A$ тибиндеги бир электр кыймылдаткычты жасоого 2 кг жез жана 1 кг коргошун пайдаланылат, $B$ тибиндеги бир электр кыймылдаткычты жасоого 3 кг жез жана 2 кг коргошун жумшалат. Эгерде 130 кг жез жана 80 кг коргошун жумшалганы белгилүү болсо, анда ар бир типтеги электр кыймылдаткычтан канчадан жасалганын аныктагыла.

**211.** Эки жумушчу бирге иштеп, пландагы тапшырманы 12 күндө аткарат. Эгерде тапшырманын жарымын бир жумушчу аткарып, анан калган жарымын экинчи жумушчу иштесе, анда ал тапшырма 25 күндө аткарылат. Ар бир жумушчу тапшырманы канча күндө аткара алат?

**212.** Тыгыздыктары тиешелүү түрдө 1,2 г/см³ жана 1,6 г/см³ болгон эки суюктуктан массасы 60 г аралашма жасалды. Эгер аралашманын 8 см³ нун массасы аралашкан суюктуктардын ичинен жеңилирээгинин бардык массасындай болсо, ар бир суюктуктан канча граммдан алынган жана аралашманын тыгыздыгы канчалык?

**213.** Эгерде 3 кг таза күмүштөн жез менен аралашкан эритмеси 90% күмүштөн, ал эми 2 кг күмүштөн эритме жасап анан ал 90% күмүштөн турса, ал эритмеде күмүштүн массасынын бөлүгү 84% түзөт. Күмүштүн массасын жана массасынын үлүшүн (процент менен) эсептегиле.

**214.** Узундугу 60 м айлана боюнча эки чекит бир калыпта жана бир багытта жылышат. Бир чекит экинчисине караганда толук айланууну 5 с га тез жасап, экинчи чекитти ар бир мүнөттө кууп жетет. Чекиттердин ылдамдыгын аныктагыла.

**215.** Эки орундуу оң сандын цифраларынын квадраттарынын суммасы 13кө барабар. Эгерде бул сандан 9 ду кемитсе, анда ошол эле цифралардан тескери тартипте жазылган сан келип чыгат. Ал санды тапкыла.

**216.** Квадраттарынын айырмасы 55 ке барабар болгон натуралдык сандардын бардык түгөйлөрүн тапкыла.





## § 5. ТУУНДУ, БАШТАПКЫ ФУНКЦИЯ, ИНТЕГРАЛ ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

### 21. Туунду

**217.** Эгерде:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x_0 = 1, \Delta x = 0,1;$

б) $f(x) = \sqrt{x-1}\,, x_0 = 2, \Delta x = 0,21;$

в) $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 2, \Delta x = 0,2\,;$

г) $f(x) = \frac{1}{x+1}, x_0 = 1, \Delta x = 0,1$

болсо, анда $f$ функциясы үчүн $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ катышын тапкыла.

**218.** Эгерде:

а) $f(x) = 1 - 4x, x_0 = 3\,;$ б) $f(x) = 1,5x^2, x_0 = 2\,;$

в) $f(x) = 3x + 2, x_0 = 5\,;$ г) $f(x) = x^3 + 1, x_0 = -1\,;$

болсо, аныктаманы пайдаланып, $f$ функциясынын $x_0$ чекитиндеги туундусун тапкыла.

Функциялардын туундуларын тапкыла (219—222).

**219.** а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5;$

б) $f(x) = (4 - x^2)\sin x\,;$

в) $f(x) = (x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2);$

г) $f(x) = \frac{\cos x}{2 - x^3}.$

**220.** а) $f(x) = \frac{3}{x^3} - \sqrt[5]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}};$ б) $f(x) = (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{tg}\,x\,;$

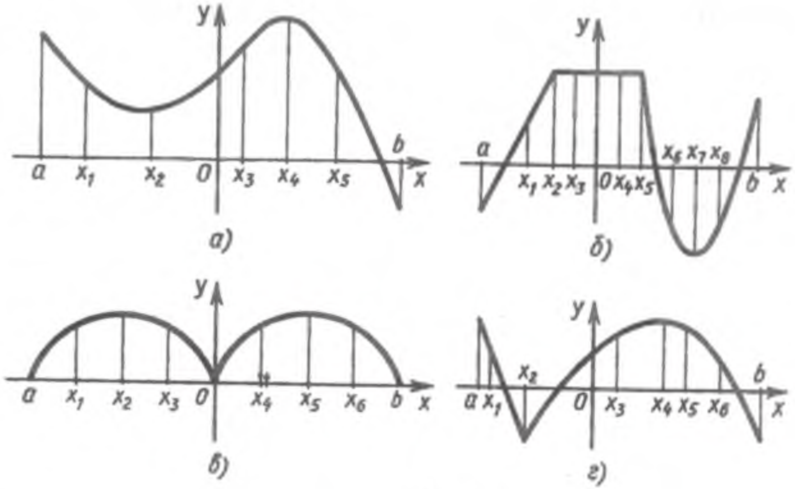
в) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 - 2x}\,;$ г) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}\,.$

**221.** а) $f(x) = 2^x + \lg x\,;$ б) $f(x) = e^{-3x} + 2\log_3 2x\,;$

в) $f(x) = x^2 \cdot 5^{2x}\,;$ г) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x + e^{-x}}\,.$

**222.** а) $f(x) = \sin 3x + \cos 5x\,;$ б) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2} + \frac{1}{(2x-1)^3};$

в) $f(x) = (3 - 2x^3)^5;$ г) $f(x) = \lg 3x - 3\,\mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{4}).$




153-сүрөт

**223.** Эгерде:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; б) $f(x) = 1,5\sin 2x - 5\cos x - x$;

в) $f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} - 9x$; г) $f(x) = x + \cos 2x$

болсо, анда $f'(x) = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

**224.** Функция график менен берилген (153-сүрөт).

1) Белгиленген чекиттердин кайсынысында төмөндөгүлөр орун алат:

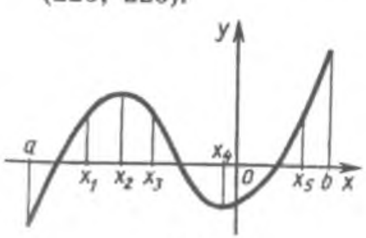
а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$; в) $f'(x) = 0$.

2) Төмөндөгүлөр орун алган аралыктарды көрсөткүлө:

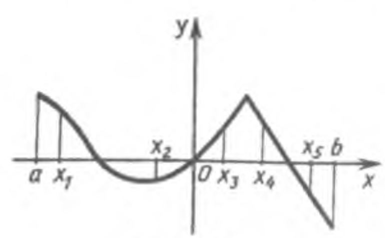
а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$; в) $f'(x) = 0$.

3) $(a;\ b)$ интервалынын кайсы чекиттеринде $f$ функциясы туундуга ээ эмес?

Берилген чекиттерде туундунун маанилерин салыштыргыла (225, 226).




154-сүрөт




155-сүрөт



**225.** а) $x_1$ жана $x_2$; б) $x_1$ жана $x_3$; в) $x_2$ жана $x_4$; г) $x_3$ жана $x_5$ (154-сүрөт).

**226.** а) $x_1$ жана $x_2$; б) $x_3$ жана $x_5$; в) $x_4$ жана $x_5$; г) $x_2$ жана $x_4$ (155-сүрөт).

**227.** $u, v, w$ функциялары $x$ чекитинде дифференцирленүүчү. Төмөндөгүнү далилдегиле: $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

## 22. Туундунун функцияларды изилдөөгө колдонулушу

**228.** $x_1$ жана $x_2$ чекиттеринде функциянын жакындаштырылган маанилерин эсептегиле:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x,\ x_1 = 2,0057,\ x_2 = 1,979$;

б) $f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4,\ x_1 = 3,005,\ x_2 = 1,98$.

**229.** Туюнтмалардын жакындаштырылган маанилерин эсептегиле:

а) $\sqrt{9,009}$; б) $1,0001^{15}$; в) $0,999^{-5}$; г) $\sqrt[3]{8,008}$.

Функциялардын өсүү жана кемүү аралыктарын, максимум жана минимум чекиттерин тапкыла (230, 231).

**230.** а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3 - x}$;

в) $f(x) = -\frac{x(x^3 - 4)}{2}$; г) $f(x) = -\frac{x}{4 - x}$.

**231.** а) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$; б) $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$;

в) $f(x) = 2\sin x + -\cos 2x$; г) $f(x) = 3x - \cos x$.

Функцияны изилдегиле жана анын графигин түзгүлө (232—234).

**232.** а) $f(x) = x^2(x-2)^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$.

**233.** а) $f(x) = 1 - 2\sin 2x$; б) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

в) $f(x) = 3 - \cos\frac{x}{2}$; г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.

**234.** а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

в) $f(x) = 2^{x^2 - 4x}$; г) $f(x) = x - \ln x$.

**235.** Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин берилген аралыктан тапкыла (эгерде алар бар болсо):

а) $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$, $[1;3]$;

б) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x, [0;\pi]$;

в) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2, [\frac{1}{2};1]$;

г) $f(x) = \sin x - x, [-\pi;\pi]$.

**236.** 10 санын эки терс эмес сандын суммасы катары жазгыла жана ал сандардын кубдарынын суммасы төмөндөгүдөй болсун: а) эң чоң; б) эң кичине.

**237.** Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин суммасы 20 см. Үч бурчтуктун аянты эң чоң болсун үчүн катеттеринин узундугу кандай болуш керек?

**238.** Параллелограммдын диагоналдарынын суммасы 12 см ге барабар. Анын бардык жактарынын квадраттарынын суммаларынын эң кичине маанисин тапкыла.

**239.** Эки машина эки башка көчө менен көчөлөрдүн кесилишин карай 40 км/саат жана 50 км/саат турактуу ылдамдыктар менен келе жатышты. Көчөлөр тик бурч боюнча кесилишет деп эсептеп жана убакыттын кандайдыр бир моментинде автомашиналар кесилиштен (ирети менен) 2 км жана 3 км аралыкта болушарын билип, канчалык убакыттан кийин алардын арасындагы аралык эң кичине болорун аныктагыла.

**240.** Бийиктиги 1,4 м болгон картина дубалга, анын төмөнкү кыры байкоочунун көзүнөн 1,8 м ге жогору тургандай болуп илинген. Картинаны эң даана көрүш үчүн (б.а. вертикаль боюнча көрүү бурчу эң чоң болуш үчүн) байкоочу дубалдан канчалык алыстыкта турушу керек?

**241.** Бийиктиги 4 м болгон статуя бийиктиги 5,6 м болгон колоннада турат. Бою 1,6 м болгон киши (көздүн деңгээлине чейин) статуяны эң чоң көрүү бурчу боюнча көрүү үчүн кандай аралыкта туруш керек?

**242.** Көлөмү $16\pi$ м$^3$ болгон бардык цилиндрлердин ичинен толук бетинин аянты эң кичине болгон цилиндрди тапкыла.

**243.** Радиусу $R$ болгон шарга ичтен сызууга мүмкүн болгон эң чоң көлөмдөгү цилиндрдин бийиктигин тапкыла.

**244.** Негизинин радиусу $R$ жана бийиктиги $H$ болгон конустун ичине толук бети эң чоң болгон цилиндрди сызуу керек. Цилиндрдин радиусун тапкыла.

