Пайда болгон үч бурчтуктун жактарын дагы тең экиге бөлүп, ал чекиттерди удаалаш туташтырган. Акыркы үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

**13.** Квадратка сырттан сызылган тегеректин аянтынын, ага ичтен сызылган тегеректин аянтына карата катышын тапкыла.

**14.** Эки тегеректин аянттарынын катышы 2 : 3 кө барабар. Алардын айланаларынын узундуктарынын катышын тапкыла.

**15.** Туура үч бурчтукка сырттан сызылган жана ичтен сызылган тегеректердин аянттарынын катышын тапкыла.

**16.** Радиусу 36 см, ал эми бурчу $120^{\circ}$ болгон сектордун аянтын тапкыла

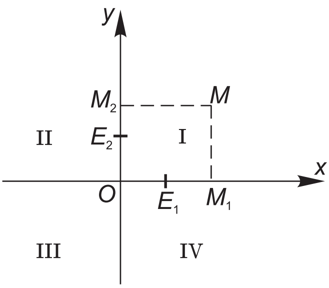
**17.** Радиусу $r$ ге барабар, бурчу $60^{\circ}$ болгон сегменттин аянтын тапкыла.

**18.** Радиусу $R$ ге барабар болгон тегерекке ичтен сызылган: 1) квадраттын; 2) туура үч бурчтуктун; 3) туура алты бурчтуктун сыртында жаткан тегеректин бөлүктөрүнүн аянттарын тапкыла.

# 9-класс

## *IX глава* ТЕГИЗДИКТЕГИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ ЖАНА ВЕКТОРЛОР

### § 43. ТЕГИЗДИКТЕГИ ЧЕКИТТИН КООРДИНАТАЛАРЫ



131-сүрөт.

Тегиздикте бири-бирине перпендикулярдуу болгон жана $O$ чекитинде кесилишүүчү эки окту алалы. Алардын бири горизонталдуу, экинчиси вертикалдуу болушсун. Горизонталдуу окту $x$ аркылуу белгилеп, **абсцисса огу** деп атайбыз, ал эми вертикалдуу окту $y$ аркылуу белгилеп, **ордината огу** деп атайбыз. Алардын багыттары тиешелүү стрелкалар менен көрсөтүлгөн (131-сүрөт). $x$ жана $y$ октору координаталар октору деп аталышат. $O$ чекити координаталар башталышы деп аталат.

Бул октор боюнча алынуучу масштаб бирдиктери бирдей болсун, аны $e$ деп белгилейли, б. а. $OE_1=OE_2=e$ болсун. Жалпы координаталар башталышы жана масштаб бирдиги менен жабдылган перпендикулярдуу эки октун чогуусу тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык[1] координаталар системасын же координаталык тегиздикти түзөт. Биз мындан ары жалаң гана тик бурчтуу декарттык координаталар системасынан пайдаланабыз. Ошондуктан аны $xOy$ координаталар системасы деп кыскача белгилеп жазабыз.

Координаталар октору тегиздикти төрт бөлүккө бөлөт. Аларды чейректер деп атайбыз.

Бул координаталык системага карата тегиздиктеги ар кандай чекиттин абалын аныктайбыз.

Тегиздиктеги каалаган $M$ чекитин алалы. Бул чекиттен координаталар окторуна $MM_1$ жана $MM_2$ перпендикулярларын

---

[1] Р. Декарт (1596–1650) француз математиги, координаталар методун негиздөөчү.

жүргүзөбүз. Анда $M_1$ чекити $M$ чекитинин $x$ огундагы проекциясы болот.

Ушундай эле $M$ чекитинин $y$ огундагы проекциясы $M_2$ чекити болот. Анда $OM_1=x\cdot e$, $OM_2=y\cdot e$ боло тургандай $x$, $y$ сандарын табууга мүмкүн.

Ошентип, тегиздикте $M$ чекити берилсе, анда алынган координаталар системасына карата, ага туура келүүчү $x$, $y$ сандары табылат, алар оң же терс маанилерге ээ болушу мүмкүн.

Эми, тескерисинче, эгерде $x$, $y$ сандары берилсе, анда берилген системага карата бул сандарга туура келүүчү $M$ чекитин таба алабыз. Ал үчүн $x$ огуна $O$ дон баштап, $e$ кесиндисин $x$ жолу өлчөп коюп $M_1$ чекитин, ал эми $y$ огуна ошол эле кесиндини $y$ жолу өлчөп коюп, $M_2$ чекитин табабыз. $M_1$, $M_2$ чекиттеринен $x$, $y$ окторуна параллель түз сызыктар жүргүзсөк, алардын кесилиши $M$ чекитин аныктайт. Демек $x$, $y$ сандары $M$ чекитинин абалын аныктоочу сандар болушат.

Мында $x$ саны $M$ чекитинин абсциссасы, $y$ — ординатасы деп аталышат. Жалпысынан, $x$, $y$ сандары $M$ чекитинин координаталары деп аталышат жана төмөндөгүдөй белгиленет (чекитти жазып, координаталарын кашаага алабыз да, арасына үтүрлүү чекит коебуз): $M(x, y)$.

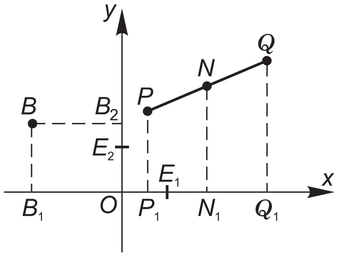
Ошентип тегиздиктеги ар кандай чекитке $x$ жана $y$ эки санынын иреттелген чогуусу туура келет, тескерисинче, ар кандай $x$ жана $y$ эки саны тегиздикте бир чекитти аныктайт.

Демек, маселеде чекит берилген десе, анда анын координаталары берилген болот; ал эми чекитти табуу керек десе, анда анын координаталарын табуу керек деп түшүнөбүз.

Биз $M$ чекитин биринчи чейректен алдык. Мында $x>0$, $y>0$ болот; II чейрек үчүн $x<0$, $y>0$; III чейрек үчүн $x<0$, $y<0$; IV чейрек үчүн $x>0$, $y<0$ болоору 131-сүрөттөн ачык көрүнүп турат. $O$ чекитинин координаталары $x=0$, $y=0$ болоору түшүнүктүү: $O(0; 0)$.

М и с а л ы. Координаталар системасында $A(4; 2)$, $B(-2; 1,5)$, $C(2; -2)$, $D(0; 3)$ чекиттерин түзгүлө.

Ч ы г а р ы л ы ш ы. $B(-2; 1,5)$ чекитин түзүүнү карап көрөлү. Координаталар системасын алып, каалагандай $e=OE_1=OE_2$ масштаб бирдигин белгилейбиз (132-сүрөт). $x$ огунда $O$ дон солду карай $e$ ни 2 жолу, $y$ огунда $O$ дон жогору карай 1,5 жолу өлчөп коюп, тиешелүү түрдө $B_1$ жана $B_2$ чекиттерин табабыз. $B_1$ жана $B_2$ чекиттеринен координаталар окторуна параллель түз сызыктарды жүргүзсөк, алардын кесилиши $B$ чекитин аныктайт. $A$, $C$, $D$ чекиттерин да ушундай эле жол менен түзүүгө болот.




132-сүрөт.

Эгерде $P\ (x_1;\ y_1)$ жана $Q\ (x_2;\ y_2)$ чекиттери берилсе, анда $PQ$ кесиндинин ортосунда жаткан $N$ чекитинин координаталарын таап алууга болот. Ал чекиттер 132-сүрөттөгүдөй жайланышсын деп эсептейли.

$N$ чекитинин координаталарын $x$ жана $y$ аркылуу белгилейбиз. $P, Q, N$ чекиттеринин $x$ огундагы проекциялары тиешелүү түрдө $P_1$, $Q_1$, $N_1$, болсун. Анда $OP_1=x_1$, $OQ_1=x_2$, $ON_1=x$ болоору белгилүү. Шарт боюнча $PN=NQ$ болот. Анда $PP_1 \| QQ_1 \| NN_1$ болгондуктан, берилген кесиндилерге Фалестин теоремасын колдонсок $P_1N_1=N_1Q_1$ болот. Натыйжада $P_1N_1=ON_1-OP_1=x-x_1$, $N_1Q_1=OQ_1-ON_1=x_2-x$ болот.

Бирок, $P$ жана $Q$ чекиттеринин берилишине карата $P_1N_1$, $N_1Q_1$ маанилери оң же терс болуп калышы мүмкүн. Ошондуктан алардын абсолюттук чоңдуктарын алабыз. Анда жогорудагы шарт боюнча $|P_1N_1|=|N_1Q_1|$ болот. Мындан $x-x_1=x_2-x$ же $x_1-x=x-x_2$ болоору белгилүү. Натыйжада $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ болот.

Ушуга окшоштуруп, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ болоорун табууга мүмкүн.

Ошентип, $PQ$ кесиндисинин ортосундагы $N$ чекитинин координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (1)$$

барабардыктары аркылуу аныкталат.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

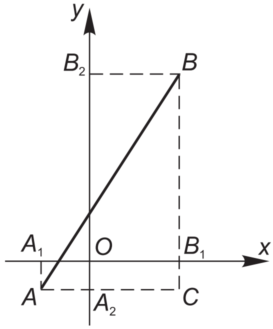
1. Эки ок боюнча тең масштаб бирдигин 1 см деп алып, төмөндөгү чекиттерди координаталар системасында түзгүлө: $A(4;\ 3)$, $B(-2;\ 5)$, $C(-3;\ -1)$, $D(7;\ -4)$, $E(-5;\ 0)$, $F(0;\ -5)$, $K(0;\ 0)$.
2. Жагынын узундугу 6 бирдик болгон квадраттын бир жагы абсцисса огу менен дал келет. Координаталар башталышы ал жактын ортосунда жатат. Чокуларынын координаталарын тапкыла. Квадрат — абсцисса огунун: а) жогору; б) төмөн жагында жаткан учурларын карагыла.
3. $D(3;\ -2)$ чекити берилген. Бул чекиттин координаталар огундагы проекциялары кандай координаталарга ээ болот?
4. Координаталар октору жана $A(-2;\ 3)$ чекитинен окторго түшүрүлгөн перпендикулярлар аркылуу түзүлгөн тик бурчтуктун периметрин тапкыла.

5. $A(-3; 4)$, $B(2; -2)$ чекиттери берилген. $AB$ кесиндисинин ортосунда жаткан чекитти тапкыла.

   *Көрсөтмө.* (1) формуладан пайдалангыла.
6. Үч бурчтуктун $A(2; 1)$, $B(-6; 7)$, $C(2; -2)$ чокулары берилген. Анын жактарынын ортосун тапкыла.
7. Параллелограммдын удаалаш $A(-3; 5)$, $B(1; 7)$ чокулары жана анын диагоналдарынын кесилиши $M(1; 1)$ берилген. Калган эки чокусун тапкыла.

*Көрсөтмө.* 5-маселенин чыгарылышын эске алгыла.

## § 44. ЭКИ ЧЕКИТТИН АРАЛЫГЫ



133-сүрөт.

Тегиздиктеги координаталар системасына карата $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилишсин (133-сүрөт). Алардын аралыгын координаталары боюнча аныктайбыз. $A$ жана $B$ чекиттеринен координаталар окторуна перпендикулярлар түшүрүп, алардын кесилишинен $C$ чекитин алабыз да, $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугуна ээ болобуз. Анда Пифагордун теоремасы боюнча

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Бирок, $AC=A_1B_1=|x_2-x_1|$, $CB=A_2B_2=|y_2-y_1|$ болоору белгилүү. Анда

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (1)$$

болот. Эгерде координаталар башталышы $O(0; 0)$ дон $M(x; y)$ чекитине чейинки аралыкты табуу талап кылынса, анда (1) формула төмөндөгүдөй жазылат:

$$OM^2=x^2+y^2 \qquad (2)$$

М и с а л. $A(-4; 5)$ жана $B(1; -7)$ чекиттеринин аралыгын тапкыла.