**245.** Берилген цилиндрдин сыртынан эң кичине көлөмдүү конусту сызгыла (цилиндр менен конустун негиздеринин тегиздиктери дал келишет).

**246.** Радиусу $R$ болгон шардын сыртынан сызылган эң кичине көлөмдүү тик тегерек конустун бийиктигин тапкыла.





**247.** Радиусу $R$ болгон жарым шардын сыртынан конустун негизинин борбору шардын борборунда жаткандай кылып сызылган эң кичине көлөмдүү конустун бийиктигин тапкыла.

**248.** Диаметри 40 см жумуру карагайдан негизи $b$ жана бийиктиги $h$ ка барабар тик бурчтуу кесилиштеги устунду кесип алуу керек. Устундун катуулугу $bh^2$ка пропорциялуу. $b$ жана $h$ тын кандай маанилеринде устундун катуулугу эң жогору болот?

**249.** Терезе үстү жагы жарым тегерек болгон тик бурчтук формасында. Берилген периметри боюнча эң чоң аянтка ээ болгон терезенин өлчөмдөрүн аныктагыла.

**250.** Айланадан $A$ чекити берилген. $ABC$ үч бурчтугунун аянты эң чоң болгудай кылып, $A$ чекитинде жүргүзүлгөн жанымага параллель болгон $BC$ хордасын жүргүзгүлө.

**251.** Үч бурчтуктун ичинен сызылган тегеректин радиусу эң чоң болсун үчүн, берилген аянттагы тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурч кандай болуш керек?

**252.** $y = x^2$ параболасынан берилген $A$ (2; 0,5) чекитине чейинки аралык эң кичине боло турган чекитти тапкыла.

**253.** Туура үч бурчтуу призманын көлөмү $V$ га барабар. Призманын толук бети эң кичине болсун үчүн, анын негизинин жагы кандай болуш керек?

## 23. Туундунун физикада жана геометрияда колдонулушу

**254.** Эки чекит түз сызык боюнча кыймылда. Эгерде: а) $x_1(t) = 2\frac{2}{3}t^3$, $x^2(x) = 2t-3$; б) $x_1(t) = 9t^2 + 1, x_2(t) = t^3$ болсо, биринчи чекиттин ылдамдыгы экинчисинен аз болгон убакыттын аралыгын аныктагыла.

**255.** Нерсенин октун тегерегиндеги бурулуу бурчу убакыттын жүрүшүнө жараша $\varphi(t) = 0,1t^2 - 0,5t + 0,2$ закону боюнча өзгөрөт. Нерсенин $t = 20$ с убакыт моментиндеги айлануусунун бурчтук ылдамдыгын тапкыла. (Бурч радиан аркылуу ченелет.)

**256.** Металлдан жасалган тегерек диска ысытуудан кеңеет, анын радиусу бир калыпта 0,01 см/с га чоңоёт. Эгерде анын радиусу 2 см болсо, дисканын аянты кандай ылдамдык менен көбөйөт?

**257.** $60^\circ$ ту түзгөн эки түз сызык боюнча бир убакытта эки нерсе кыймылга келди. Биринчиси бир калыптагы ылдамдык менен 5 км/саат, экинчиси — $s(t) = 2t^2 - t$ закону боюнча кыймылдайт. $t = 3$ саат моментинде алар кандай ылдамдык менен бири биринен алыстагат? ($s$ — км менен, $t$ — саат менен ченелет.)

**258.** Узундугу 5 м болгон $AB$ кесиндисинин учтары координаталык октор боюнча сыйгаланышат. $A$ учунун которулушунун ылдамдыгы 2 м/с га барабар. $A$ учу координаталык баштапыштан 3 м аралыкта болгон кезде $B$ учунун которулушунун ылдамдыгы кандай чоңдукта болот?

**259.** Вертикаль абалда турган шатынын узундугу 5 м. Шатынын төмөнкү учу 2 м/с турактуу ылдамдык менен сыйгалана баштады. Убакыттын 2 м/с моментинде шатынын жогорку учу кандай ылдамдык жана кандай ылдамдануу менен түшөт?

**260.** Бир өңчөй эмес өзөкчөнүн узундугу 12 см. Анын $AC$ бөлүгүнүн массасы $AC$ аралыгынын квадратына пропорциялуу өсөт жана $AC = 2$ см болгондо 10 г га барабар. 1) $AB$ өзөкчөсүнүн массасын жана анын ар бир чекитиндеги сызыктуу тыгыздыкты; 2) өзөкчөнүн $A$ жана $B$ чекиттеринин сызыктуу тыгыздыгын тапкыла.

**261.** Дөңгөлөктүн айлануусунда анын бурулуу бурчу убакыттын квадратына пропорционалдуу. Дөңгөлөктүн биринчи айлануусу 8 с да өттү. Айлана баштагандан 48 с өткөндөн кийинки дөңгөлөктүн бурчтук ылдамдыгын тапкыла.

**262.** 10 м бийиктиктен нерсе 40 м/с баштапкы ылдамдык менен вертикаль жогору ыргытылды. Төмөнкү суроолорго жооп бергиле: а) нерсе 5 с дан кийин жердин бетинен кандай бийиктикте боло алат? б) ал канча с дан кийин эң бийик чекитке жетет жана жерден кандай аралыкта болот ($g = 10$ м/с$^2$ деп эсептеш керек)?

**263.** $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ параболасынын кандай чекитинде анын жанымасы абсцисса огуна төмөнкүдөй бурч менен жантайган:

а) $45^\circ$; б) $135^\circ$ ?

**264.** $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 3$ функциясынын графигиндеги жанымалардын абсцисса огуна $135^\circ$ тук бурч боюнча жантайган чекиттердин абсциссаларын тапкыла.

**265.** $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн ар бир жаныма абсцисса огун кесип өтөрүн далилдегиле.

**266.** $f(x) = x^5 + 2x - 7$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн ар бир жаныма абсцисса огу менен тар бурчту түзөрүн далилдегиле.

**267.** $f(x) = (x+2)^2$ жана $g(x) = 2 - x^2$ функцияларынын графиктери жалпы чекитке жана ошол чекит аркылуу өткөн жалпы жанымага ээ болорун далилдегиле.



## 24. Баштапкы функция



**268.** Функциянын баштапкы функцияларынын жалпы түрүн тапкыла:

а) $f(x) = 4\sin x + \cos 3x$; б) $f(x) = x^2 + x^{-5} + x^{2+\sqrt{3}}$;

в) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$; г) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 3x}$.

**269.** $f$ функциясынын графиги $M$ чекити аркылуу өткөн баштапкы функциясын тапкыла:

а) $f(x) = \frac{2}{x}$, $M(\frac{1}{e}; 2)$; б) $f(x) = x^{-2} + \cos x$, $M(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{\pi})$;

в) $f(x) = x^{-4}$, $M(2; -3)$; г) $f(x) = \sin 2x$, $M(0; 1)$.

**270.** Туундусу ар кандай $x$ чекитинде $2x-3$кө барабар жана 2 чекитинде мааниси 2ге барабар болгон функцияны тапкыла.

**271.** $A(2;3)$ чекити аркылуу өткөн ийри сызыктын графигине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти $x$ абсциссасында $3x^2$ ка барабар болгон теңдемесин тапкыла.

**272.** Материалдык нерсе координаттык ок боюнча $v(t) = \sin t \cos t$ ылдамдыгы менен кыймылдайт. Эгерде $t = \frac{\pi}{4}$ учурда анын координатасы 3кө барабар болсо, анын теңдемесин тапкыла.

## 25. Интеграл

**273.** Эсептегиле:

а) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(1,5\pi + 0,5x)\,dx$; б) $\int_1^2 (x^{-2} + x^2)\,dx$;

в $\int_{12}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x)\,dx$; г) $\int_{-5}^{-2} (5 - 6x - x^2)dx$.

**274.** Интегралдын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла:

а) $\int_0^a \cos\frac{x}{2}\,dx, a \in \boldsymbol{R}$; б) $\int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx, a \in \boldsymbol{R}$.

**275.** Сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

а) $y = 0,5x^2 - 2x + 3$, $y = 7 - x$;

б) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$;

в) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = x + 1$;

г) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.

**276.** $y = \frac{1}{2}x^2$ жана $y = 8$ сызыктары менен чектелген фигураны $y = x + 4$ түз сызыгы бөлүктөргө бөлөт. Ар бир фигуранын аянтын тапкыла.

**277.** $y = 2,5 + 2x - 0,5x^2$, $x = -1$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла жана абсциссасы $x = 3$ болгон чекитте берилген параболага жүргүзүлгөн жанымамы тапкыла.

**278.** $y = x^2 - 4x + 5$ параболасы жана абсциссасы $x = 1$ жана $x = 3$ болгон чекиттерде жүргүзүлгөн анын жанымалары аркылуу чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

**279.** Квадраттын жанаша эки чокулары аркылуу өтүп жана анын бир жагынын ортосун жанып өткөн параболанын аянтын кандай катышта бөлө алат?

**280.** $y = x^2 + 4x + a\ (a > 0)$, $x = 2$ жана $y = 2$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянты 12 болсун үчүн $a$ нын мааниси кандай болуш керек?
(Фигуранын жогорку жарым тегиздикте жатаары белгилүү.)

**281.** $f(x) = a\sin\pi x + b$ функциясы $f'(2) = 2$, $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$ шарттарын канааттандыра турган кылып $a$ жана $b$ эки санын тапкыла.

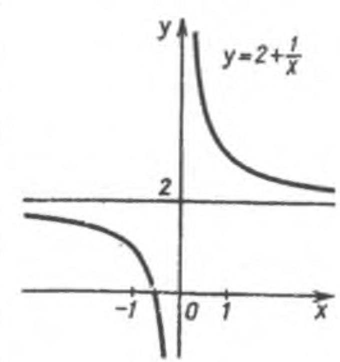




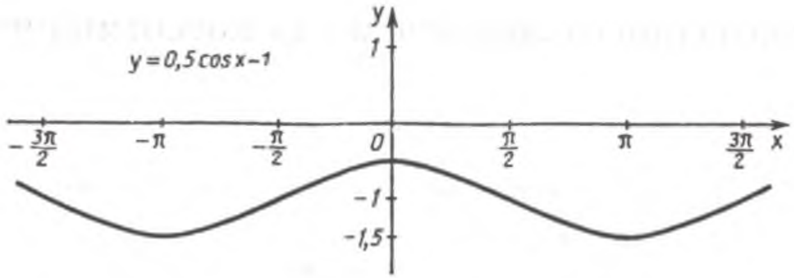
# КӨНҮГҮҮЛӨРГӨ ЖООПТОР ЖАНА КӨРСӨТМӨЛӨР

## I глава

**1.** г) $\frac{5\pi}{6}; \frac{6\pi}{5}; \frac{\pi}{2}$. **2.** г) $225°; 270°; -105°$. **3.** в) 4; г) 3. **4.** в) Жок; ооба; ооба. **5.** в) Жок; г) ооба. **6.** в) Жок; г) ооба. **7.** г) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}; \operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}; \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$. **8.** г) $-1$. **9.** в) 1. **10.** б) $-\frac{24}{25}; \frac{161}{289}; \frac{84}{85}$. **11.** в) $\operatorname{tg}\alpha$. **12.** б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}; -\cos\frac{\pi}{18}; \cos\frac{\pi}{5}; -\operatorname{ctg}0,1\pi$. **13.** г) 1. **14.** в) Жок; г) ооба. **15.** г) $\frac{4}{\sqrt{17}}; -\frac{1}{\sqrt{17}}; -4$. **16.** в) 0,7833; 0,6216; 1,2602; 0,7936. **17.** б) $22°6''; 27°30'7''; 63°35'54''; 84°47'52''$. **18.** в) 0,1 м; г) $9\pi$ м. **19.** в) 0,05м². **20.** б) 1. **21.** в) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **22.** в) $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}$. **27.** г) $-2$. **30.** в) IV; IV; II. **31.** г) Плюс. **36.** з) $D(y) = R$, $E(y) = [-2; 0]$. **37.** г) $D(y) = R$, $E(y) = [-1,5; 1,5]$. **38.** г) $(0; -1)$, $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0)$, $n \in Z$. **39.** в) $(0; 3,5)$. **41.** в) $\frac{1}{x_0} + 1$, $\frac{1}{a+2} + 1$. **42.** в) Жок. **43.** в) $(-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$. **44.** $\pi n, n \in Z$ сандарынан башка бардык сандык ок. **45.** в) $D(y) = E(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$. **46.** г) $D(y) = [-4; 3]$, $E(y) = (-1; 4]$. **49.** г) 1-сүрөт. **50.** в) $y = \cos x$ функциясынын ордината огу боюнча графигин чиебиз $(k = 0,5)$, андан кийин $(0; -1)$ векторуна жылдырабыз, 2-сүрөт. **52.** г) $S_1(x) = x^2$, $D(S_1) = (0; \frac{a\sqrt{2}}{2})$; $S_2(x) = a^2 - x^2$, $D(S_2) = (0; \frac{a\sqrt{2}}{2})$. **53.** в) $[-2; 1,5) \cup (1,5; \infty)$. **54.** г) $D(y) = R$, $E(y) = [1; 1,5]$. **64.** г) $3\pi$. **65.** в) $\pi$. **67.** г) $\frac{4\pi}{3}$. **68.** в), г) Жок. **69.** г) Так. **70.** в) Жуп да эмес, так да эмес. **72.** г) Так. **73.** г) $2\pi$. **77.** г) [-4; -2], [0; 2], [4; 6] да өсөт; [-6; -4], [-2;0], [2; 4] тө кемийт; $x_{max} = -2$, $x_{max} = 2$, $x_{min} = -4$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 4$, $y(-2) = y(2) = 3$, $y(0) = 0$, $y(-4) = y(4) = -2$. **82.** г) $[3; \infty]$ де өсөт; $[-\infty; 3]$ тө кемийт; $x_{min} = 3$, $y(3) = 0.83$. в) $(-\infty; -3)$, де өсөт; экстремум чекити жок. **84.** г) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ де өсөт, $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$ де кемийт, $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -1$, $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -2, n \in Z$. **85.** г) $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ де өсөт, $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ де кемийт; $x_{max} = 2\pi n$, $y = (2\pi n) = 0$, $x_{min} = \pi + 2\pi n$, $y = (\pi + 2\pi n) = -2; n \in Z$. **86.** в) Биринчиси чоң. **87.** г) $\sin(-1,2)$, $\sin 0,8$, $\sin 1,2$. **88.** г) $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$ де кемийт, $[-1; 0]$, $[1; \infty)$ де өсөт,



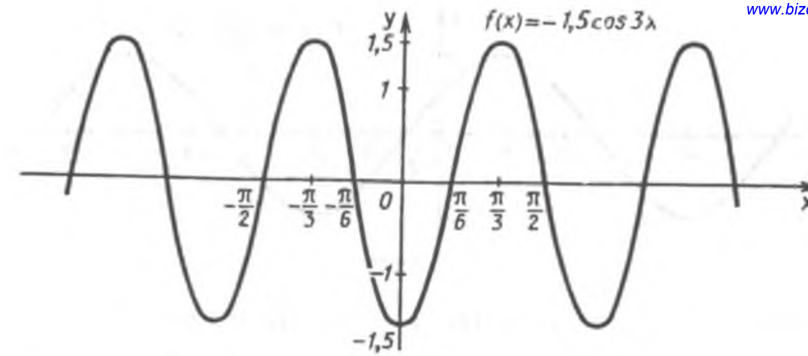

1-сүрөт




2-сүрөт

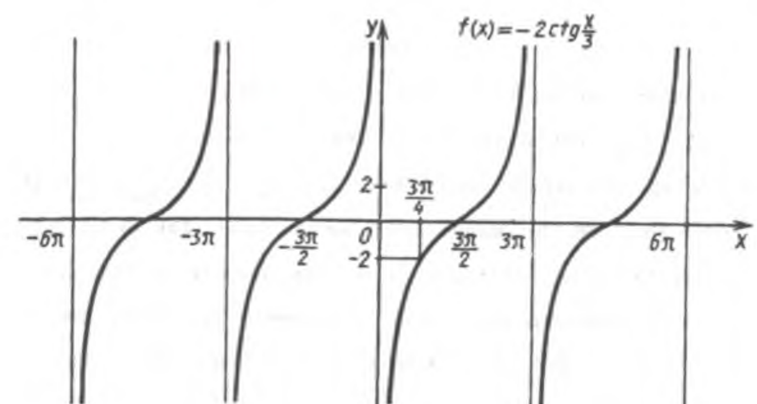
$x_{\max} = 0$, $y(0) = 0$, $x_{\min} = \pm 1$, $y(-1) = y(1) = -1$. **89.** $[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n]$ де өсөт, $[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$ де кемийт, $x_{\max} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $y(\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = 1$, $x_{\min} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $y(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n) = -1$, $n \in Z$. **90.** в) $ctg\,\frac{9\pi}{10}$, $ctg\,\frac{7\pi}{15}$, $ctg\,\frac{12\pi}{5}$, $tg\,\frac{6\pi}{5}$. **91.** в) К ө р с ө т м ө. $y = x^6$ жана $y = x^5$ функцияларынын касиеттерин пайдалангыла. **92.** б) К ө р с ө т м ө. $-b \le x_1 < x_2 \le -a$ болсун, анда $a \le -x_2 < -x_1 \le b$ жана $f(-x_2) > f(-x_1)$, анткени $[a; b]$ да $f$ кемийт, демек, $f(x_2) < f(x_1)$. **93.** в) 1) $D(f) = [-6; 6]$, $E(f) = [-2; 2]$; 2) функция так; 3) (-4;0), (0;0), (4;0) — $Ox$ огу менен кесилишкен чекиттер, (0;0) — $Oy$ огу менен кесилишкен чекит; 4) (−4;0), (4;6] да $f(x) > 0$, $[-6; -4), (0; 4)$ тө $f(x) < 0$; 5) $f$ болсо, $[-6; -2], [2; 6]$ ларда өсөт, $[-2; 2]$ де кемийт; 6) $x_{\min} = 2$, $f(2) = 2$, $x_{\max} = -2$, $f(-2) = 2$. **96.** г) 1) $D(f) = E(f) = R$; 2) (1;0), (0;-1) — координаталык октор менен кесилишкен чекиттер; 3) $(-\infty; 1)$ де $f(x) < 0$, $(1; \infty)$ де $f(x) > 0$; 4) $f$ болсо R де өсөт. **97.** в) $D(f) = [-1; \infty)$, $E(f)\ [0; \infty)$; 2)(−1;0), (0;1) — координаталык октор менен кесилишкен чекиттер; 3) $(-1; \infty)$ де $f(x) > 0$; 4) $[-1; \infty)$ де $f$ өсөт. **98.** в) 1) $D(f) = E(f) = R$; 2) функция так; 3) (0;0) — координаталык октор менен кесилишкен чекиттер; 4) $(-\infty; 0)$ дө $f(x) < 0$; $(0; \infty)$ де $f(x) > 0$; 5) R де $f$ өсөт; г) 1) $D(y) = [2; \infty)$, $E(f) = [-2; \infty)$; 2) (6;0) — $Ox$ огу менен кесилишкен чекит; 3) $[2; 6)$ да $f(x) < 0$, $(6; \infty)$ де $f(x) > 0$; 4) $[2; \infty)$ де $f$ өсөт. **99.** в) 1) $D(f) = R$, $E(f) = (-\infty; \frac{1}{4}]$; 2) жуп функция; 3) (0;0), (−1; 0), (1; 0) — координаталык октор менен кесилишкен чекиттер; 4) $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$ де $f(x) < 0$, (−1; 0), (0;1) де $f(x) > 0$, 5) $(-\infty; -\frac{1}{2}]$, $[0; 0{,}5]$ те $f$ өсөт. $[-0{,}5; 0]$, $[0{,}5; \infty)$ де $f$ кемийт; $x_{\max} = \pm 0{,}5$, $y(-0{,}5) = y(0{,}5) = 0{,}25$, $x_{\min} = 0$, $y(0) = 0$. **100.** г) $-\cos\frac{\pi}{7}$, $-ctg\,\frac{\pi}{9}$. **101.** в) $D(f) = \left(\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi(n+1)}{3}\right)$, $n \in Z$, $E(f) = R$. **102.** г) $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ учурда $f(x) > 0$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi(n+1)}{2}$ учурда, $f(x) < 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, учурда $f(x) = 0$. **103.** г) $[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}]$ де өсөт, $[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}]$ де кемийт,



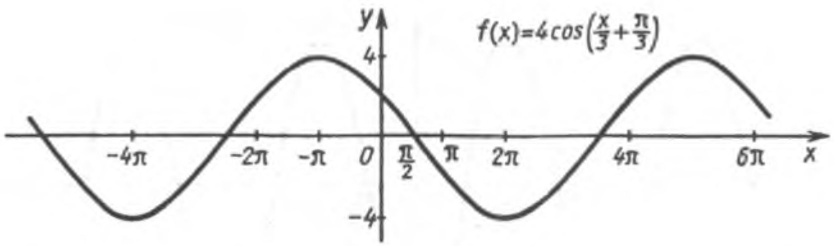



3-сүрөт

$x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **104.** в) Функциянын графиги 3-сүрөттө көрсөтүлгөн. **105.** Функциянын графиги 4-сүрөттө көрсөтүлгөн. **106.** г) $A = 0{,}5$, $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $x(t_1) = \frac{1}{4}$. **110.** в) R, $2\pi n$, $n \in Z$ сандарынан башкасы. **111.** $[0; \sqrt{2}]$; г) $(0; 2]$. **113.** а) Функциянын графиги 5-сүрөттө көрсөтүлгөн. **114.** в) $A = 12$, $T = 1{,}2$, $I(t) = 12\sin\frac{5\pi t}{3}$. **115.** г) $2\frac{2}{3}$. **118.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **120.** г) $\frac{3\pi}{4}$. **121.** г) $-\frac{\pi}{4}$. **122.** в) $\frac{5\pi}{6}$, г) 0. **124.** в) жок; г) ооба. **125.** б) Жок. **126.** г) $-\frac{\pi}{3}$. **127.** в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{12}$. **128.** $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **129.** Биринчиси кичине. **130.** в) 0,8948; 0,5010. **131.** г) $-\frac{3\pi}{2}$. **132.** б) $\alpha = \arccos x_1$, $\beta = \arccos x_2$ белгилөөлөрүн киргизебиз. $\alpha \le \beta$ деп болжолдойбуз. $\alpha$ жана $\beta$ $[0; \pi]$ аралыгында жаткандыктан жана анда косинус кемигендиктен $\cos\alpha \ge \cos\beta$ экендигин алабыз, б.а. $x_1 \ge x_2$, бул шартка карама-каршы болот. **133.** б) К ө р с ө т м ө. 132. б) көнүгүүдөгү көрсөтүлгөн жолду пайдалангыла. **136.** в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **138.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.