Ч ы г а р ы л ы ш ы. Изделүүчү аралык (1) формула менен эсептелет: $x_1=-4$, $y_1=5$, $x_2=1$, $y_2=-7$ болгондуктан, $AB^2=(1+4)^2+(-7-5)^2=169$, $AB=13$ сызыктуу бирдик.

### КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $xOy$ системасы берилген: а) $A(-1; 4)$ жана $B(5; -4)$; б) $C(3; 8)$ жана $D(-1; 5)$ чекиттеринин арасындагы аралыкты тапкыла.

2. Координаталар башталышынан $M(-4; 3)$ чекитине чейинки аралыкты тапкыла.
3. $K(5; -3)$ жана $L(-1; 0)$ чекиттери менен чектелген кесиндинин узундугун тапкыла.
4. $A(2; -3)$, $B(-4; 1)$ жана $C(1; -1)$ чекиттери берилген. Бул үч чекит бир түз сызыкта жатабы?

   *Көрсөтмө.* Аралыктарын таап салыштыргыла: $AC+CB=AB$.
5. Үч бурчтуктун чокулары $A(2; 1)$, $B(-6; 7)$ жана $C(2; -2)$ берилген. Үч бурчтуктун периметрин жана медианаларын тапкыла.

   *Көрсөтмө.* Медианаларды аныктоо үчүн үч бурчтуктун жактарынын ортосундагы чекиттерди тапкыла.
6. Чокулары $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(3; -4)$ болгон үч бурчтуктун тең капталдуу экендигин далилдегиле.

   *Көрсөтмө.* Жактарынын узундуктарын салыштыргыла.
7. $A(4; -6)$ чекитинен 5 бирдик аралыкта жатуучу ордината огундагы чекитти тапкыла.
8. Чокулары $A(0; 1)$, $B(4; 3)$, $C(5; 1)$ жана $D(1; -1)$ чекиттеринде жаткан төрт бурчтук тик бурчтук болоорун далилдегиле.

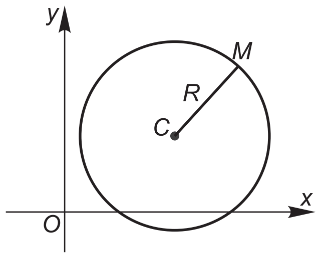
   *Көрсөтмө.* Жактарынын жана диагоналдарынын узундуктарын салыштыргыла.
9. Чокулары $E(-2; 0)$, $F(2; 2)$, $M(4; -2)$ жана $N(0; -4)$ чекиттеринде жаткан төрт бурчтук квадрат экендигин далилдегиле.

## § 45. АЙЛАНАНЫН ТЕҢДЕМЕСИ

Сызыктын бардык чекиттеринин координаталары кандайдыр теңдемени канааттандырса, анда ал теңдеме сызыктын (айлананын) теңдемеси деп аталат.

Жалпы учурда $F(x, y)=0$ түрүндө жазылат, мында $F$ дегенибиз $x$ жана $y$ аркылуу аткарылуучу амалдарды аныктайт.

$xOy$ системасына карата радиусу $R$ ге барабар болгон жана борбору $C(a, b)$ чекитинде жаткан айлана берилсин (134-сүрөт). Ал айлананын теңдемесин түзөбүз. Ушул максатта айлананын каалаган жеринен $M(x, y)$ чекитин белилейбиз.



134-сүрөт.

Бул айлананы $C(a, b)$ борбордон $R$ аралыкта жаткан чекиттердин геометриялык орду (көптүгү) деп кароого болот. Ошондуктан $CM=R$ же $CM^2=R^2$ деп алабыз. Анда эки чекиттин аралыгын аныктоо формуласы боюнча

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

ка ээ болобуз. Бул берилген айлананын теңдемеси болот, анткени айлананын ар кандай чекитинин координаталары (1) теңдемени канааттандырат. Эгерде $C(a; b)$ борбору координаталар башталышы менен дал келип калса, анда $a=0$, $b=0$ болуп калат. Анда (1) ден төмөндөгүнү алабыз:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$

Бул борбору координаталар башталышында жатуучу, радиусу $R$ ге барабар болгон айлананын теңдемеси.

Мисал. Борбору $C(4; -2)$ чекитинде жатуучу жана радиусу 3 кө барабар болгон айлананын теңдемесин жазгыла. Ал айлана $A(-1; 5)$ чекити аркылуу өтөбү?

Чыгарылышы. Маселеде берилгендер боюнча $a=4$, $b=-2$, $R=3$. Демек (1) теңдеме боюнча $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ болот. Бул изделүүчү айлананын теңдемеси. Айлана $A(-1; 5)$ чекити аркылуу өтө тургандыгын текшерүү үчүн айлананын теңдемесиндеги $x$, $y$ тин ордуна $A$ чекитинин координаталарын коёбуз:

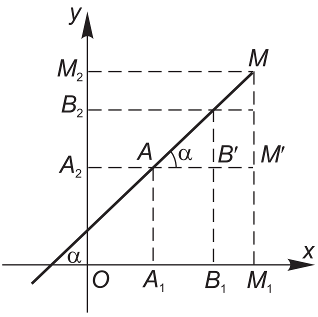
$$(-1-4)^2+(5+2)^2\neq 9.$$

Демек, берилген айлана $A$ чекити аркылуу өтпөйт.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Борбору $O$ жана радиусу $R=5$ болгон айлананын теңдемесин түзгүлө.
2. Айлана $x^2+y^2=16$ теңдемеси менен берилген. Радиусун тапкыла жана айлананы $xOy$ системасында сызгыла.
3. $O$ дон 1,5 аралыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө. Чиймеде көрсөткүлө.
4. $A(3; -4)$, $B(10; 3)$, $C(-1; 3)$, $D(0; 5)$ чекиттеринин кайсынысы $x^2+y^2-25=0$ теңдемеси менен берилген айланада жатат?
5. $x^2+y^2-64=0$ айланасынын радиусун тапкыла.
6. Борбору $C(-4; 0)$ чекитинде жатып, радиусу 3кө барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө. Аны $xOy$ системасында сызгыла.
7. Борбору $C(2; -1)$ чекитинде жатып, радиусу 2ге барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө. $A(2; -3)$ чекити ал айланада жатабы?
8*. $x$ огун $B(3; 0)$ чекитинде жанып өтүүчү жана радиусу 2,5ке барабар болгон айлананын теңдемесин түзгүлө.

## § 46. ТҮЗ СЫЗЫКТЫН ТЕҢДЕМЕСИ




135-сүрөт.

$xOy$ координаталар системасында $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ чекиттери берилсин (135-сүрөт). Бул эки чекит бир гана түз сызыкты аныктайт. Ал түз сызыктын теңдемесин түзөбүз. $AB$ түз сызыгын координаталар окторуна параллель эмес деп эсептейли. Анда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

$AB$ түз сызыгынын $x$ огу менен түзгөн тар бурчун $\alpha$ аркылуу белгилейли. Анда $AB'B$ тик бурчтуу үч бурчтугунан (§ 26)

$$tg\alpha = \frac{B'B}{AB'} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{1}$$

катышын жаза алабыз. $\angle B'AB=\alpha$. (1) катыш түз сызыктын бурчтук коэффициенти деп аталат. Ал кээде $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ деп белгиленет. $AB$ түз сызыгынан каалагандай $M(x; y)$ чекитин алалы. $MM'A$ тик бурчтуу үч бурчтугу үчүн да

$$tg\alpha = \frac{M'M}{M'A} = \frac{M_2A_2}{M_1A_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \tag{2}$$

катышын жазабыз. Мында $M$ чекитин $AB$ түз сызыгынын каалаган жеринен алсак да (2) катыш туура болот ($OM_1=x$, $OM_2=y$ экендиги эске алынды).

(1), (2) барабардыктардан

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3}$$

деп жаза алабыз. Катыштардын барабардыгынын негизинде

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1) \tag{3$^1$}$$

же

$$(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0$$

болот.

Бул эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси, ал $x$, $y$ өзгөрмөлөрүнө карата 1-даражада. Демек, каалагандай 1-даражадагы

$$ax+by+c=0 \tag{4}$$

же

$$y=kx+b \tag{5}$$

түрүндөгү теңдеме ($a$, $b$, $c$ — берилген сандар) түз сызыктын теңдемеси болот.

Эми төмөндөгүдөй учурларды карап көрөлү.

1) $AB$ түз сызыгы $x$ огуна параллель болсун. Анда $y_2=y_1$ болот, б. а. $y_2-y_1=0$ болот. (3) дөн $y=y_1$ болуп калат. Демек, $y=y_1$ же жалпы учурда $y=b$ (5) теңдемеси $x$ огуна параллель түз сызыктын теңдемеси болот.

2) $AB$ түз сызыгы $y$ огуна параллель болсо,

$$x=x_1 \text{ же } x=a \tag{6}$$

болот. Бул $y$ огуна параллель түз сызыктын теңдемеси.

Мисал. $A(-3; 5)$, $B(2; -4)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө.

Чыгарылышы. (3) теңдемени пайдалансак: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{-4-5}$ болот, анткени берилиши боюнча $x_1=-3$, $y_1=5$, $x_2=2$, $y_2=-4$ болот. Натыйжада $9x+5y+2=0$ болот, бул изделүүчү түз сызыктын теңдемеси. Бул теңдеме берилген эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемеси экендигин оңой байкоого болот. Ал үчүн берилген чекиттердин координаталары акыркы теңдемени канааттандыра тургандыгын текшерүү керек.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** $A(4; -5)$ жана $B(-1; 2)$ чекиттеринен бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Чекиттердин геометриялык ордуна тиешелүү чекитти өзгөрмөлүү $M(x; y)$ чекити аркылуу белгилеп, $MA=MB$ шартын колдонгула.

**2.** Координаталар окторунан бирдей алыстыкта жаткан чекиттердин геометриялык ордунун теңдемесин түзгүлө.

**3.** $A(9; -3)$ жана $B(-6; 1)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө.

**4.** Үч бурчтуктун чокулары $A(-2; 2)$, $B(1; 4)$, $C(0; 0)$. Анын жактарынын жана медианаларынын теңдемелерин түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Медианалардын теңдемесин түзүүдө үч бурчтуктун жактарынын тең ортолорун таап алгыла.

**5*.** $x$ огун координаталар башталышынан 4 бирдик аралыкта кесип $M(8; 5)$ чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин түзгүлө. Аны чиймеде көрсөткүлө. Маселенин канча чыгарылышы бар?

**6.** Түз сызык $2x-3y+6=0$ теңдемеси менен берилген. Ал түз сызык координаталар окторун координаталар башталышынан кандай кесиндилерде кесип өтөөрүн тапкыла.

**7.** $A(-2; 1)$, $B(3; \frac{1}{3})$, $C(0; 2\frac{1}{3})$, $D(1; 2)$ жана $E(-3\frac{1}{2}; 0)$ чекиттери берилген. Бул чекиттердин кайсынысы $2x-3y+7=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыкта жатат?