4-сүрөт



5-сүрөт

**139.** г) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **141.** в) $\frac{\pi}{6}+\pi n$. **142.** в) $(-1)^n\cdot\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$. **143.** в) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n,\ n\in Z$. **145.** г) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$. **146.** г) $\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. **147.** г) $(-1)^n\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{5}+3\pi n,\ n\in Z$. **148.** в) $(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;1)$, $(\frac{\pi}{2}+4\pi n;1)$, $n\in Z$. **149.** г) $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}; -\frac{3\pi}{8}$. **151.** в) $(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$. **152.** в) $(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3})$. **153.** г) $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4})$. **154.** г) $(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n),\ n\in Z$. **155.** в) $[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n),\ n\in Z$. **156.** г) $(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n),\ n\in Z$. **159.** $(4\pi n;\pi+4\pi n),\ n\in Z$. **160.** г) $(\frac{17\pi}{24}+2\pi n; \frac{25\pi}{24}+2\pi n),\ n\in Z$. **161.** г) $(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n),\ n\in Z$. **162.** г) $(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{\pi n}{2}),\ n\in Z$. **163.** в) $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$. **164.** г) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **165.** г) $2\pi n, \pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n,\ n\in Z$. **166.** г) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$. **167.** в) $x_1+\pi n,\ x_2+\pi n$, $x_1=-\mathrm{arctg}\,2\approx-1{,}1071$, $x_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\approx 0{,}4636$, $n\in Z$. **168.** г) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **169.** в) $\frac{\pi}{4}+\pi n, \mathrm{arctg}\,3{,}5+\pi n,\ n\in Z$. **171.** г) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$. **172.** в) $(-1)^n\times\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **173.** в) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **174.** в) $\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}; k$, $n\in Z$. **175.** г) $(\frac{\pi}{2}-\pi n;\pi n;)$, $n\in Z$. **176.** в) $(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi n),\ n\in Z, k\in Z$.

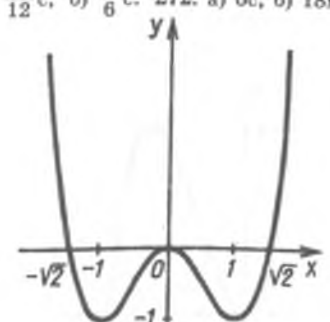
## II глава

**177.** б) 3) 1,2881; 4) $\pi h(2R+h)$. **178.** г) 0,205. **179.** г) $\Delta x=0{,}125$, $\Delta f=0{,}1$. **180.** г) $\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$. **181.** в) 65 км/саат. **182.** г) 4кө тескери багытта, $\upsilon_{орт.}=-2$. **184.** в) 1,5 тар. **185.** в) $6(2x+\Delta x)\Delta x$. **186.** $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-2x_0-\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^{\,2}+1)}$. **187.** в) $\upsilon_{орт.}=\frac{g}{2}(2t_0+\Delta t)$. **188.** б) Минус, плюс, минус, плюс. **191.** б) 2,5; 2,1;2,01; **192.** г) −2, −4. **193.** г) 5, −2. **194.** в) $-\frac{1}{4}, -1$. **195.** г) $y=4x-4$. **196.** в) 2; г) 5. **197.** в) $x_1, x_2$ чекиттеринде үзгүлтүксүз, $x_3$ чекитинде үзгүлтүктүү. **200.** в) 5,4. **201.** в) 6. **202.** г) 0,25. **204.** $h\approx 0{,}04$ дм **206.** $h\approx 0{,}01$ дм. **208.** г) $3x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **209.** г) $-8x^3+9x^2+2$. **210.** в) $\frac{34}{(5x+8)^2}$. **211.** в) $7x^6-20x^4+2$; $x-9x^{-4}$.

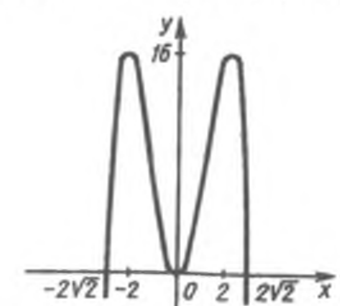




**212.** в) 1,5; 4. **213.** в) 4; −1. **214.** г) $(-\infty;-2),(2;\infty)$. **215.** в) $\frac{3x^2(2x^6-4x^3+5}{(1-x^3)^2}$. **216.** в) −1. **217.** г) $(-\infty;3),(3;\infty)$. **218.** г) Мисалы, $3x^3-\frac{1}{2}x$. **219.** а) Жок. **220.** г) $f(x)=3x+\frac{\pi}{4}, g(x)=\cos x$. **221.** в) $f(x)=2x+1, g(x)=x^7$. **222.** в) $[-0{,}5;0{,}5]$. **223.** г) $[2\pi n;\pi+2\pi n],\ n\in Z$. **224.** г) $\frac{30}{(6x-1)^6}$. **225.** г) $65(5x-2)^{12}+24(4x+7)^{-7}$. **226.** в) $[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n],\ n\in Z$. **227.** а) $3-2x^2$; в) $(3-2x)^2$. **228.** б) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $[0;1)\cup(1;\infty)$; в) $\sqrt{\cos x}$, $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. **229.** б) $f(x)=x^2$, $D(f)=[0;\infty)$; г) $f(x)=-\sqrt{x-1}$. **230.** г) $-15x^2(3-x^3)^4+ +\frac{1}{\sqrt{2x-7}}$. **232.** г) $2\cos x-1{,}5\sin x$. **233.** г) $\frac{1}{2\cos^2 x}$. **234.** г) 0; −1. **235.** г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. **237.** б) $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **239.** г) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{12}+\pi n)$, $n\in Z$. **240.** в) Мисалы, $f(x)=-\sin x$. **241.** г) Ооба, ооба. **242.** в) $R$; г) $(-\infty;2),(2;\infty)$. **243.** в) 0,7. Көрсөтмө. $f(0{,}8)<0$, $f(0{,}6)>0$ экендигин текшергиле. **244.** г) $(-\infty;1),(2;6)$. **245.** в) $(-\infty;\ -4),[-2;-1),[2;\infty)$. **246.** г) $(-\infty;-3]\cup(-1;1)\cup[3;\infty)$. **247.** г) $m>0$. **248.** г) $(-2;-1)$, $(1;2)$. $[2;\infty)$. **249.** в) $(-2;0),(0;3)$; г) $(-\infty;-5],[2;\infty)$. **250.** в) $(-\infty;-4]\cup[0;4]$. **253.** в) 3. **254.** г) 0. **255.** г) $y=3x+1, y=12x-17$. **256.** в) $y=2, y=1+\frac{\pi}{2}-x$. **257.** в) $(-1\ -1)$, $(0;2),(1;-1)$. **258.** г) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\sqrt{2}(\frac{\pi}{4}+2\pi n-1)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\sqrt{2}(2\pi n+1-\frac{\pi}{4})\right)$, $n\in Z$. **259.** а) (0; 0) чекитинде arctg3, $(-\sqrt{3};0)$; жана $(\sqrt{3};0)$ чекиттеринде $\pi-\mathrm{arctg}\,6$; г) $(\frac{\pi}{2}+2\pi n;0)$ чекиттеринде $\frac{\pi}{4}$, $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;0)$, $n\in Z$ чекиттеринде $\frac{3\pi}{4}$. **260.** а) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **261.** в) 24,52 − 0,16; г) 40,52, 9,86. **263.** г) 2,0004. **264.** г) 0,9302. **265.** в) 0,526. **266.** в) 0,1247. **267.** а) $(-t^2+4t+5)$ м/с; в) 5с. **268.** 35м/с; 22м/с². **269.** $(6t-4)$ рад/с, 20 рад/с. **270.** а) 2,8 рад/с. **271.** $12t$ см/с; а) $\frac{1}{12}$ с; б) $\frac{1}{6}$ с. **272.** а) 6с; б) 18м/с. **274.** 22 т. **275.** а) $0{,}04H$; б) 0,0025 Дж.

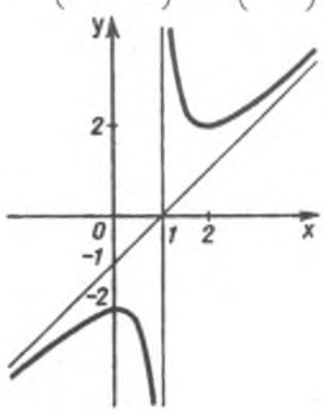


6-сүрөт

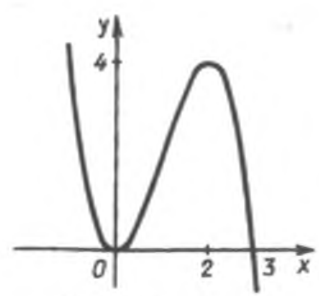


7-сүрөт

**276.** а) 65 г/см; б) 125 г/см. **277.** $0 < t < 2\frac{2}{3}$. **278.** $t > 0$ учурда $\frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}}$.
**280.** $(-\infty; -3]$, де $[3; \infty)$ өсөт; $[-3; 3]$ тө кемийт. **281.** в) $(-\infty; -2]$, $[2; \infty)$ де өсөт, $[-2; 2]$ де кемийт. **283.** Функциянын графиги 6-сүрөттө көрсөтүлгөн. **284** .в) Функциянын графиги 7-сүрөттө көрсөтүлгөн. **286.** г) $(-\infty; 0)$ жана $(2; \infty)$ аралыктарындагы $x$ үчүн $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$, $f'(x) < 0$, демек, $[-2; 0]$ жана $[2;3]$ $f$ функциясы кемийт, $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$, $f(3) < 0$, тамырлар жөнүндөгү теорема боюнча $[-2; 0]$ жана $[2; 3]$ аралыктарынын ар биринде теңдеме бир гана чыгарылышка ээ. **287.** б) $x_2, x_4, x_5, x_6, x_7$. **288.** в) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; г) $\pm 2$. **290.** в) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$; г) $x_{min} = \pm 1$, $x_{max} = 0$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x) \neq 0$ эч бир $x$ тер үчүн эмес; $x = 0$ учурда $f'(x)$ тин мааниси жок, бирок бул чекит $[0; \infty)$ аралыгынын ички чекити болуп эсептелбейт. **292.** в) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; г) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **293.** в) $\pm 3$; г) $0; \pm 2$. **295.** г) Функциянын графиги 8-сүрөттө көрсөтүлгөн. **297.** Функциянын графиги 9-сүрөттө көрсөтүлгөн. **298.** г) $(-\infty; -1]$, $[5; \infty)$ де өсөт, $[-1; 5]$ те кемийт. **300.** в) $D(f) = E(f) = R$; $f$ — так; $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$ учурда $f(x) = 0$; эгерде $x \in \left(-\sqrt{\frac{20}{3}}; 0\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{20}{3}}; \infty\right)$ болсо, анда $f(x) > 0$; эгерде $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$, $x \in \left(0; \sqrt{\frac{20}{3}}\right)$ болсо, анда $f(x) < 0$; $(-\infty$; $(-\infty; -2]$, $[2; \infty)$ де $f$ өсөт; $[-2; 2]$ д е $f$ к е м и й т ; $x_{max} = -2$, $f(-2) = 4\frac{4}{15}$, $x_{min} = 2$, $f(2) = -4\frac{4}{15}$; г) $D(f) = E(f) = R$; $f$ -так функция; эгерде $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ болсо, анда $f(x) = 0$; эгерде $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $x \in \left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ болсо, анда $f(x) > 0$; эгерде $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right)$,