**8.** Төмөндөгү түз сызыктарды түзгүлө: $3x-2=0$, $2y+3=0$, $x+y=0$, $2x+5y=0$, $x+2y+3=0$ жана $3x+4y-12=0$.

*Көрсөтмө.* Түз сызыкты түзүү үчүн анын эки чекитин таап алуу жетиштүү. Мисалы, $3x+4y-12=0$ теңдемеси менен берилген түз сызыкты түзүү үчүн каалагандай эки чекитти табабыз. $x=0$ деп эсептейли, анда $3 \cdot 0+4y-12=0$ же $y=3$ болот, натыйжада $A(0; 3)$ чекити табылды. Эми $y=0$ болсун, анда $3x+4 \cdot 0-12=0$ же $x=4$ болот, б. а. $B(4; 0)$ табылды. $A$, $B$ чекиттерин түзүп, алар аркылуу түз сызык сызабыз.

## § 47. ВЕКТОРЛОР

Биз физиканы, механиканы, астрономияны ж. б. илимдерди окуп-үйрөнүүдө эки түрдөгү чоңдуктарды учуратабыз, биринчиси: масса, узундук, убакыт, көлөм ж. б. Бул чоңдуктар сан мааниси менен гана аныкталат. Аларды **скалярдык**[1] чоңдуктар деп атайбыз. Экинчиси: күч, ылдамдык, ылдамдануу ж. б. Бул чоңдуктарды аныктоо үчүн жалаң гана алардын сан маанилеринин (скалярдын) берилиши жетишсиз. Мисалы, күчтүн чоңдугу берилип, бирок кайсы багытка аракет этип жаткандыгы көрсөтүлбөсө, анда анын таасирин толук аныктоого болбойт. Демек, бул чоңдуктардын сан мааниси менен кошо багыты да берилиши керек. Мындай чоңдуктар **вектордук**[2] чоңдуктар. Аны геометриялык түрдө элестетүү үчүн белгилүү узундуктагы кесиндини алып, анын учуна стрелка коюшат.

Багытталган кесинди **вектор** деп аталат. Вектор эки чоң тамга же бир кичине латын тамгасы менен белгиленет да, үстүнө стрелка коюп жазылат. Мисалы, $\overrightarrow{AB}$ же $\vec{a}$ деп белгиленет.

Эгерде вектор эки тамга менен белгиленсе, анда жазылыш тартиби боюнча алардын биринчи орунда турганы вектордун башталыш чекитин, экинчи орунда турганы акыркы чекитин көрсөтөт.

Вектор белгиленген кесиндинин узундугу же вектордун башталышындагы же акырындагы эки чекиттин аралыгы ал вектордун узундугун аныктайт. Вектордун узундугуна барабар

---

[1] Скаляр латындын *scalaris* — баскычтуу деген сөзүнөн алынган.

[2] Вектор латындын *vector* — которуу деген сөзүнөн алынган.

болгон оң сан вектордун **модулу** же абсолюттук чоңдугу деп аталат да $|\overrightarrow{AB}|$ же $AB$ түрүндө белгиленет.

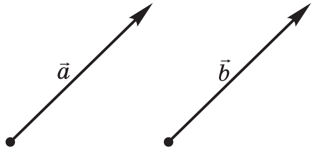
Эгерде вектор бир тамга менен белгиленсе, анда анын узундугу $|\vec{a}|$ же ***a*** түрүндө белгиленет.

Эгерде вектордун башталыш жана акыркы чекиттери дал келип калса, анда ал **нөл** вектор деп аталат. Ал $\vec{0}$ түрүндө белгиленет. Анын узундугу нөлгө барабар, ал эми багыты аныксыз болот.

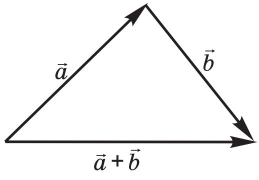
А н ы к т а м а. **Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун: 1) узундуктары барабар жана 2) багыттары бирдей болсо, анда алар бара-бар деп аталышат да $\vec{a}=\vec{b}$ түрүндө жазылат** (136-сүрөт).

Эгерде бул аныктамадагы эки шарттын бирөө эле аткарылбай калса, анда алар барабар болушпайт. Бул аныктаманын негизинде векторду бир орундан экинчи орунга багытын, чоңдугун өзгөртпөстөн котоpуугa болот. Чындыгында $\vec{a}$ векторун кандайдыр $A$ чекитине чоңдугун жана багытын өзгөртпөй котор-сок, $\overrightarrow{AB}$ векторун алабыз (137-сүрөт). Бирок алар аныктаманын шартын канааттандыргандыктан $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ болот.

Эгерде вектордун узундугу бирге барабар болсо, анда ал **бирдик** вектор деп аталат. $\vec{e}$ бирдик вектор болсо, $|\vec{e}|=1$ болот.




136-сүрөт.




137-сүрөт.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\vec{a}$ жана $C$ чекити берилген. $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$ векторун түзгүлө.
2. Квадрат берилген. Жактары боюнча барабар векторлорду белгилеп көрсөткүлө (чиймеде).
3. $ABCD$ параллелограммынын жактары боюнча $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ жана $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ векторлору берилген. а) $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ болоорун далилдегиле; б) $\overrightarrow{CD}$ жана $\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}$ жана $\overrightarrow{DA}$ векторлору барабар болушабы?
4. $ABCDEF$ туура алты бурчтугу берилген. Жактары боюнча барабар векторлорду көрсөткүлө. $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{m}$ болсо, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$ векторлорун тапкыла.

**5.** Эгерде 4-маселедеги алты бурчтукка сырттан сызылган айлананын диаметри 6 см болсо, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$ векторлорунун модулун тапкыла.

## § 48. ВЕКТОРЛОР МЕНЕН АТКАРЫЛУУЧУ АМАЛДАР

### 48.1. ВЕКТОРЛОРДУН СУММАСЫ

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору берилсин. Бул эки вектордун суммасын табабыз. Ал үчүн $\vec{a}$ векторунун чоңдугун жана багытын өзгөртпөстөн, эркибизче алынган $A$ чекитине которобуз (137-сүрөт). Анда $\vec{a}=\vec{AB}$ болот. Андан кийин $\vec{b}$ векторун башталыш чекити $B$ чекитине дал келгендей кылып, багытын өзгөртпөстөн которобуз. Анда $\vec{b}=\vec{BC}$ болот. $\vec{a}$ векторунун $A$ башталыш чекитин $\vec{b}$ векторунун акыркы чекити $C$ менен туташтырсак, $\vec{AC}$ вектору берилген эки вектордун суммасын аныктайт:

$$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

Мындай жол менен каалаган сандагы векторлордун суммасын табууга болот.

Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктары бирдей болуп, бирок карама-каршы багытта болушса, анда алар **карама-каршы векторлор** деп аталышат. Карама-каршы векторлорду белгилөө үчүн вектордун алдына «минус» белгиси коюлат. Мисалы, $-\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ векторуна карама-каршы вектор болот.

Векторлорду кошуунун төмөндөгүдөй касиеттери бар:

**1.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

**2.** $\vec{a}+(-\vec{a})=0$,

**3.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (векторлордун суммасы коммутативдик законго баш ийет).

**4.** Векторлордун суммасы ассоциативдик законго баш ийет:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

### 48.2. ВЕКТОРЛОРДУН АЙЫРМАСЫ

Эми векторлордун айырмасын карап көрөлү.

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун айырмасы $\vec{a}-\vec{b}$ деп, $\vec{b}$ векторуна кошкондо $\vec{a}$ векторун берүүчү $\vec{u}$ векторун айтабыз.

Ал төмөндөгүдөй жазылат:

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}\ ,$$

мында

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{u}$$

болот.

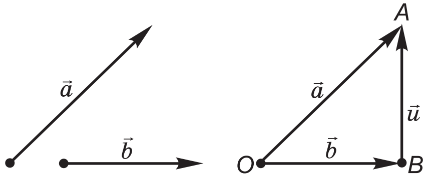
Берилген эки вектордун айырмасын чиймеде көрсөтүш үчүн, берилген $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорун каалагандай $O$ чекитине багытын жана чоңдугун өзгөртпөстөн которобуз. Анда $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ болот (138-сүрөт).

Кемитүүчү $\vec{b}$ векторунун акыркы $B$ чекитин кемүүчү $\vec{a}$ векторунун акыркы $A$ чекитине туташтырып, $\overrightarrow{BA}$ векторуна ээ болобуз. Ал берилген эки вектордун айырмасын аныктайт. Чындыгында

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b}+\vec{u}=\vec{a},$$

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}.$$

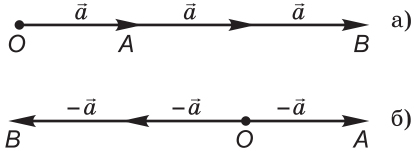



138-сүрөт.

## 48.3. ВЕКТОРДУ САНГА КӨБӨЙТҮҮ

$\vec{a}$ вектору берилсин. Эгерде $\vec{a}$ векторун үч жолу кошсок, кандайдыр $\vec{b}$ векторун алабыз (139-сүрөт, а).

Бул акыркы барабардыкты $\vec{b}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{b}=3\vec{a}$ деп жазууга болот. Демек, $\vec{a}$ векторун 3 санына көбөйтүп, $\vec{b}$ векторун алдык. Мында $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ болуп, ал векторлор бир түз сызыкта жатышат жана багыттары бирдей, $\vec{b}$ векторунун узундугу $\vec{a}$ векторунунун узундугунан 3 эсе чоң.




139-сүрөт.

Эми $-\vec{a}$ векторун эки жолу кошобуз (мында $-\vec{a}$ вектору $\vec{a}$ векторуна карама-каршы экендиги белгилүү). Натыйжада, $\vec{b}$ векторун алабыз (139-сүрөт, б), б. а.

$$\vec{b}_1=(-\vec{a})+(-\vec{a}).$$

Муну $\vec{b}_1=2(-\vec{a})=-2\vec{a}$ деп жазууга болот. Мында $\vec{OA}=\vec{a}$, $-\vec{a}_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}_1=\vec{OB}_1$ болуп, $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору бир түз сызыкта жатышат, алардын багыттары карама-каршы. $\vec{b}_1$ векторунун узундугу $\vec{a}$ векторунунун узундугунан $|-2|=2$ эсе чоң.

Демек, векторду санга көбөйтүү барабар векторлорду кошуу катарында каралат.

Жалпы учурда $\vec{a}$ векторун $k$ санына көбөйтсөк, анда $\vec{b}$ векторун алабыз:

$$\vec{b}=k\cdot\vec{a} \tag{1}$$

Бирок $k>0$ болгондо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун багыттары бирдей, $k<0$ болгондо $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун багыттары карама-каршы болот. Мында $k$ ар кандай сан болушу мүмкүн. Эки учурда тең $\vec{b}$ векторунун чоңдугу $\vec{a}$ векторунун чоңдугунан $|k|$ эсе чоң болот.

Эгерде эки вектор бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жатышса, анда алар **коллинеардуу** векторлор деп аталышат. Демек, (1) барабардыгын канааттандыруучу $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору коллинеардуу болушат.

Векторду санга көбөйтүү төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

**1.** $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;

**2.** $k\cdot\vec{0}=\vec{0}$;

**3.** $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

**4.** $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

**5.** $k\cdot(l\cdot\vec{a})=(k\cdot l)\cdot\vec{a}$;

**6.** $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$;

**7.** $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; ($\vec{a}$ мында $k$, $l$ сандар).

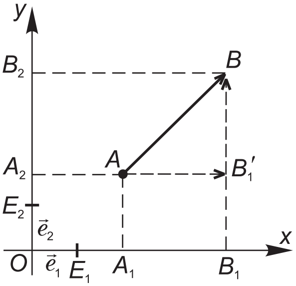
### 48.4. ВЕКТОРДУН КООРДИНАТАЛАРЫ

Эки векторду тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата карап көрөлү.

Координаталык октор боюнча багытталган бирдик $\vec{e}_1=\vec{OE}_1$ жана $\vec{e}_2=\vec{OE}_2$ векторлорун алалы, б. а. $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ болсун (140-сүрөт).