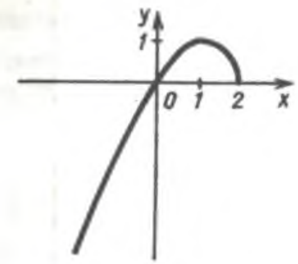
8-сүрөт



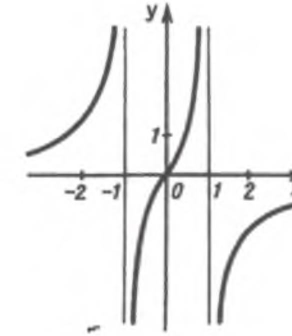
9-сүрөт





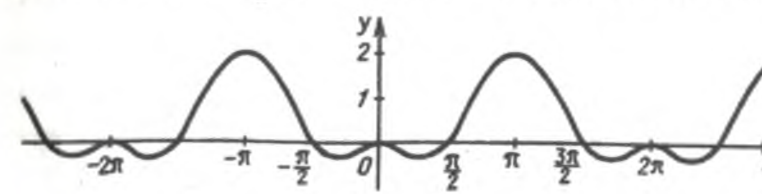


10-сүрөт



11-сүрөт

$x \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}}; \infty\right)$ болсо, анда $f(x) < 0$; $[-1; 1]$ де $f$ өсөт, $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$ де $f$ кемийт; $x_{min} = -1$, $f(-1) = -2$; $x_{max} = 1$, $f(1) = 2$. **301.** в), г) Функциялардын графиктери 10- жана 11-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. **302.** в), г) Функциялардын графиктери 12- жана 13-сүрөттөрдө көрсөтүлгөн. **304.** в) 2; г) 3. **305.** в) $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 56$, $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = -2$; $\max\limits_{[2;3]} f(x) = f(3) = 594$, $\min\limits_{[2;3]} f(x) = f(2) = 56$; г) $\max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2) = 2$, $\min\limits_{[1;5]} f(x) = 1{,}5$; $f(-3) = 1{,}5$; $\min\limits_{[1;5]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$; $\max\limits_{[1;5]} f(x) = f(5) = \frac{5}{6}$. **307.** 6с. 72м/с. **308.** $\min\limits_{[-2;5]} f(x) = f(-2) = 9$, $\max\limits_{[-2;5]} f(x) = f(2) = 25$. **309.** 10с.
**310.** $\max\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{3}$; $\min\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x) = f(\frac{3\pi}{2}) = -2$; $\max\limits_{[-5;-2,5]} f(x) = f(-3) = -4$, $\min\limits_{[-5;-2,5]} f(x) = f(-5) = -5\frac{1}{3}$. **311.** $24 = 12 + 12$. **312.** $4 = 2 + 2$. **313.** 12м, 12м. **314.** $54 = 12+24+18$. **315.** $16 = 4 \cdot 4$. **316.** 8см, 8см. **317.** Бийиктиги — 1,5 дм, негизинин жагы — 3 дм. Ч ы г а р у у. Бактын негизинин жагы $x$ болсун ($x > 0$). Анын бийиктигин көлөмү жана негизинин жагы менен туюнтабыз. $13{,}5 = x^2 \cdot h$, $h = \frac{13{,}5}{x^2}$. Бактын бетин табабыз: $S = x^2 + 4x \cdot \frac{13{,}5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x} \cdot (0; \infty)$ аралыгында $S(x) = x^2 + \frac{54}{x}$ функциясынын эң кичине маанисин табабыз.

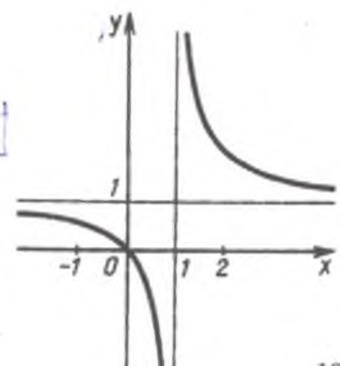


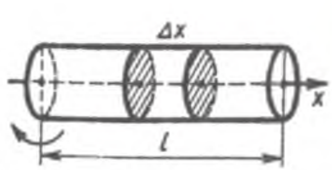
12-сүрөт

$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2}$, $x = 3$ — критикалык чекит. Функция $(0;3]$ тө кемийт, $[3;\infty)$ де өсөт. Демек, $\min\limits_{(0;\infty)} S(x) = S(3) = 27$. **318.** 30 см, 20 см. **319.** $20\sqrt{2}$ см, $20\sqrt{2}$ см. **320.** Айылдан 3 км алыстыктагы чекитте жана бургулоо мунарасы орношкон жерге жакынкы шоссенин чекитинен 12 км. **321.** $B$ дан 1 км аралыктагы $AB$ кесиндисинин чекитине. **322.** $-0{,}5$. **324.** Квадрат.

## III глава

**327.** г) Жок. **329.** Мисалы, $-4x$. **331.** в) Жок. **332.** в) Мисалы, $x$. **334.** г) $f(x) = 3 - 2\sin x$. **336.** в) $x + \frac{1}{3x^3} + C$. **337.** г) $-\cos x - 2$. **339.** в) $-\cos(x + \frac{\pi}{3}) - 2$. **341.** г) $x(t) = -\cos t$. **343.** г) $-\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) + C$. **344.** в) $-\frac{4}{3(3x-1)} + C$. **345.** г) $-\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4{,}5$. **346.** в) $\frac{2}{3}tg(3x+1) - 3\cos(4-x) + x^2 + C$. **347.** г) $-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4\frac{1}{3}$. **348.** $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$. **349.** $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + 2$. **350.** $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$. **351.** г) $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + t - 1\frac{2}{3}$. **352.** в) $-2$; экинчи. **353.** в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **354.** в) $10\frac{2}{3}$; г) $\pi + 1$. **355.** в) $1\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$. **356.** в) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **357.** г) 1. **358.** в) 0,9. **360.** г) $10\frac{2}{3}$. **361.** г) $5\frac{1}{3}$. **362.** г) 4. **363.** в) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}$. **364.** г) $\sqrt{3 - \frac{\pi}{3}}$. **365.** г) 4,5. **366.** г) $\frac{1}{12}$. **367.** $5\frac{1}{3}$. **368.** 4,5. **369.** а) $F(x)$ – бул $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы, ал эми $g(x)$ функциясынын баштапкы функциясы $G(x)$ болсун дейли. Анда $f(x) + g(x)$ функциясынын баштапкы функциясы $F(x) + G(x)$ болот. Ошондуктан $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. **370.** г) $\frac{16\pi}{15}$. **371.** $\frac{\pi}{6}$. **372.** а) $\frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$; б) $\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. **373.** 0,16 Дж. **374.** 0,16 Дж. **375.** $\gamma q(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$. Көрсөтмө. $F(x) = -\frac{\gamma q}{x^2}$, мында $\gamma > 0$ — кандайдыр бир турактуу сан. Ошондуктан $A = \int_a^b \left(-\frac{\gamma q}{x^2}\right)dx = \frac{\gamma q}{x}\Big|_a^b$. **376.** $\frac{(a+2b)h^2}{6}\rho g$ (376—378-көнүгүүлөрдө $\rho$ — суунун тыгыздыгы, $g$ — эркин түшүүнүн ылдамдануусу). Көрсөтмө. Пластинканын суюктукка жасаган басымынын күчү (вертикалдык абалда матырылгандагы) $\rho = \rho g\int_{h_1}^{h_2} S(x)dx$ формуласы аркылуу эсептелет, мында $S(x)$ пластинканын аянты, матыруунун $h$ тереңдиги $h_1$ де $h_2$ ге өзгөрөт. **377.** $\frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}$. **378.** $\frac{3}{4}\pi R^4 \rho g$. **379.** $\frac{\rho S\omega^2 l^3}{6} = 4160000\pi^2$ эрг. Чыгаруу. 14-сүрөттө көрсөтүлгөн таякчанын массасы $\rho S\Delta x$ ке барабар; таякчанын диаметрин эске албайбыз (белгиленген бөлүктү $\Delta x$ кесиндисинин узундугу деп алабыз), анда $\Delta x$ тин кичинелик даражасына ылайык ар бир чекиттин сызыктуу ылдамдыгы $\omega x$ ке барабар. Таякчанын $[0;x]$ бөлүгүнүн кинетикалык энергиясын $E(x)$ аркылуу белгилейбиз. $[x; x + \Delta x]$ кесиндисинин эсебинен болгон кинетикалык энергиянын өсүндүсү болжол менен алганда $\frac{mv^2}{2}$ге барабар, б.а. $\frac{\rho S\omega^2 x^2\Delta x}{2}$, ошондуктан $E'(x) = \frac{\rho S\omega^2 x^2}{2}$; $E(0) = 0$, ошондуктан, изделүүчү энергия төмөнкүдөй болот: $E(l) = \int_0^l E'(x)dx = \int_0^l \frac{\rho S\omega^2 x^2 dx}{2} = \rho S\omega^2 \int_0^l \frac{x^2}{2}dx = \frac{\rho S\omega^2 l^3}{6}$. **380.** Чокусунан баштап эсептегендеги конустун бийиктигинен 3/4 алыстыкта турган анын бийиктигинин чекити.



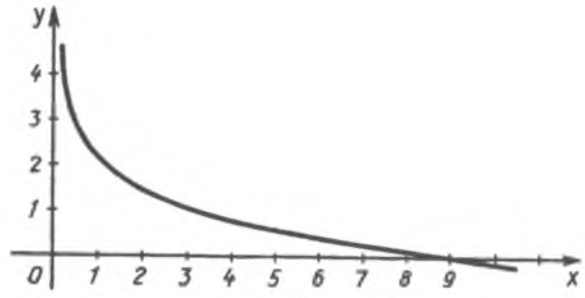

13-сүрөт





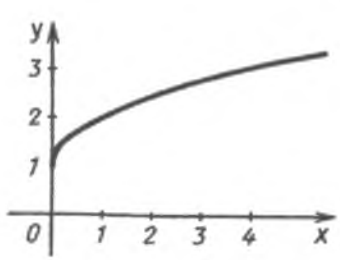
## IV глава

**384.** в) $-\frac{3}{2}$. **386.** в) $\pm 2$. **387.** г) $\pm\sqrt{17}$. **388.** г) $-1$. **391.** в) 6. **392.** $-5$. **393.** г) 2. **394.** в) $\frac{5}{4}$. **395.** г) 1,44. **396.** г) 2,22. **397.** в) 1,29. **399.** в), г) Биринчиси кичине. **400.** в), г) Биринчиси чоң. **401.** в) Биринчиси чоң. **402.** в) $a^3b\sqrt[4]{6b^2}$. **403.** г) $\sqrt[3]{4a^3b^3}$. **404.** в) $a \geq 0$; г) $a \geq 0$; **405.** а) $a = 0$; б) $a \leq 0$; г) бардык $a$ үчүн. **406.** г) $\frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}$. **407.** г) $\frac{\sqrt[3]{5^4}}{3}$. **408.** г) $5\sqrt[4]{4}$ **409.** г) $\frac{1}{2}\sqrt[12]{320}$. **410.** г) $6^6$. **411.** г) $(-\infty; \sqrt[3]{5}]$. **412.** г) $[0; 81]$. **414.** в) 0. **415.** г) 2. **416.** в) $\frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49}}{6}$. **417.** в) $\pm 6$. **418.** г) 8. **419.** г) 0, $-1$. **420.** в) $-10$; 2. **421.** в) (16; 81). **422.** г) 0; 0,4. **424.** г) $-12$. **425.** г) $\pm 2$. **426.** в) (16;4), (36; $1\frac{7}{9}$). **427.** г) (27; 1), ($-1$;$-27$). **428.** г) $\sqrt{6^{-3}}$. **429.** в) $b^{-\frac{7}{13}}$. **430.** в) 32. **431.** в) $\frac{128}{27}$. **432.** г) $x^{\frac{1}{2}}(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})$. **433.** г) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + 1)$. **434.** г) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$. **435.** г) $x - 1$. **436.** г) Биринчиси кичине. **437.** г) 10. **438.** $-\frac{1}{\sqrt{2m}}$. **440.** г) $\sqrt[24]{b^7c^6}$. **441.** в) Барабар. **442.** г) Жок. **443.** в) $(0;\infty)$. **444.** в) $a = \pm 1$; г) $a = 0$. **446.** г) $(-2;\infty)$. **447.** Биринчиси кичине. **448.** г) 9. **450.** г) $|x^n - y^n|$. **451.** в) 169,8; 173,8. **452.** $10^{\sqrt{5}} \approx 172{,}4$. **453.** г) $y = (3 - \sqrt{7})^x$ – кемийт, $y = (\frac{1}{3 - \sqrt{7}})^x$ – өсөт. **454.** г) $[1;\infty)$. **455.** г) $-1; -1\frac{2}{3}$. **457.** в) 0; г) 1. Көрсөтмө. Графиктин эскизинин жардамы менен кесилишүү чекитинин абциссасын «болжолдоп» табабыз: $x = 1$, башка

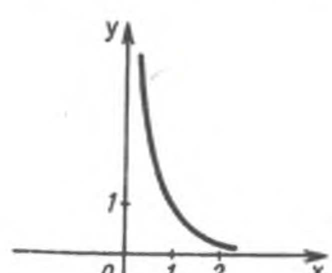


15-сүрөт

кесилишүү чекиттери жок экендигин далилдөө калды. Ал үчүн көрсөткүчтүү жана сызыктуу функциялардын туура келүүчү кесиеттерин пайдаланышыбыз керек. $x > 1$ учурда $y = 4^x$ функциясы 4төн чоң мааниге ээ, ал эми $y = 5 - x$ функциясы — 4 төн кичине. ($x < 1$ учурда функциялар өз ара — 4 төн кичине жана чоң маанилерге ээ.) Демек, графиктер башка кесилүү чекиттерине ээ эмес. **458.** г) −1. **461.** в) 4; г) $\frac{1}{4}$. **462.** в) 4; г) −3; 1. **463.** в) 3; г) −1. **464.** в) 1; г) 1; 0. **465.** в) (−2; −3); г) $(\frac{1}{2}; 4)$. **466.** в) $[2;\infty)$; г) $(-\infty;2)$. **467.** в) $(-\infty;0{,}5)$; г) $(-1;\infty)$. **468.** в) −2; г) 2. **469.** в) −1; г) 2. **470.** в) 2; г) 2. **471.** в) (1;2), (2; 1); г) (2; 1,5). **472.** в) $[-3;-1]$; г) $(-\infty;-\frac{2}{3}),(4;\infty)$. **473.** в) $(-2;\infty)$; г) $(-\infty;1)$. **474.** в) $(2;\infty)$; г) $[-1;\infty)$. **475.** в) $(-\infty;0]$; г) $[1;\infty)$. **484.** г) $\frac{1}{49}$. **485.** г) 8. **486.** г) 3. **487.** г) $\log_5 5, \log_5 \frac{1}{25}$, $\log_5 1, \log_5 125$. **489.** г) $\frac{1}{2}$. **490.** г) $\frac{1}{25}$. **491.** г) $2\log_3 b - 3 - 7\log_3 a$. **493.** г) $\frac{7}{4}\lg c - 7 - \frac{2}{3}\lg a - 8\lg b$. **494.** г) $1 + a + b$. **496.** в) −2. **497.** в) $\frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}$. **498.** в) Чыгаруу. Барабарсыздыктын оң жана сол жагындагы туюнтмалардын айырмасын карап, аны нөл менен салыштырабыз: $\log_3 7 + \frac{1}{\log_7 3} - 2 = \frac{\log_3^2 7 - 2\log_3 7 + 1}{\log_7 3} = \frac{(1-\log_3 7)^2}{\log_7 3} > 0$. г) Чыгаруу. Барабардыктын сол жагын өзгөртүп түзөбүз:



16-сүрөт

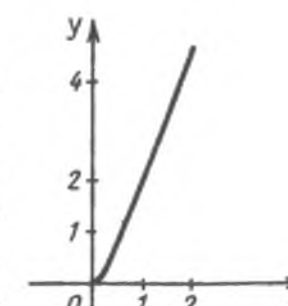


17-сүрөт





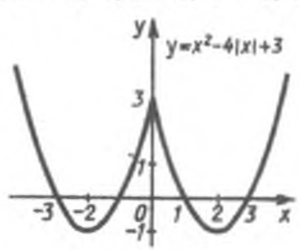
$3^{\log_2 5} = (5^{\log_5 3})^{\log_2 5} = 5^{\log_5 3\cdot\log_2 5} = 5^{\frac{\log 2\,3}{\log 2\,5}\cdot\log 2\,5} = 5^{\log 2\,3}$. **499.** г) $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$. **500.** в) $(-\frac{2}{3};2\frac{1}{2})$. **502.** в), г) Биринчиси кичине. **503.** в), г) Биринчиси чоң. **505.** в) $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n), n\in Z$. **506.** в), г) 0. **507.** г) Функциянын графиги 15-сүрөттө көрсөтүлгөн. **508** г) $\pi^{-2}$. **509.** в) 5. **510.** г) Жок. **511.** в) 0; −1. **512.** в) $\log_2 10$. **513.** г) 100. **514.** в) −2,35. **515.** в) $\frac{2}{3} - \log_3 2$. **516.** в) $(0{,}7;\infty)$; **517.** в) $(8;\infty)$; г) $(12;\infty)$. **518.** в) 5; г) 0. **519.** в) 2; г) 0; 8. **520.** в) 25; $\frac{1}{5}$; г) 27, $\frac{1}{3}$. **521.** в) (32; 2), 2; 32), г) (1; 1). **522.** в) 4; г) 100, $10^8$. **523.** в) 9; $\frac{1}{2}$. **524.** в) 2; г) 2. **526.** в) (1; 3); г) $(-4;-3)\cup(4;5)$. **527.** в) $(0;0{,}001)\cup(10;\infty)$; г) $[\frac{1}{27};27]$. **528.** $(-\frac{\pi}{4}+\pi n;-\frac{\pi}{6}+\pi n)\cup$ $\cup(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n), n\in Z$; г) $(\sqrt[3]{0{,}1};10)$. **529.** в) $(\frac{1}{27};3)$; г) (9; 7). **530.** в) (2; 6); г) (9; 6). **531.** в) $g(x) = \frac{1-x}{2}, D(g) = E(g) = R$. **532.** г) $g(x) = x^2 - 1$, $D(g) = [0;\infty)$. $E(g) = [-1;\infty)$. **533.** График 16-сүрөттө көрсөтүлгөн. **535.** в) $g(x) = x^4, x \le 0$; г) $(x) = \sqrt[3]{x-1}$. **538.** в) $-\frac{1}{2}e^x$. **539.** г) $2xe^x + x^2e^x$. **540.** в) $y = 1 + x$; г) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)\ln 2$. **541.** г) $\frac{1}{2}e^x + x + C$. **542.** в) $\frac{7}{4\ln 2} \approx 2{,}5247$. **543.** $-2^{-x}\left(\ln 2\cdot ctg\frac{x}{3} + \frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\right)$ **544.** в) $\frac{3^x(2^x\ln 1{,}5 + 5^x\ln 0{,}6}{(2^x+5^x)^2}$. **545.** в) $(-\infty;1]$ де өсөт, $[1;\infty)$ де кемийт; $x_{max} = 1, f(1) = \frac{1}{e}$. **546.** г) $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2{,}3^{x+1}}{\ln 2{,}3} + C$. **547.** г) $\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$. **548.** в) $\frac{3}{\ln 2} - 2 \approx 2{,}3$. **549.** в) $\frac{5}{1+5x}$. **550.** г) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **551.** в) $\ln|x+2| + C$. **552.** г) $y = \frac{x-2}{\ln 2}$. **553.** г) $\frac{1}{3}\ln 10 \approx 0{,}7675$. **554.** в) $\frac{x(2\ln 5x - 1)}{\ln^2 5x}$. **555.** в) $(0;\frac{1}{2}]$ де өсөт, $[\frac{1}{2};\infty)$ де кемийт $x_{min} = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = 1 + \ln 2$. **556.** в) $(0;e^2]$ та өсөт, $[e^2;\infty)$ де кемийт, $x_{max} = e^2$, $f(e^2) = \frac{2}{e}$. **557.** в) $\frac{1}{2}\ln 8 \approx 1{,}0397$. **558.** г) $-\sqrt{5}x^{-\sqrt{5}-1}$. Графиги 17-сүрөттө көрсөтүлгөн. **559.** г) $2\ln 3 \times$ $\times (2x)^{\ln 3 - 1}$, графиги 18-сүрөттө көрсөтүлгөн. **560.** г) 2,63. **561.** г) 2,0125. **562.** г) 27, $\frac{1}{8}$. **563.** г) $\frac{x^{e+1}}{e+1} + C$. **564.** г) 844. **565.** г) $\ln 1\frac{2}{3} \approx 0{,}5108$. **567.** в) Жок; г) $x_0 = 0$. **572.** г) Мисалы, $y = 2\cos\frac{x}{2}$. **573.** в) $x'' = -9x$. **575.** в) $\frac{t\ln 2}{\ln m - \ln n}$. **576.** 9 мүнөт **577.** $\frac{1}{\lg 2}$ саат ≈ 3,322 саат; 0,6394. **578.** $\frac{10\lg 2}{\lg 1{,}6}$ мүнөт ≈ 14,75 мүнөт **580.** $500e^{-5}$ м/мүнөт ≈ 3,37 м/мүнөт