Тегиздикте каалаган $\vec{a}$ вектору берилсин. Бул вектордун $x$ огундагы проекциясы $A_1B_1$, ал эми $y$ огундагы проекциясы $A_2B_2$ болсун: $a_1=A_1B_1$, $a_2=A_2B_2$ аркылуу белгилейли.

$\vec{a}$ векторун $\vec{e}_1$ жана $\vec{e}_2$ бирдик векторлору боюнча жазууга болот. Эгерде $A_1B_1$ кесиндисин вектор катарында карасак, анда аны $\overrightarrow{A_1B_1} = a_1 \cdot \vec{e}_1$ деп жазууга болот. Ошондой эле $\overrightarrow{A_2B_2} = a_2 \cdot \vec{e}_2$ болоору түшүнүктүү, Бирок векторлорду кошуу эрежеси боюнча $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_1'} + \overrightarrow{B_1'B}$. Ошону менен катар $\overrightarrow{AB_1'} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1'B} = \overrightarrow{A_2B_2}$ болгондуктан,



140-сүрөт.

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \qquad (2)$$

болот.

Мында $a_1$, $a_2$ сандары $\vec{a}$ векторунун координаталык октору боюнча координаталары деп аталышат жана төмөндөгүчө белгиленет:

$$\vec{a} = (a_1;\ a_2) \qquad (3)$$

$a_1$ саны $\vec{a}$ векторунун абсциссасы, $a_2$ — анын ординатасы болот.

Эгерде $xOy$ координаталар системасына карата $\vec{a}$ векторунун баштапкы жана акыркы чекиттеринин координаталары берилсе, анда ал вектордун координаталарын табууга болот. $A(x_1; y_1)$ жана $B(x_2; y_2)$ берилсин. $A_1B_1 = x_2 - x_1$, $A_2B_2 = y_2 - y_1$ болоору белгилүү.

Анда

$$a_1 = x_2 - x_1,\ \ a_2 = y_2 - y_1 \qquad (4)$$

б. а.

$$a = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,;\ y_2 - y_1,) \qquad (5)$$

$xOy$ координаталар системасына карата $M(x; y)$ чекити берилсе, ал чекиттин координаталары $\overrightarrow{OM}$ векторунун координаталары да боло алат. $\overrightarrow{OM}$ векторун (5) формула аркылуу жазсак,

$$\overrightarrow{OM} = (x;\ y) \qquad (6)$$

Бул учурда $\overrightarrow{OM}$ векторун радиус-вектору деп да аташат.

Эгерде $xOy$ координаталар системасына карата $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (a_1; a_2)$ векторлору берилишсе, анда $a_1 = b_1$ жана $a_2 = b_2$ болгондо гана $\vec{a} = \vec{b}$ болот, ошондой эле бул эки вектордун суммасы (айырмасы) координаталары аркылуу төмөндөгүдөй жазылат: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2)$. Ошондой эле $k \cdot \vec{a} = (kx_1; ky_1)$, мында $k$ — сан.

М и с а л. $A(-3;\ 7)$ жана $B(1;\ 4)$ чекиттери берилген. $\vec{AB}$ векторунун координаталарын табуу талап кылынсын.

Ч ы г а р ы л ы ш ы. $x_1=-3$, $y_1=7$, $x_2=1$, $y_2=4$. (4), (5) формулаларынан пайдаланып: $a_1=4$; $a_2=-3$ же $\vec{AB}=(4;\ -3)$ экендигин табабыз.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $ABCD$ параллелограммынын жактары боюнча $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$ векторлору берилген. а) $\vec{BC}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{a}$ экендигин көрсөткүлө; б) $\vec{AC}$ жана $\vec{BD}$ векторлорун $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору аркылуу туюнткула.
2. $\vec{a}$ берилген. а) $3\vec{a}$; б) $-2\vec{a}$; в) $2{,}5\vec{a}$ векторлорун чиймеде көрсөткүлө.
3. $ABCDEF$ туура алты бурчтугунун жанаша жаткан жактары боюнча $\vec{AB}=\vec{p}$ жана $\vec{AF}=\vec{q}$ векторлору белгиленген. $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ векторлорун $\vec{p}$ жана $\vec{q}$ векторлору аркылуу туюнткула.
4. $xOy$ координаталар системасында $A(2;\ -3)$, $B(-1;\ 4)$ чекиттери берилген. $\vec{AB}$ векторунун координаталарын тапкыла.
5. $\vec{a}=(2;\ 5)$ берилген: а) $3\vec{a}$; б) $-2{,}5\vec{a}$ векторлорунун координаталарын тапкыла.
6. $A(-1;\ -3)$, $B(4;\ -2)$, $C(1;\ -4)$, $D(-2;\ 3)$ чекиттери берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла: а) $\vec{AB}+\vec{BC}$; б) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}$; в) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}$; г) $2\vec{AB}-\vec{BC}$.
7. Эгерде $\vec{AB}=(4;\ -5)$ векторунун башталыш чекити $A(1;\ 2)$ берилсе, акыркы $B$ чекитинин координаталарын тапкыла.
8. $\vec{a}=(-3;\ 4)$ вектору берилген. а) $\vec{a}$ векторунун узундугун; б) $-\vec{a}$ векторунун координатасын тапкыла.
9. $\vec{a}=(3;\ -2)$, $\vec{b}=(-5;\ 2)$ векторлору берилген. Эгерде а) $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ болсо, $\vec{c}$ векторунун координаталарын эсептегиле.
10. 9-маселеде берилгендер боюнча ар бир учурдагы $\vec{c}$ векторунун модулун тапкыла.
11. Эгерде төрт бурчтуктун диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнүшсө, анда ал төрт бурчтук параллелограмм болоорун далилдегиле.

    *Көрсөтмө.* Төрт бурчтуктун карама-каршы жактары боюнча белгиленген векторлорду диагоналдык векторлор аркылуу туюнткула.

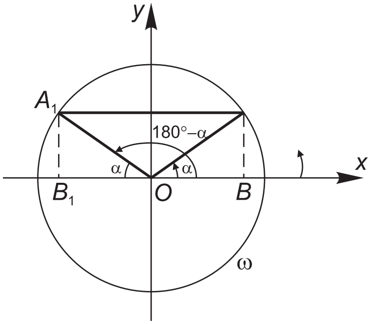
## § 49. КЕҢ БУРЧТУН ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРЫ

Биз жогоруда тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышты карадык. Ал тар бурчтун тригонометриялык функциялары менен байланышта болду.

Бирок, геометрияда кең бурчтуу үч бурчтуктар зор орунду ээлейт. Ошондуктан каалагандай үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышты аныктоо үчүн, кең бурчтун да тригонометриялык функцияларын кароого туура келет.

Ошол максатта $xOy$ координаталар системасында $\omega(O, R)$ айланасын сызып, анын чекиттеринин координаталары аркылуу бурчтун тригонометриялык функцияларын аныктоону карайбыз.

Айланада жаткан каалаган $A(x; y)$ чекитти белгилеп алабыз. Биз $Ox$ огунун оң багыты менен айлананын каалаган $A$ чекитине жүргүзүлгөн радиустардын арасындагы бурчтарды карайбыз. $Ox$ огунун оң багытынан баштап анын сааттын жебесинин айлануу багытына каршы айлануусунан пайда болгон бурчтарды оң бурчтар деп эсептөөнү шарт кылып алабыз (141-сүрөт). Анда 141-сүрөттөгү $OA=R$, $OB=x$, $BA=y$, $\angle BOA=\alpha$ тар бурч болсун. Биз $\alpha$ бурчун $x$ огунун оң багытынан баштап $A$ чекитине туура келүүчү $OA$ радиусуна чейин сааттын жебесинин кыймылына каршы багытка туура келгендей кылып алдык. Анда $OAB$ тик бурчтуу үч бурчтугунан:



141-сүрөт.

$$\sin\alpha = \frac{BA}{OA} = \frac{y}{R}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \tag{2}$$

$$tg\alpha = \frac{x}{y}. \tag{3}$$

Демек, $\alpha$ бурчунун тригонометриялык функцияларын ошол бурчка туура келүүчү $A$ чекитинин координаталарына карата аныктоого мүмкүн. Мында айлананын $A(x; y)$ чекити $\alpha$ бурчуна туура келүүчү чекит катары каралат. Анда (1, 2, 3) барабардыктардан төмөндөгүдөй аныктамаларды айтууга болот:

1) $\alpha$ бурчунун синусу айланада ага туура келүүчү чекиттин ординатасынын радиуска болгон катышына барабар.

2) $\alpha$ бурчунун косинусу айланада ага туура келүүчү чекиттин абсциссасынын радиуска болгон катышына барабар.

3) $\alpha$ бурчунун тангенси айланада ага туура келүүчү чекиттин ординатасынын абсциссага болгон катышына барабар.

Бул аныктамаларды кең бурчтар, б. а. айлананын $x$ огунун жогору жагында жаткан бөлүгү үчүн колдонуп көрөлү. Жогору жагындагы жарым айланадан $A_1(x_1; y_1)$ чекити берилип, $OA_1$ радиусу $x$ огу менен $180^\circ-\alpha$ кең бурчун түзөт деп эсептейли, б. а. $\angle BOA_1=180^\circ-\alpha$ болсун. Анда жогорудагы үч аныктаманы колдонуп,

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y_1}{R} \qquad (4)$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{x_1}{R} \qquad (5)$$

$$tg(180^\circ-\alpha)=\frac{y_1}{x_1} \qquad (6)$$

барабардыктарын жазууга болот.

Бирок, $\Delta OA_1B_1=\Delta OAB$ экендигин эске алып, $y_1=B_1A_1=BA=y$, $x_1=OB_1=-OB=-x$ деп жазууга болот. Натыйжада акыркы барабардыктардагы маанилерди (4), (5), (6) формулаларына коюп, андан кийин (1), (2), (3) барабардыктарды колдонуп, төмөндөгүнү алабыз:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha\ ; \qquad (7)$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha\ ; \qquad (8)$$

$$tg(180^\circ-\alpha)=-tg\alpha\,. \qquad (9)$$

Демек, кең бурчтун да тригонометриялык функцияларынын маанилерин табууга болот. Ал үчүн кең бурчту жайылган бурчка толуктоочу тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин табуу керек.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** 1) $\alpha=0^\circ$; 2) $\alpha=90^\circ$; 3) $\alpha=180^\circ$ болгондо, $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

**2.** Эгерде: а) $\alpha=0^\circ$, $180^\circ$ болсо, $tg\alpha$ нын мааниси эмнеге барабар?; б) $\alpha=90^\circ$ болгондо эмне үчүн мааниге ээ болбойт?

**3.** Эгерде $\alpha$ нын маанилери: 1) $120^\circ$; 2) $135^\circ$; 3) $150^\circ$ болсо, таблицаны колдонбой туруп, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ жана $ctg\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

**4.** $\sin157^\circ=\sin23^\circ$ болорун далилдегиле.

5. $\cos 125^\circ = -\cos 55^\circ$ болорун далилдегиле.
6. Ар кандай $\alpha$ тар бурчу үчүн $\operatorname{tg}157^\circ = -\operatorname{tg}23^\circ$ болорун далилдегиле.
7*. Таблицаны пайдаланып, а) $140^\circ$; б) $98^\circ 30'$; в) $161{,}6^\circ$ бурчунун синусун жана косинусун эсептегиле.
8. Таблицаны пайдаланып, а) $\operatorname{tg}100^\circ$; б) $\operatorname{tg}170^\circ 28'$ маанисин эсептегиле.
9. Эгерде: а) $\cos\alpha = -0{,}8$; б) $\operatorname{tg}a = -0{,}5$ болсо, таблицаны пайдаланып, $\alpha$ бурчун тапкыла.
10. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ болсо, $\sin\alpha$ менен $\operatorname{tg}\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

## § 50. ЭКИ ВЕКТОРДУН СКАЛЯРДЫК КӨБӨЙТҮНДҮСҮ

А н ы к т а м а. **Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү векторлордун узундуктарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөнгө барабар.**

$\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү $\vec{a}\cdot\vec{b}$ түрүндө белгиленет.