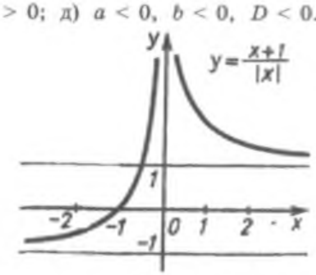
18-сүрөт

## V глава

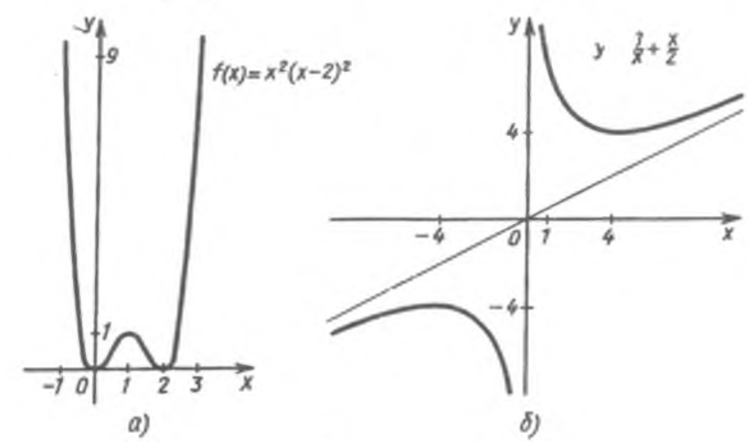
1. а) Ооба; б), в) жок; г) ооба. 3. а) 52305; 52335; 52365; 52395; 52320; 52350; 52380; б) 52344. 5. 35. 6. Көрсөтмө. $\frac{ab}{a+b}$ бөлчөгү $d$ санына бөлүнбөйт дейли, мында $d$ – бул $ab$ нын бөлүүчүсү, ошондуктан же $a$, $d$ сандарынын, же $b$, $d$ сандарынын жалпы бөлүүчүсү $d'$ бар; аныктык үчүн $d'$ – бул $a$ жана $d$ сандарынын бөлүүчүсү болсун дейли, анда $a+b$ саны $d'$ ке бөлүнөт, демек, $b$ сfys $d'$ ке бөлүнөт, андан, $\frac{a}{b}$ бөлчөгү $d'$ ке бөлүнөт. 13. в) $1\frac{8}{90}$. 14. а) $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$, $p\in Z$, $q\in N$ дейли, мында $\frac{p}{q}$ – кыскарбас бөлчөк, $\frac{p}{q}>0$, ошондуктан $p$ жана $q$ сандарды натуралдык сандар деп эсептөөгө болот. Анда $5=\frac{p^2}{q^2}$, б.а. $p^2=5q^2$ мындан $p^2$, демек, $p$ дагы 5 ке бөлүнөт, б.а. $p=5k$. $p=5k$ ны $p^2=5q^2$ барабардыгына коюп, муну алабыз: $25k^2=5q^2$, $q^2=5k^2$. Акыркы барабардыктан $q$ саны 5 ке бөлүнөрүн көрөбүз. Карама-каршылык келип чыкты: мында $\frac{p}{q}$ бөлчөгү 5 ке кыскарат; в) эгерде $\sqrt{5}+1=r$ болсо (мында $r$ — рационалдык сан), анда $\sqrt{5}=r-1$ —рационалдык болот, бул $\sqrt{5}$ санынын иррационалдык экендигине каршы келет. 31. 87 же 69. 32. 0. 34. $b_1=0{,}2$; $q=5$. 36. 5. 37. 12, 5; 7,5; 4,5; 1,5 же 2; 4; 8; 12. 38. $q=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $S=3$. 39. $b_1=6$; $q=0{,}5$. 43. г) $\frac{x-3}{y}$. 44. г) 2. 45. г) 3. 47. в) 1; г) 1. 48. в) $x\sqrt{x}-\sqrt{x}$. 49. г) $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. 50. б) $ab^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})$; г) $-\frac{c^{2,5}}{c^2+2}$. 51. в) $c^{\frac{1}{2}}$; г) 3. 52. б) $|\sin\beta+\cos\beta|$; г) $\sin\beta$. 53. в) 1. 58. б) $\frac{1-m}{1+m}$; г) $\sin a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos 2a=-\frac{7}{9}$. 59. а) 0. 60. а) 0дөн кичине. 61. 1. 62. г) Биринчиси чоң. 63. в) Биринчиси чоң. 64. а) $4\frac{3}{4}$. 65. б) 0,34. 66. в) –3; г) 1. 67. б) $4+4\log_{0,2}b-\frac{9}{7}\log_{0,2}c$. 68. б) 14. 69. г) 365,06446. 70. $\lg 2\approx 0{,}3010$. 71. 2—А. 73. б) $S=3\sqrt[3]{\frac{16v^2}{3}}$. 77. в) $(-\infty;-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};-2)\cup(2;\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\infty)$. 80. в) $(-\infty;\frac{8}{3})$ жана $(5;\infty)$ де $f(x)>0$, $(\frac{8}{3};5)$ те $f(x)<0$. 81. г) $(-\infty;1)$ де жана $(1;\infty)$ де кемийт. 85. г) 19-сүрөттү кара. 86. а) 20-сүрөттү кара. 87. в), г) Ооба. 88. в) $f(x)=x^5+3x-5$, болсун дейли, мында $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз, ошондой эле $f(1)=-1<0$, $f(2)=33>0$. 91. $a=3$, $b=-5$. 92. в) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $D<0$; г) $a<0$, $b<0$, $c=0$, $D>0$; д) $a<0$, $b<0$, $D<0$. 93. а) Мүмкүн ($y=ax^2+b$ түрүндөгү квадраттык жана $y=b$ түрүндөгү сызыктуу). 94. в) $y=\frac{x^2}{x^4-1}+\frac{x^3}{x^4-1}$. 96. $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$ түрүндөгү сандардан башка бардык сандар. 97. в) $[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n]$, $n\in Z$. 98. г) $[-1;\ 1]$. 99. г) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$. 100. в) $(-\frac{5\pi}{2}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+4\pi n)$ де $y>0$, $(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{3\pi}{2}+4\pi n)$, $n\in Z$ те $y<0$. 101. в) Так; г) жуп. 102. г) $\pi$. 103. в) $[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n]$ де кемийт, $[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n]$ де өсөт, $x_{\min}=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 104. г) $\min\limits_{D(y)} y=1$, $\max\limits_{D(y)} y$ жок. 105. б) Көрсөтмө. $y=|\sin x|$. 108. Ооба. 109. в) $tg2<-1<ctg2$. 111. в) 0; г) 0. 112. в) $(-\infty;0)\cup[1;4]$. 113. в) $(-\infty;\infty)$; г) $(2\pi n;\pi+2\pi n)$, $n\in Z$. 114. в) $(\frac{2}{3};2)\cup(2;\infty)$. 115. г) $(0;\infty)$. 116. в) $[1;\infty)$. 117. в) $(-\infty;\log_3 2)$ де $y>0$, $(\log_3 2;\infty)$ де $y<0$. 118. в) $[0;\infty)$ де $y>0$. 119. в) Так эмес, жуп эмес. 120. в) Жуп. 123. а) Көрсөтмө. $x>1$ учурда $y=x-1$, $D(y)=(1;\infty)$. 124. г) $\min\limits_{[-1;8]} y=y(1)=4$, $\max\limits_{[-1;8)} y=y(-1)=4$. 125. г) $\pm3$. 126. г) (0;3). 128. а) 0; $\frac{\sqrt{65}-1}{8}$. 133. г) $\left[\frac{14}{11};\infty\right)$. 134. в) [1; 13]; г) [–1; 5]. 135. г) –3,5 жана $[3;\infty)$. 137. в) –6; г) 2; $-\frac{34}{99}$. 138. а) 1; 2; $-7\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{2}$; 4; г) 0; –1; 3. 139. а) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{37}{9}$; г) $\frac{215}{27}$. 140. в) $-\frac{4}{3}$; г) –4; $\frac{4}{3}$. 141. в) –1; г) 1. 142. в) $(-\infty;\infty)$; г) (1; 13). 143. г) $(-\infty;-4)\cup(6;\infty)$ 144. в) $(1;3)\cup(3;5)$; г) (3; 4). 146. в) 2; г) –4; 4. 147. в) 2; г) 63. 148. в) 4; г) $-\frac{1}{3}$; 0. 149. в) –8; 8; г) –1; –3. 150. в) $(-\infty;-\sqrt{17}]\cup[\sqrt{17};\infty)$; г) $(9;\infty)$. 151. в) [2; 3]; г) [–3; 5]. 152. а) $-\pi+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in Z$ б) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}+\pi n$ (же $arctg\,0{,}5+\pi n$, $n\in Z$ — экинчи жообу); г) $arctg\,0{,}5+\pi n$, $n\in Z$. 153. в) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in Z$; г) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n$, $n\in Z$. 154. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; г) $2\pi n$, $2\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 155. в) $\frac{\pi n}{2}$,



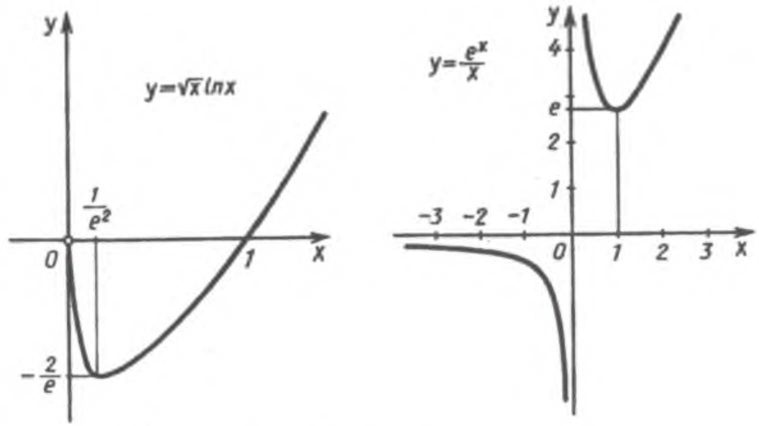

19-сүрөт




20-сүрөт




21-сүрөт



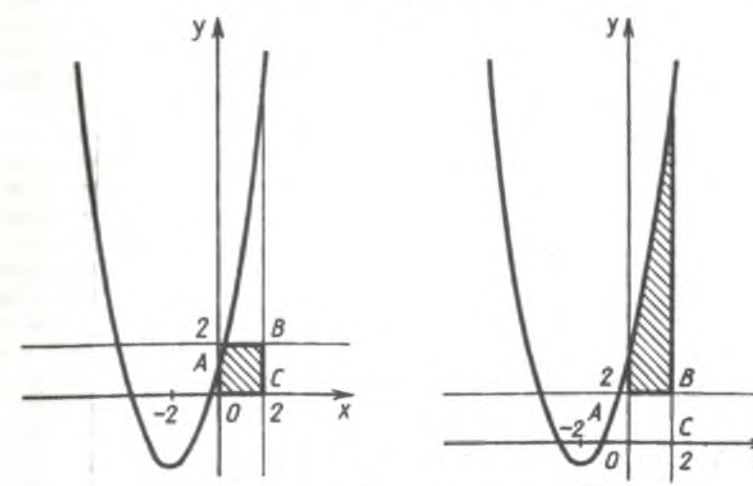

а) 22-сүрөт б)