Анда аныктаманын негизинде:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos j \qquad (1)$$

Мында $j$ бурчу $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун арасындагы бурч, б. а.

$$j = (\vec{a}, \wedge \vec{b}).$$

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн төмөндөгүдөй касиеттери бар:

**1)** Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү орун алмаштыруу касиетине ээ болот, б. а. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

Бул касиеттин жана мындан кийинки касиеттердин тууралыгын жогорудагы аныктамага негиздеп далилдөөгө болот.

**2)** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (скалярдык көбөйтүүнүн бөлүштүрүүчүлүк касиети).

**3)** $(k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(k\cdot\vec{b})$, мында $k$ — чыныгы сан.

**4)** Эгерде $\vec{b} = \vec{a}$ болсо, анда $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ болот.

$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ туюнтмасы $\vec{a}$ векторунун **скалярдык квадраты** деп аталат. $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \cdot \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, мында $j = (\vec{a}_1, \wedge \vec{a}_2) = 0^\circ$ демек, вектордун скалярдык квадраты, ал вектордун узундугунун квадратына барабар.

**5)** $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору нөл вектор болушпаса жана алар бири-бирине перпендикулярдуу болушса, анда алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болот.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos j$, мында $j=(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})$. $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору перпендикулярдуу, башкача айтканда $j=90^{\circ}$ болсо, анда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^{\circ}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \qquad (2)$$

Муну эки вектордун перпендикулярдык шарты деп айтабыз.

Н а т ы й ж а: $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$ болот.

Себеби $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлору координаталар октору боюнча багытталышкан, бири-бирине перпендикулярдуу бирдик векторлор.

Жогорудагы касиеттерден пайдаланып координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн эсептейбиз. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ векторлорун алалы.

Алардын скалярдык көбөйтүндүсү

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2)\cdot(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2)=a_1\cdot b_1\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+$$
$$+b_1\cdot a_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a_1\cdot b_2\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=a_2\cdot b_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

болот. Себеби жогорудагы касиеттердин, натыйжанын негизинде:

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=0;\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1^{\,2}=1;\ |\vec{e}_1|^2=1^2=1;\ \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1.$$

Демек,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2 \qquad (3)$$

координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн аныктайт.

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү математика курсундагы бир топ теоремалардын далилденишин, маселелердин чыгарылышын жеңилдетет.

М и с а л: $\vec{a}=(5;12)$ жана $\vec{b}=(-4;2)$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

Ч ы г а р у у: Векторлор координаталары менен берилген. Ошондуктан (3) формуладан пайдаланабыз.

Мында $a_1=5$, $a_2=12$, $b_1=-4$, $b_1=2$, анда $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ болот.

(3) формуладан:

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2} \qquad (4)$$

Бул формула аркылуу вектордун узундугу аныкталат.

(1), (3), (4) формулалардан эки вектордун арасындагы бурчтун косинусун табууга болот:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \qquad (5)$$

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\wedge\vec{b})=60^\circ$ болсо, анда $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.
2. Параллелограммдын диагоналдарынын квадраттарынын суммасы жактарынын квадраттарынын суммасына барабар экендигин далилдегиле.

   *Көрсөтмө.* Параллелограммдын жанаша жаткан жактарын $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлору менен белгилеп алып, диагоналдардын квадратын эсептөө керек.
3. $\vec{a}=(-3;\,4)$ жана $\vec{b}=(2;\,4)$ векторлору берилген. $\vec{a}$ векторунун $\vec{b}$ векторуна түшүрүлгөн проекциясын тапкыла.
4. Үч бурчтуктун чокулары $A(2;\,1)$, $B(-6;\,7)$, $C(2;\,-2)$ болсо, $A$ бурчунун косинусун тапкыла.

   *Көрсөтмө.* $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ векторлорун тапкыла.
5. Тик бурчтуу үч бурчтук үчүн Пифагордун теоремасын далилдегиле.

   *Көрсөтмө.* Катеттери боюнча белгиленген $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорун $\vec{c}$ аркылуу туюнтуп, $\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}^{\,2}=c^2$ көбөйтүндүсүн эсептегиле. $a$, $b$ — катеттер, $c$ — гипотенуза.
6. Диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болгон параллелограмм ромб болоорун далилдегиле.

   *Көрсөтмө.* Параллелограммдын диагоналдык векторлорун жанаша жаткан жактары боюнча белгиленген векторлор аркылуу туюнтуп, эки вектордун перпендикулярдык шартынан пайдалангыла.
7. Эгерде параллелограммдын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу жана барабар болушса, анда ал параллелограмм квадрат боло тургандыгын далилдегиле.
8. Эгерде үч бурчтуктун медианасы каршысындагы жакка перпендикулярдуу болсо, анда ал үч бурчтук тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.
9. Эгерде үч бурчтуктун эки медианасы барабар болсо, анда үч бурчтук тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.
10. Үч бурчтуктун чокулары $A(1;\,4)$, $B(6;\,-1)$, $C(4;\,-3)$ чекиттеринде жатат. $ABC$ үч бурчтугунун тик бурчтуу экендигин эки жол менен белгилегиле: а) Пифагордун теоремасына тес-

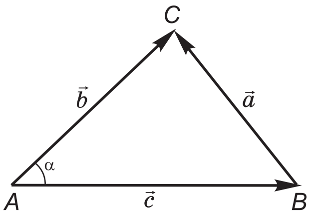
кери теореманын негизинде; б) жактарынын бири-бирине перпендикулярдык шартынын негизинде.

**11.** Төрт бурчтуктун чокулары $A(-3;-2)$, $B(2;1)$, $C(-1;6)$, $D(-6;3)$ чекиттеринде жатат. $ABCD$ төрт бурчтугунун квадрат экендигин эки жол менен далилдегиле: а) диагоналдарынын узундуктарынын барабардыгын жана перпендикулярдыгын текшерүү аркылуу; б) төрт бурчтуктун жактары менен дал келүүчү векторлордун координаталарын эсептөө аркылуу.

## § 51. КОСИНУСТАР ЖАНА СИНУСТАР ТЕОРЕМАЛАРЫ

*61-теорема (косинустар теоремасы).* **Ар кандай үч бурчтуктун бир жагынын квадраты калган эки жагынын квадраттарынын суммасынан ал жактардын жана алардын арасындагы бурчтун косинусунун эки эселенген көбөйтүндүсүн кемиткенге барабар.**

Далилдөө. $\Delta ABC$ берилсин (142-сүрөт). $A, B, C$ чокуларындагы бурчтары тиешелүү түрдө $\alpha, \beta, \gamma$ аркылуу, ал чокуларга каршы жаткан тиешелүү жактарды $a, b, c$ аркылуу белгилейбиз. Анда үч бурчтуктун $a$ жагына карата $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ болоорун далилдөө талап кылынат.



142-сүрөт.

Ар кандай кесиндиге багыт берип, вектор түрүндө сүрөттөп көрсөтүүгө болот. Берилген үч бурчтуктун жактарын 142-сүрөттө көрсөтүлгөндөй векторлор аркылуу туюнтабыз. Анда $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$ болоору белгилүү. Мында $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$ боло тургандыгы түшүнүктүү.

Эми $\vec{a}$ векторунун скалярдык квадратын эсептейбиз (§ 50):

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{b}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})=\vec{b}^{\,2}-2\vec{b}\,\vec{c}+\vec{c}^{\,2}.$$

Мында $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2=a^2$, $\vec{b}^{\,2}=b^2$, $\vec{c}^{\,2}=c^2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha$ болот. Натыйжада

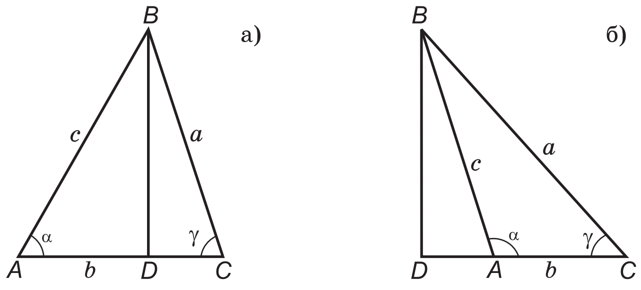
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$

болот. Ушуга окшоштуруп

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta \qquad (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma \qquad (3)$$

болорун далилдөөгө болот. Теорема далилденди.




143-сүрөт.

*62-теорема (синустар теоремасы).* **Ар кандай үч бурчтуктун жактары ал жактарга каршы жаткан бурчтардын синустарына пропорциялаш болот.**

Д а л и л д ө ө. $\Delta ABC$ берилсин (143-сүрөт). Жактары жана бурчтары жогорудагыдай белгиленген.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \tag{4}$$

болоорун далилдейбиз.

$AC$ жагына $BD$ бийиктигин түшүрөбүз. Анда тик бурчтуу эки үч бурчтук пайда болот: $\Delta ABD$ жана $\Delta BDC$. $\alpha$ жана $\beta$ бурчтарына карата төмөндөгүдөй учурларды карайбыз.

$\alpha$ — тар бурч болсун. 1) $\alpha$ — тар бурч болгондо (143ᵃ-сүрөт), $BD=c\cdot\sin\alpha$ ($\Delta ABD$ да),

$$BD=\alpha\cdot\sin\gamma \quad (\Delta BDC \text{ да})$$

же

$$c\cdot\sin\alpha=\alpha\cdot\sin\gamma \tag{x}$$

2) $\alpha$ — кең бурч болгондо (143ᵇ-сүрөт) да, $\Delta ABD$ га карата $BD=c\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=c\cdot\sin\alpha$ жана $\Delta BDC$ га карата $BD=a\cdot\sin\gamma$ болот. Бул учурда да

$$c\cdot\sin\alpha=\alpha\cdot\sin\gamma\ . \tag{y}$$

($x$) жана ($y$) барабардыктарынан $a:\sin\alpha=c:\sin\gamma$ болот. Ушундай эле жол менен $a:\sin\alpha=b:\sin\beta$ болоорун далилдөөгө болот. Демек,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \tag{4}$$

алабыз. Теорема далилденди.

### КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Эгерде $ABC$ үч бурчтугунда $\beta=60^\circ$ болсо, $b$ жагынын квадратына карата косинустар теоремасын кандай жазууга болот?
2. $ABC$ үч бурчтугунда $\alpha$ бурчунун кандай маанилеринде: 1) $a^2<b^2+c^2$; 2) $a^2=b^2+c^2$; 3) $a^2>b^2+c^2$ барабарсыздыгы туура болот?
3. Эгерде:1) $a=9$, $b=11$, $\gamma=70^\circ$; 2) $a=3$, $c=5$, $\beta=130^\circ18'$; 3) $b=1{,}4$, $c=2{,}5$, $\alpha=35^\circ34'$ болсо, $ABC$ үч бурчтугунун белгисиз жагын тапкыла.
4. Эгерде $ABC$ үч бурчтугунда $a=40$, $b=13$, $c=37$ болсо, чоң бурчун эсептегиле.
5. Параллелограммдын $m$ жана $n$ диагоналдары, алардын арасындагы $b$ бурчу берилген. Параллелограммдын жактарын тапкыла.
6. Параллелограммдын $a$ жана $b$ жактары, бурчтарынын бири $a$ берилген. Параллелограммдын диагоналдарын тапкыла.
7. Үч бурчтуктун жактары 6 м, 8 м жана 10 м болсо, кичине бурчунун косинусун тапкыла.
8. $ABC$ үч бурчтугунда $b=12$ см, $\gamma=30^\circ$, $\beta=45^\circ$. $c$ жагын тапкыла.
9. $ABC$ үч бурчтугунда: 1) $a=6$ см, $b=3$ см, $\alpha=150^\circ$ болсо, $\beta$ бурчун; 2) $a=3{,}7$ см, $c=5{,}9$ см, $\gamma=23^\circ20'$ болсо, $\alpha$ бурчун тапкыла.
10. Эгерде: 1) $b=110$ см, $\alpha=45^\circ$, $\gamma=102^\circ30'$ болсо, $a$ жагын; 2) $c=18$ см, $\alpha=130^\circ$, $\beta=27^\circ16'$ болсо, $b$ жагын тапкыла.
11. $ABCD$ параллелограммында $AB=8$ см, $AD=10$ см, $\angle BAD=50^\circ$. Диагоналдарын эсептегиле.
12. Ромбдун жагы 46 дм, бурчу $62^\circ$. Диагоналдарын тапкыла.
13. Параллелограммдын диагоналы 12 см ге барабар болуп, анын жактары менен $18^\circ$ жана $62^\circ$ бурчтарды түзөт. Параллелограммдын жактарын тапкыла.
14. Трапециянын негиздери 12,6 дм жана 16,4 дм, ал эми каптал жактары 6 дм жана 8 дм. Трапециянын бурчтарын тапкыла.

## § 52. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

Үч бурчтуктун негизги элементтери болуп үч жагы жана үч бурчу эсептелээри белгилүү. Эгерде бул алты элементтин үчөө (үч бурчунан башка) берилсе, анда үч бурчтуктун калган элементин таап алууга болот. Бул маселелер үч бурчтукту чыгаруу деп аталат. Мында геометриянын белгилүү теоремалары, түшүнүктөрү, косинустар жана синустар теоремалары колдонулат.

Үч бурчтукту чыгарууну төрт түрдүү маселелерге бөлүүгө мүмкүн.

**1.** Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу берилген. Кыскача: $b, c$ жана $\alpha$ берилген, $a, \beta, \gamma$ ны табуу керек.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ барабардыгынан $\alpha$ ны, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ барабардыгынан $\beta$ ны, $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ дан $\gamma$ ны табабыз. Натыйжада маселе толук чыгарылган болот.

**2.** $\alpha, \beta, \gamma$ берилген. $b, c, a$ ны табуу керек. Адегенде $\alpha=180^\circ-(\beta+\alpha)$ бурчун табабыз. Андан кийин синустар теоремасын колдонуп үч бурчтуктун жактарын ($b$ менен $c$ ны) табабыз.

**3.** $a, b, c$ берилген. $\alpha, \beta, \gamma$ бурчтарын табуу керек. Бул бурчтардын бирин, мисалы, $\alpha$ ны косинстар теоремасын колдонуп табабыз. Экинчи бурчун ($\beta$ ны) табууда синустар же косинустар теоремасын колдонууга болот. Ал эми үчүнчү бурчу $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ барабардыгынан аныкталат.

**4.** $a, b$ жана $\alpha$ (же $\beta$) берилген. $c$ жагын, $\beta$ (же $\alpha$), $\gamma$ бурчтарын табуу керек.

Адегенде синустар теоремасын колдонуп $\beta$ бурчун табабыз. $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ болот. Синустар теоремасын колдонуп $c$ ны табабыз.

**5.** Үч бурчтуктун ар кандай бурчунун биссектрисасы ал бурчтун каршысында жаткан жакты жанаша жаткан жактарга пропорциялаш бөлүктөргө бөлөт, б. а. 143[б]-сүрөттөгү $BA$ ны биссектриса деп эсептесек, анда $BD:BC=DA:AC$ болоорун синустар теоремасынын негизинде далилдегиле.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу боюнча үчүнчү жагын жана калган эки бурчун тапкыла:
1) $a=8$, $b=15$, $\gamma=120^\circ$;
2) $b=10{,}8$, $c=16$, $\alpha=76^\circ40'$;
3) $a=150$, $c=181{,}5$, $\beta=80{,}5^\circ$;
4) $a=4{,}5$, $b=7{,}6$, $\gamma=140^\circ12'$.

**2.** Үч бурчтуктун бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу берилген. Калган эки жагын жана үчүнчү бурчун тапкыла.
1) $b=30$, $\alpha=50^\circ$, $\gamma=45^\circ$;
2) $a=14{,}8$, $\beta=110^\circ$, $\gamma=30^\circ46'$;
3) $c=5{,}6$, $\alpha=29^\circ$, $\beta=110^\circ$;
4) $b=1{,}8$, $\alpha=16^\circ7'$, $\gamma=61^\circ7'$.

**3.** Үч бурчтуктун үч жагы берилген. Үч бурчун тапкыла.
1) $a=4$, $b=6$, $c=7{,}5$;
2) $a=101$, $b=98{,}7$, $c=15$;
3) $a=0{,}6$, $b=1{,}4$, $c=1{,}2$;
4) $a=12{,}4$, $b=8$, $c=12{,}4$.

**4.** Үч бурчтуктун эки жагы жана алардын биринин каршысында жаткан бурчу берилген. Үчүнчү жагын жана калган эки бурчун эсептегиле.
1) $b=8$, $c=10$, $\beta=45^\circ$;
2) $b=4{,}9$, $c=6{,}5$, $\gamma=101^\circ7'$;
3) $a=100$, $b=80$, $\alpha=120^\circ$;
4) $a=11{,}5$, $b=25{,}6$, $\beta=80^\circ17'$;
5) $a=12$, $c=16$, $\alpha=11^\circ$;
6) $a=1{,}3$, $b=2{,}4$, $\gamma=7{,}5^\circ$.

**5.** *ABC* үч бурчтугунда $\alpha=70^\circ$, $\beta=50^\circ$, $\gamma=60^\circ$. Бул үч бурчтуктун эң чоң жагын жана эң кичине жагын аныктагыла.

**6.** *ABC* үч бурчтугунда $a=10{,}2$ дм; $b=17$ дм жана $c=8,5$ дм. Анын кайсы бурчу эң чоң жана кайсы бурчу эң кичине?

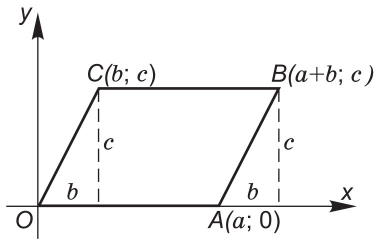
## § 53. КООРДИНАТАЛАР МЕТОДУНУН ЖАНА ВЕКТОРЛОРДУН КОЛДОНУЛУШУ

Биз жогоруда тегиздиктеги координаталар системасына карата сызыктардын теңдемелерин түзүүнү карадык. Демек, геометрия менен алгебранын байланышын көрсөттүк. Алгебралык тилде баяндалган геометрия аналитикалык геометрияны аныктайт. Анын негизги идеясы болуп координаталар методу эсептелет. Мында координаталар методун пайдаланып фигуралардын абалын, касиеттерин окуп-үйрөнүү каралат. Ал эми координаталар методу болсо, берилген координаталар системасына карата иреттелген сандардын жардамы менен чекиттердин абалын аныктоодон турат. Бул методго ылайык ар кандай геометриялык фигура чекиттердин көптүгүнөн турат.

Координаталар методун жана векторлор жөнүндөгү маалыматтарды пайдалануу, геометриядагы айрым теоремалардын далилдөөлөрүн жана маселелердин чыгарылыштарын бир кыйла жеңилдетишет. Аларды пайдаланууда координаталар системасын жана векторлорду каралуучу маселеге ылайыктуу кылып тандап алуу зарыл.

*63-теорема.* **Параллелограммдын жактарынын узундуктарынын квадраттарынын суммасы диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарынын суммасына барабар.**

Д а л и л д ө ө. Координаталар башталышы параллелограммдын бир чокусунда, абсцисса огу анын бир жагында жаткандай кылып координаталар системасын тандап алабыз (144-сүрөт).



144-сүрөт.

$OA=a$ деп белгилесек, анда $A(a, 0)$ болот. $C$ чокусунун координаталары $b$ жана $c$ болсун: $C(b, c)$. Анда $B$ чокусунун координаталары $a+b$ жана $c$ болоору түшүнүктүү: $B(a+b,\ c)$.

Эми $OABC$ параллелограммынын жактарынын жана диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарын эсептеп, теореманын шартын канааттандыра тургандыгын текшеребиз. Жактарынын узундуктарынын квадраттарын эсептейбиз:

$$OA^2=a^2,\ AB^2=(a+b-a)^2+(c-0)^2=b^2+c^2,\ \ BC^2=a^2,\ C^2=b^2+c^2.$$

Анда

$$OA^2+AB^2+BC^2+OC^2=2a^2+2b^2+2c^2 \qquad (1)$$

болот. Эми диагоналдарынын узундуктарынын квадраттарын эсептейбиз:

$$OB^2=a^2+2ab+b^2+c^2,$$

$$AC^2=b^2-2ab+a^2+c^2.$$

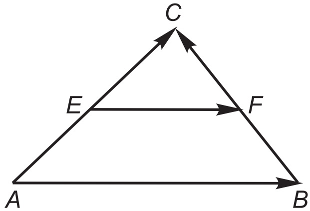
Анда

$$OB^2+AC^2=2a^2+2b^2+2c^2 \qquad (2)$$

болот. (1) менен (2) ни салыштырып, $OA^2+AB^2+BC^2+OC^2=OB^2+AC^2$ ка ээ болобуз. Теорема далилденди.

*64-теорема.* **Үч бурчтуктун орто сызыгы негизине параллель жана анын жарымына барабар.**

Д а л и л д ө ө. Бул теорема мурда далилденген, азыр векторлорду колдонуп далилдейбиз. $ABC$ үч бурчтугу берилсин (145-сүрөт). $EF$ — анын орто сызыгы. $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{EF}$, векторлорду белгилейбиз.



145-сүрөт.

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC} \qquad (3)$$

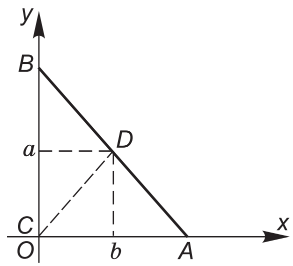
жана

$$\vec{EC}=\vec{EF}+\vec{FC} \qquad (4)$$

болот. Мында $\vec{EC}=\frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{FC}=\frac{1}{2}\vec{BC}$ болоору түшүнүктүү. Анда (4) дөн $\frac{1}{2}\vec{AC}=\vec{EF}+\frac{1}{2}\vec{BC}$ болот. Эми (3) барабардыкты пайдалансак $\vec{EF}=\frac{1}{2}\vec{AB}$ болот. Векторду санга көбөйтүүнүн негизинде $\vec{EF}\parallel\vec{AB}$, б. а. $EF\parallel AB$. Ал эми $\vec{EF}$ жана $\vec{AB}$ векторлору бирдей багытталгандыктан $EF=\frac{1}{2}AB$ болот. Теорема далилденди.

1- м а с е л е. Координаталар методун пайдаланып, тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын ортосунда жаткан чекит чокуларынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле.

Ч ы г а р у у. $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (146-сүрөт). Катеттери $a$, $b$ болсун. $C$ тик бурчунун чокусу координаталар башталышы $O$ менен, катеттери $x$, $y$ октору менен дал



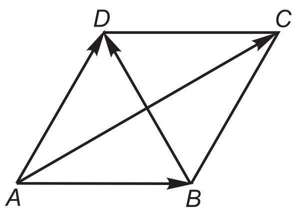
146-сүрөт.

келсин. $D$ чекити $AB$ гипотенузасынын ортосунда жатсын. $A(b, 0)$, $B(0, a)$ болот. § 44 тын негизинде $D(\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ болот.

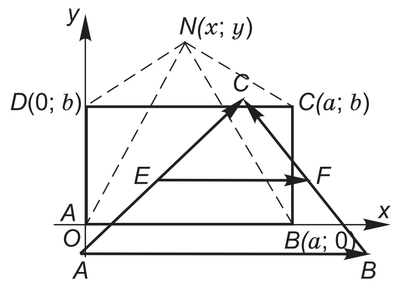
Эми эки чекиттин арасындагы аралыкты аныктоо формуласын колдонуп, $AD=DB=OD$ экендигине толук ишенүүгө болот.

2- м а с е л е. Векторлордун жардамы менен ромбдун диагоналдары перпендикуляр болоорун далилдегиле.

Ч ы г а р у у. $ABCD$ ромб болсун (147-сүрөт). $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ векторлорун белгилейбиз. Мында $AC$, $BD$ диагоналдарынын перпендикулярдуулугун көрсөтүү үчүн $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ (алардын скалярдык көбөйтүндүсү нөл) болорун далилдөө (§ 51. 5-касиет) жетиштүү болот.



147-сүрөт.



148-сүрөт.

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$ боло тургандыгы белгилүү. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиеттерин, ромбдун жактарынын барабардыгын эске алсак,

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AD}^2 - \vec{AB}^2 = 0$$

болот, б. а. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$. Демек, $\vec{AC} \perp \vec{BD}$, мындан $AC \perp BD$ болот. Маселе чыгарылды.

**3- м а с е л е.** $ABCD$ тик бурчтугу берилген. Каалагандай $N$ чекити үчүн $AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$ болоорун далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. Координаталар системасынын башталышы берилген. Аны $ABCD$ тик бурчтугунун бир чокусу менен дал келгендей, ал эми координаталар октору анын жактары менен дал келгендей кылып тандап алабыз (148-сүрөт). $A$ чокусу координата башталышы $O$ менен дал келсин. Анда $A(0, 0)$ болот. $Ox$ огу $AB$ жагы менен дал келсин. $AB=a$ деп эсептейли. Анда $B$ чокусунун координаталары $B(a, 0)$ болот.

$AD$ жагы $Oy$ огунда жатсын. $AD=b$ деп белгилейли. $D$ чокусу $Oy$ огунда жаткандыктан, анын координаталарын $D(0, b)$ деп жаза алабыз. Эми $C$ чокусунун координаталары оңой аныкталат: $C(a, b)$.

Тегиздиктеги каалагандай $N$ чекитин бул координаталар системасына карата $N(x, y)$ деп жаза алабыз. Эми маселенин шартын канааттандыруучу аралыктардын квадраттарын эсептеп, салыштырабыз:

$AN^2=x^2+y^2$, $NC^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, $NB^2=(x-a)^2+y^2$, $DN^2=x^2+(y-b)^2$.

Бул табылган маанилерди салыштырып

$$AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$$

экендигине оңой ишенүүгө болот.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи 8 дм, ал эми ал негизге жүргүзүлгөн медианасы 16 дм. Үч бурчтуктун калган медианаларын тапкыла.

**2.** Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты катеттеринин квадраттарынын суммасына барабар (Пифагордун теоремасы). Далилдегиле.

**3.** Эгерде параллелограммдын диагоналдары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.

**4.** Параллелограммдын диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнөөрүн далилдегиле.

**5.** Үч бурчтук берилген. Ага сырттан сызылган айлананын борборун тапкыла.

**6.** Үч бурчтуктун жактары $a$, $b$, $c$ берилген. $b$ жагына жүргүзүлгөн медиананын узундугун тапкыла.

*Көрсөтмө.* 63-теореманы пайдалангыла.

**7.** $ABC$ үч бурчтугунун $B$ бурчунун биссектрисасы $BD$. Эгерде: 1) $AB=10$ м, $BC=15$ м, $AC=20$ м болсо, $AD$ жана $DC$ кесиндилерин; 2) $AD:DC=8:5$ жана $AB=16$ м болсо $BC$ жагын; 3) $AB:BC=2:7$ жана $DC-AD=1$ м болсо, $AC$ жагын тапкыла.

*Көрсөтмө.* $ABD$ жана $CBD$ үч бурчтуктарына синустар теоремасын колдонуп $AD:CD=AB:BC$ деп алгыла.

**8.** Тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги 20 см, ал эми анын негизинин каптал жагына катышы 4:3 кө барабар. Ал үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун аныктагыла.

**9.** Трапециянын орто сызыгы жөнүндөгү теореманы векторлорду колдонуп далилдегиле.

**10.** Трапециянын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесинди анын негиздеринин айырмасынын жарымына барабар болорун далилдегиле.

**11.** Үч бурчтуктун чокулары $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(4; 5)$. Ал үч бурчтуктун бурчтарынын косинустарын тапкыла.

**12.** Векторлордун жардамы менен квадраттын диагоналдары өз ара бири-бирине перпендикулярдуу болорун далилдегиле.

## IX ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

**1.** Тегиздиктеги чекиттердин координаталарын түшүндүрүп бергиле.
**2.** Координаталары берилген чекитти $xOy$ системасында кантип түзөбүз?
**3.** Координаталары берилген эки чекиттин аралыгын кантип табабыз?
**4.** Борбору $C(a; b)$, радиусу $R$ ге барабар айлананын теңдемесин жазгыла.
**5.** Борбору координаталар башталышы $O(0; 0)$чекитинде жаткан айлананын теңдемесин жазгыла.
**6.** Эки чекит аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазгыла.
**7.** $x$ жана $y$ окторуна параллель түз сызыктардын теңдемелери кандай болот?
**8.** Кандай векторлор: а) барабар; б) параллель; в) перпендикуляр болушат?
**9.** Векторлордун суммасы кандай касиеттерге ээ?
**10.** Эки вектордун айырмасын кантип табабыз?
**11.** Векторду санга көбөйтүүнүн кандай касиеттери бар?
**12.** Кең бурчтун тригонометриялык функциялары кантип аныкталат?
**13.** Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнө аныктама бергиле.
**14.** Вектордун координаталары кантип табылат?
**15.** Координаталары менен берилген эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү кантип табылат?
**16.** Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн кандай касиеттерин билесиңер?
**17.** Вектордун узундугу кантип аныкталат?
**18.** Косинустар теоремасын айтып бергиле.
**19.** Синустар теоремасын айтып бергиле.

## IX ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

**1.** Диагоналдары 8 см жана 12 см болгон ромб берилген. Ромбдун диагоналдары координаталар окторунда жата тургандыгын билип, анын: а) чокуларынын координаталарын тапкыла; б) жагынын узундугун тапкыла.

**2.** Жактары 4 см жана 3 см болгон тик бурчтук берилген. Анын бир чокусу координаталар башталышы менен дал келип, жактары координаталар окторунда жатса: 1) чокуларынын координаталарын (тик бурчтук I чейректе жатса); 2) диагоналдарынын узундугун тапкыла. Канча учур болушу мүмкүн?

**3.** Узундугу 6 дм болгон $AB$ кесиндисинин $A(3; -2)$ учу берилген. $B(-3; y)$ учунун ординатасын тапкыла.

**4.** $x=-2$; $y=3$ түз сызыктарын жүргүзгүлө. Алар кандай чекитте кесилишет?

**5.** $x^2+y^2=16$ айланасы жана $y=x$ түз сызыгы берилген. $xOy$ системасында: а) аларды түзгүлө; б) алардын кесилишкен чекитин тапкыла.

**6.** $3\vec{a}$ жана $-3\vec{a}$ векторлору берилген. а) Алар кандай векторлор?; б) Узундуктары кандай? в) Алардын суммасы эмнеге барабар? г) Алардын айырмасын тапкыла.

**7.** Эгерде $\vec{a}=(-2;5)$, $\vec{b}=(1;-2)$ болсо, а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторун тапкыла.

**8.** Эгерде $\alpha$ бурчу 1) $120^\circ$; 2) $135^\circ$; 3) $150^\circ$ болсо, таблицаны колдонбостон $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ нын маанилерин тапкыла.

**9.** Стюарттын[1] теоремасын далилдегиле: $ABC$ үч бурчтугу берилип, $D$ чекити $BC$ жагында ($B$ жана $C$ чекиттеринин арасында) жатса, анда $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot CD \cdot BD$ барабардыгы туура болот.

*Көрсөтмө.* Координаталар системасынын башталышын үч бурчтуктун чокусу менен, $Ox$ огун үч бурчтуктун $BC$ жагы менен дал келгендей кылып тандап алгыла. Ага карата $A$, $D$, $C$ чекиттерин белгилеп, изделүүчү барабардыктагы аралыктарды эсептөө керек.

**10*.** $ABC$ үч бурчтугунун жактары $a$, $b$, $c$ берилсе, анда Стюарттын теоремасын пайдаланып, $A$ чокусунан жүргүзүлгөн медиананын, бийиктиктин жана биссектрисанын узундуктарын табуунун формулаларын чыгаргыла.

*Көрсөтмө.* Изделүүчү медиананы, бийиктикти, биссектрисаны эсептөөдө теоремадагы $AD$ кесиндисин тиешелүү түрдө медиана, бийиктик жана биссектриса катары алуу керек.

**11.** $ABC$ үч бурчтугу $\omega(O;R)$ айланасына ичтен сызылган. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ болоорун далилдегиле.

**12.** Үч бурчтуктун жактары $a$, $b$, $c$ берилген. Бийиктиктерин тапкыла.

**13.** Үч бурчтуктун жактары $a$, $b$, $c$ берилген. Ал үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.

**14.** Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүн пайдаланып, тик бурчтуктун диагоналдары барабар экендигин далилдегиле.

**15.** Эгерде $M$ чекити $AB$ кесиндисинин ортосунда жатса, тегиздиктин каалагандай $K$ чекити үчүн $KA^2+KB^2=2KM^2+\frac{1}{2}AB^2$ барабардыгы туура болоорун далилдегиле.

*Көрсөтмө.* $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KM}$ жана $\overrightarrow{AB}$ векторлорун белгилеп, $\overrightarrow{KA}^2$ ты жана $\overrightarrow{KB}^2$ ты эсептегиле. Барабардыкты далилдөөнүн дагы кандай жолу бар?

[1] М. Стюарт (1717—1785), англиялык математик. Теоремасын 1746-ж. жарыялаган.

# X глава ГЕОМЕРИЯЛЫК ӨЗГӨРТҮҮЛӨР. ФИГУРАЛАРДЫН ОКШОШТУГУ

## § 54. ЖЫЛДЫРУУ

Аныктама. **Эгерде $F$ фигурасынын ар бир чекити кандайдыр бир эреженин (амалдын) жардамы менен $F'$ фигурасынын бир гана чекитине туура келтирилсе, анда бул амалды $F$ фигурасын $F'$ фигурасына геометриялык өзгөртүү деп айтабыз.**

Геометриялык өзгөртүүнүн бир түрү болуп жылдыруу эсептелет. **Чекиттердин арасындагы аралык сакталгандай кылып геометриялык өзгөртүү жылдыруу деп аталат.** Демек, тегиздиктеги жылдырууда $A$ жана $B$ чекиттери тиешелүү түрдө $A'$ жана $B'$ чекиттерине чагылдырылса, анда $AB=A'B'$ болот.