$n \in Z$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}; -\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$. **156.** в) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. г) $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$. **157.** в) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; г) $\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$. **158.** а) $-\frac{5}{4}$; б) 0; в) $-2\sqrt{3}-2$; г) $\varnothing$. **159.** в) $(\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5})$, $n \in Z$; г) $[-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}]$, $n \in Z$. **160.** в) $[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n]$, $n \in Z$; г) $(-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n] \cup [\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n \in Z$. **161.** а) $[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n]$, $n \in Z$; в) $[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n]$, $n \in Z$; г) $(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n \in Z$. **162.** а) $(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$, $n \in Z$; г) $(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n$. **163.** в) 1; 5; г) 3; 9. **164.** в) 2; г) 1. **165.** в) 3; г) 0; $\frac{1}{4}$. **166.** в) $\pm\log_{\frac{5}{2}} 2$; г) 0; $\frac{1}{2}$. **167.** б) $\pm\arccos(\sqrt{2}-1)+2\pi n)$, $n \in Z$; г) $-1$. **168.** в) $(-\infty; -\frac{4}{3})$; г) $(-\infty; -4) \cup (3; \infty)$. **169.** в) (1; 3); г) $(-\infty; -1] \cup [(0; \infty)$. **170.** б) $(-5; 3) \cup (4; \infty)$. **171.** в) 6; г) 1001; $1+\sqrt[3]{10}$. **172.** в) 10; г)3. **173.** г) 64. **174.** в) 100; $\frac{1}{100}$; г) 3; 9. **175.** а) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; б) $\arcsin\frac{1}{14}+2\pi n$, $n \in Z$. **176.** а) $(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4)$; г) $(\sqrt{7}-\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$. **177.** а) (0; 6); г) $(1; 2] \cup [3; 4)$. **178.** в) $(2; \infty)$; г) $(\frac{5}{3}; \infty)$. **179.** в) $(0; 0{,}1] \cup [100; \infty)$; г) $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$. **180.** в) $(\frac{31}{7}; \frac{9}{7})$; г) $\varnothing$. **181.** в) (0,4; 0,8); г) (2; 3); (3; 2). **182.** в) (0,5; 4); г) (7; 3); (−7; −3). **183.** в) (1; 2); (2; 1); г) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}); (\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$. **185.** в) $[-3; \frac{4}{3})$; г) (−3,5; 0). **186.** в) (25; 49); г) (9; 16); (16; 9). **187.** в) (16; 4); г) (16; 4); (−4; −16). **188.** в) (81; 16); г) (−1; −8); (−8; −1). **189.** а) $(\frac{\pi}{4}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n+\frac{\pi k}{2})$, $k, n \in Z$; б) $(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}; \frac{\pi}{2}+\frac{1}{6})$, $n \in Z$; в) $(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k)$, $(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k)$, $k$, $n \in Z$; г) $(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+2\pi n)$, $k$, $n \in Z$. **190.** б) $(\pi n; \frac{5\pi}{2}-\pi n)$; $((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;$





$\frac{5\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\pi n)$, $n \in Z$; в) $(\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k)$, $(-\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k)$, $k \in Z$, $n \in Z$; г) $(\frac{\pi}{2}+\pi n, -\pi n)$, $(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n)$, $(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n)$, $n \in Z$. **191.** а) (2; 1); б) (5; 4); в) (5; 1); г) (3; 0). **192.** а) (1; 3); б) (3; 2); в) (2; 0); г) (2; 6). **193.** а) (2; 1); $(\log_3 7; \log_7 9)$; б) (4; 1). **194.** а) (100; 10); (0,1; 0,01); б) (4; 4); в) (1000000; 0,1); г) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **195.** а) (27; 4); $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; б) (2; −1); в) (125; 4); (625; 3); г) (3; 2). **196.** а) (4; 2); б) (25; 36); в) (1, 1); (4; 2); г) (512; 1). **197.** 75 км/саат. **198.** 4 км/саат. **199.** 55 км/саат. **200.** 18 км/саат, 24 км/саат. **201.** 10 с. **202.** 240 м³. **203.** 6 жана 12 күн. **204.** 20. **205.** 25%. **206.** 160 г, 20%. **207.** 60 км/саат. **208.** 21 м/с, 147 м. **209.** 6 км/саат, 4 км/саат. **210.** 20; 30. **211.** 20 жана 30 күн. **212.** 12 г, 48 г, 1,5 г/см³. **213.** 3 кг, 80%. **214.** 4 м/с, 3 м/с. **215.** 32. **216.** 8 жана 3; 28 жана 27. **218.** в) 3; г) 3. **219.** г) $\frac{(x^3-2)\sin x+3x^2\cos x}{(2-x^3)^2}$. **220.** г) $\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$. **221**. г) $\frac{e^x+e^{-x}-x(e^x-e^{-x})\ln x}{x(e^x+e^{-x})^2}$. **222.** г) $\frac{1}{x\ln 10}-\frac{6}{\cos^2(2x-\frac{\pi}{4})}$. **223.** г) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **225.** в) $f'(x_2)=f'(x_4)$; г) $f'(x_3)<0<f'(x_5)$. **228.** б) 25, 375; 9, 84. **229.** в) 1,005; г) $2+\frac{1}{1500}\approx 2{,}00067$. **230.** $[1;\infty)$ де өсөт, $(-\infty; 1]$ де кемийт, $x_{\min}=1$; г) $(-\infty; 4)$ тө жана $(4; \infty)$ де өсөт. **231.** в) $[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n]$, $[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n]$ де өсөт, $[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n]$, $[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$ кемийт, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x_{\max}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x_{\min}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; г) $(-\infty; \infty)$




а) 23-сүрөт б)

ге өсөт. **232.** а), б) 21-сүрөттү кара. **234.** а), б) 22-сүрөттү кара. **235.** в) $\max\limits_{[\frac{1}{2};1]} f = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{4}$, $\min\limits_{[\frac{1}{2};1]} f = f(1) = 3$; г) $\max\limits_{[-\pi;\pi]} f = f(-\pi) = \pi$; $\min\limits_{[-\pi;\pi]} f = f(\pi) = -\pi$. **236.** а) 10+0; б) 5+5. **237.** 10 см, 10 см. **238.** 72 см². **239.** $\frac{23}{410}$ саат. **240.** 2,4 м. **241.** $4\sqrt{2}$ м. **242.** $h = 2r$. **243.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **245.** $R = 1{,}5$ саат. **246.** $4R$. **247.** $H = R\sqrt{3}$. **248.** $b = \frac{40}{\sqrt{3}}$ см, $h = 40\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **249.** $R = \frac{\rho}{\pi + 4}$; $H = \frac{\rho}{\pi + 4}$. **250.** Жаныма чекиттен 1,5 $R$ аралыгында. **251.** $60^\circ$. **252.** $M(1;1)$. **253.** $\sqrt[3]{4V}$. **254.** а) $(0;\frac{1}{2})$; б) $(6;\infty)$. **255.** 3,5 рад/с. **256.** 0,04 $\pi$ см²/с. **257.** 8 км/саат. **258.** $|v| = 1{,}5$ м/с. **259.** $\frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}$ м/с, $\frac{100}{\sqrt{(25 - 4t^2)^3}}$ м/с². **260.** 1) 360 г; $5x$ г/см; 2) 0; 60 г/см. **261.** $3\pi$ рад/с. **262.** а) 85 м; б) 4 с, 90 м. **263.** а) $M(-1;-1{,}5)$; б) $M(1;-1{,}5)$. **264.** $-\frac{1}{3}$;0. **266.** Бардык $x$ үчүн. $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$. **268.** в) $2x + 3\ln|x - 1| + C$; г) $\mathrm{tg}2x - \mathrm{ctg}3x + C$. **269.** в) $-\frac{1}{3x^3} - 2\frac{23}{24}$; г) $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$. **270.** $x^2 - 3x + 4$. **271.** $y = x^3 - 5$. **272.** $-\frac{1}{4}\cos 2t + 3$. **273.** в) $\frac{7 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{12}$; г) 39. **274.** а) 2; −2; б) 0,5; −0,5. **275.** в) $\frac{4}{3}$; г) 9. **276.** 18 жана $\frac{74}{3}$. **277.** $10\frac{2}{3}$. **278.** $\frac{2}{3}$. **279.** 2; 1. **280.** $\frac{8}{3}$. Чыгаруу. Көрсөтүлгөн фигура сүрөттө штрихтелген (23-*а*, сүрөтто $a < 2$ учуруна, ал эми 23-*в*, сүрөт $a \geq 2$ учуруна туура келет). $a < 2$ болгондо бул фигуранын аянты $OABC$ квадратынын аянтынан кичине жана ал 4кө барабар, ал эми $a \geq 2$ учурда $S = \int_0^2 (x^2 + 4x + a)dx - S_{OABC} = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax\right)\Big|_0^2 - 4 = \frac{8}{3} + 8 + 2a - 4 = 2a + \frac{20}{3}$, демек, $2a + \frac{20}{3} = 12$, мындан $a = \frac{8}{3}$. **281.** $a = \frac{2}{\pi}$, $b = 2$.





# ПРЕДМЕТТИК КӨРСӨТКҮЧ

# МАЗМУНУ

Учебное издание

**Колмогоров Андрей Николаевич**
**Абрамов Александр Михайлович**
**Дудницын Юрий Павлович и др.**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА**

**Учебник для 10—11 классов средней школы**

Переводчики: *Саламатов Жолдон, Бараталиев Керим*

**Издание второе**

Бишкек, ОАО «Акыл» — издательство «Мектеп»

*(На кыргызском языке)*

Окуу китеби

**Колмогоров Андрей Николаевич**
**Абрамов Александр Михайлович**
**Дудницын Юрий Павлович ж. б.**

**АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ**

**Орто мектептин 10—11-класстары үчүн окуу китеби**

**Экинчи басылышы**

Которгондор: Саламатов Жолдон, Бараталиев Керим

Редактору *Ж. Мундузбаева*
Сүрөт редактору *К. Коёналиев*
Техникалык редактору *Ж. Сооронкулова*
Корректору *Э. Маматкожоева*
Компьютердик калыпка салган *Ж. Керимбаева*

ИБ № 5576

Терүүгө 24.04.03-ж. берилди. Басууга 19. 06. 03-ж. кол коюлду. Офсет кагазы. Кагаздын форматы 60x90 $^{1}/_{16}$. Мектеп арипи. Түстүү ыкма менен басылды. 22,5 физ басма табак. + 0,25 ф-ц. 22,5 шарттуу басма табак. + 0,25 ф-ц. 26,9 учеттук басма табак. + 0,35 ф-ц. Нускасы 40 000. Заказ 1543. Келишим баада.

«Акыл» ААК, «Мектеп» басмасы. 5627
720361, ГСП, Бишкек ш., Совет көчөсү, 170.

Контракт LCB TB4 (1)

«Учкун» АКсында басылды.
720030, Бишкек ш., С. Ибраимов көч., 24.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\qquad$ $\sin' x = \cos x$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad$ $\cos' x = -\sin x$

$\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\ln' x = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$



$C' = 0$ $\qquad$ $(uv)' = u'v + uv'$

$(Cu)' = Cu'$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\qquad$ $u'(kx) = ku'$

$F(x) = \int f(x)\,dx$ $\qquad$ $F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $\qquad$ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

$\int f(kx + b)\,dx = \dfrac{1}{k} F(kx + b)$