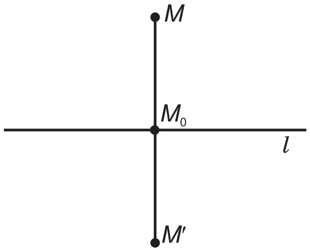
Жылдыруунун аныктамасынын негизинде жылдыруу жөнүндөгү түшүнүк фигуралардын барабардыгы жөнүндөгү түшүнүккө байланыштуу экендигин байкайбыз. Чындыгында фигуралардын барабардыгын төмөндөгүдөй аныктоого болот: тегиздиктеги $F$ жана $F'$ фигураларынын чекиттеринин арасындагы өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүк түзүлүп, $F$ тен алынган ар бир $AB$ кесиндиси $F'$ деги ага тиешелүү $A'B'$ кесиндисине барабар болсо, анда $F$ жана $F'$ фигуралары барабар деп аталат. Демек, $F'$ фигурасы $F$ фигурасынан жылдыруу аркылуу алынса, анда аныктоонун негизинде алар барабар болушат, ал эми $F$ жана $F'$ фигуралары барабар болушса, анда алардын бирин жылдыруу аркылуу экинчисине дал келтирүүгө болот.

Ошентип, жылдырууда фигуранын формасы, өлчөмдөрү өзгөрбөйт, алардын жайланышкан орду гана өзгөрөт.

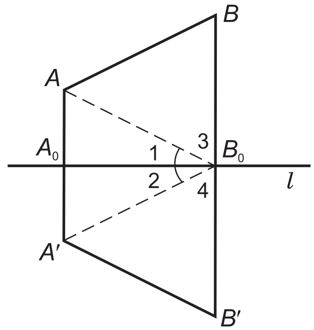
Жылдыруунун түрлөрү болуп окко карата симметрия, борбордук симметрия, чекиттин айланасында буруу жана параллель көчүрүү эсептелет. Төмөндө ал өзгөртүүлөргө токтолобуз.

### 54.1. ОКТУК, БОРБОРДУК СИММЕТРИЯЛАР

Аныктама. $MM'$ **кесиндиси** $l$ **түз сызыгына перпендикулярдуу болуп, ал түз сызык аркылуу тең экиге бөлүнсө, анда** $M$ **жана** $M'$ **чекиттери** $l$ **түз сызыгына карата симметриялуу деп аталат** (149-сүрөт).



149-сүрөт.



150-сүрөт.

Мында $l$ түз сызыгы $M$ жана $M'$ чекиттеринин симметрия огу деп аталат. Аныктаманын негизинде $M'M_0=M_0M$ болот. $l$ огунда жаткан ар бир чекит өзү-өзүнө симметриялуу болору түшүнүктүү. Ал түздөн-түз аныктамадан келип чыгат.

Тегиздиктин ар бир $M$ чекитин кандайдыр $l$ огуна карата симметриялуу кылып $M'$ чекитине өзгөртүү **окко карата симметрия** деп аталат.

Окко карата симметрия өз ара бир маанилүү өзгөртүү болот. Анткени — тегиздиктин ар бир $M$ чекитин, аныктаманын ар бир талабы аткарылгандай кылып, бир гана $M'$ чекитине симметриялуу өзгөртүүгө болот. Ошондой эле, тегиздиктин ар бир $M'$ чекитин $l$ огуна карата симметриялуу өзгөртсөк, кайрадан бир гана $M$ чекитине ээ болобуз.

Тегиздикте кандайдыр бир $l$ огуна карата $F$ фигурасынын ар бир $M$ чекитине симметриялуу болгон $M'$ чекити табылса, анда мындай $M'$ чекиттеринин көптүгү $F'$ фигурасын аныктайт. Бул учурда $F$ жана $F'$ фигуралары $l$ огуна карата симметриялуу деп аталат.

Окко карата симметриянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

**1.** Окко карата симметрияда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт. $l$ огу жана анда жатпаган $A$ жана $B$ чекиттери берилсин (150-сүрөт). $l$ огуна карата симметрияда $A$ жана $B$ чекиттери тиешелүү $A'$ жана $B'$ чекиттерине өтсүн. Мында $AB=AB'$ болорун далилдейбиз.

$\Delta AA_0B_0=\Delta A'A_0B_0$ болгондуктан, $AB_0=A'B_0$, $\angle 1=\angle 2$ болот. Мындан $\angle 3=\angle 4$ келип чыгат. Натыйжада $\Delta AB_0B=\Delta A'B_0B'$ экендигине ээ болобуз. Ошентип, $AB=A'B'$ болот.

**2.** Окко карата симметрия — бул жылдыруу болот. Мунун тууралыгы жылдыруунун аныктамасынан жана 1-касиеттен келип чыгат.

**3.** Окко карата симметриялуу фигуралар барабар болушат. Бул ырастоо фигуралардын барабардыгынын аныктамасы жана 1-касиеттин негизинде далилденет.

Н а т ы й ж а. **Окко карата симметрияда түз сызык түз сызыкка, шоола шоолага өтөт** (чагылдырылат). Бул касиеттин тууралыгы 3-касиеттен келип чыгат.

А н ы к т а м а. **Эгерде $MM'$ кесиндиси $O$ чекитинде тең экиге бөлүнсө, анда $M$ жана $M'$ чекиттери $O$ чекитине карата симметриялуу деп аталышат** (151-сүрөт).


151-сүрөт.

Мында $O$ чекити симметриялуу $M$ жана $M'$ чекиттеринин симметрия борбору болот. Аныктаманын негизинде $MO=OM'$. $O$ чекити өзү-өзүнө симметриялуу (же өзү-өзүнө туура келет) деп эсептелет.

Тегиздиктин ар бир $M$ чекитин $O$ борборуна карата симметриялуу кылып $M'$ чекитине өзгөртүү **борбордук симметрия** деп аталат.

Борбордук симметрия — бул өз ара бир маанилүү чагылдыруу болуп эсептелет. Анткени аныктаманын талабы аткарылгандай кылып тегиздиктин ар бир $M$ чекитине борбордук симметриялуу болгон бир гана $M'$ чекитин табууга болот. Ошондой эле, тескерисинче, $M'$ чекитин $O$ борборуна карата симметриялуу кылып чагылдырсак, кайрадан бир гана $M$ чекитине ээ болобуз.

Эгерде тегиздикте кандайдыр $F$ фигурасынын ар бир $M$ чекитин берилген $O$ борборуна карата симметриялуу чагылдырсак, $M'$ чекитине ээ болобуз. Ал $M'$ чекиттеринин көптүгү $F'$ фигурасын аныктайт. Бул учурда $F$ жана $F'$ фигуралары $O$ борборуна карата симметриялуу болушат.

Борбордук симметриянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

**1.** Борбордук симметрияда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

$O$ симметрия борбору, $A, B$ чекиттери берилсин. $O$ борборуна карата симметрияда ал чекиттер $A'$, $B'$ чекиттерине чагылдырылат (чиймени өзүңөр чийгиле). Аныктаманын негизинде $AO=OA'$, $BO=OB'$. $\angle AOB=\angle A'OB'$ (вертикалдык бурчтар). Демек, $AOB$ жана $A'OB'$ үч бурчтуктары барабар болушат. Мындан $AB=$ $=A'B'$ болот.

**2.** Борбордук симметрия — бул жылдыруу болуп эсептелет.

**3.** Борбордук симметриялуу фигуралар барабар болушат.

Бул акыркы эки касиеттин тууралыгы 1-касиеттен жана борбордук симметриянын жогорудагы аныктамаларынан келип чыгат.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $A, B$ чекиттери, $CD$ кесиндиси берилген. Аларга: а) $l$ огуна карата; б) $O$ борборуна карата симметриялуу фигураларды түзгүлө.
2. Кесинди берилген. Анын симметрия огун жана симметрия борборун тапкыла.
3. Квадрат берилген. Анын канча симметрия огу бар, канча симметрия борбору бар? Алар кайда болот?
4. Ромбдун диагоналдарын камтыган түз сызыктар анын симметрия октору болорун далилдегиле.
5. Тең капталдуу трапециянын негиздеринин тең ортолору аркылуу өткөн түз сызык анын симметрия огу болоорун далилдегиле.
6. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун бири $30^\circ$ ка барабар болсо, кичине катети гипотенузанын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

   *Көрсөтмө*. Чоң катетине карата берилген үч бурчтукка симметриялуу үч бурчтукту түзгүлө.
7. $A(-2; 3)$, $B(2; -1)$ чекиттеринин симметрия огун тапкыла.
8. $xOy$ координаталар системасынын $Ox$ огуна карата чокулары $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-3; 5)$ болгон $ABC$ үч бурчтугуна симметриялуу үч бурчтукту тапкыла. Алардын периметрлерин салыштыргыла.
9. Ромбдун (квадраттын) үч чокусу берилген. Төртүнчү чокусун түзгүлө.
10. Түз сызык айлананы жанып өтөт. Ал түз сызыкка карата берилген айланага симметриялуу айлананы түзгүлө.
11. Бир жагы, ага жанаша жаткан бурчу жана калган эки жагынын айырмасы боюнча үч бурчтукту түзгүлө.

    *Көрсөтмө*. Анализде берилген жактын каршысында жаткан бурчтун биссектрисасына карата үч бурчтуктун бир жагын экинчи жагына симметриялуу чагылдыргыла.
12. Берилген диагоналы берилген $a$ түз сызыгында жаткандай, ал эми эки чокусу $b$ жана $c$ түз сызыктарында (же берилген эки айланада) жаткандай ромбду түзгүлө.

    *Көрсөтмө*. $b$ же $c$ түз сызыгын (же айланалардын бирин) $a$ түз сызыгына карата симметриялуу өзгөрткүлө.
13. Жагы, ага каршы жаткан бурчу жана калган эки жагынын айырмасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

    *Көрсөтмө*. 11-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла.

**14*.** Эки жагы жана ал жактардын каршысындагы бурчтардын айырмасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Изделүүчү үч бурчтук $ABC$ болсун, $a, b$ жактары, $\angle B - \angle A = \alpha$ бурчу берилсин. Берилгендер боюнча $AC'C$ үч бурчтугун түзөбүз. $C$ жана $C'$ чекиттеринин симметрия огу $l$ болсун. $AC'C$ үч бурчтугун $l$ огуна карата симметриялуу өзгөртсөк, изделүүчү үч бурчтукка ээ болобуз.

**15.** $a$ түз сызыгы $AB$ кесиндисин кесип өтөт. $ABM$ бурчу $a$ түз сызыгы аркылуу тең экиге бөлүнгөндөй кылып, $a$ түз сызыгынан $M$ чекитин тапкыла.

*Көрсөтмө.* $a$ түз сызыгына карата $B$ чекитине (же $A$ чекитине) симметриялуу $B'$ чекитин тапкыла. Анда $a$ түз сызыгы менен $AB'$ түз сызыгынын кесилиши изделүүчү $M$ чекити болот.

**16.** а) Түз сызыктын канча симметрия борбору бар? б) Параллель эки түз сызыктын канча симметрия борбору бар?

**17.** Борборго карата симметриялуу кесиндилердин барабар экендигин далилдегиле.

**18.** Төмөндөгүлөрдү далилдегиле: а) төрт бурчтуктун жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары болот; б) ал төрт бурчтуктун диагоналдарынын ортолору жана карама-каршы эки жактарынын ортолору да параллелограммдын чокулары болушат; в) алынган үч параллелограмм жалпы борборго ээ.

**19.** Параллелограммдын бурчтарынын биссектрисалары кесилишкенде тик бурчтукту пайда кылаарын далилдегиле.

**20.** Борбордук симметрияда берилген айлана ага барабар болгон айланага өзгөртүлөрүн далилдегиле.

*Көрсөтмө.* Берилген айлананын борборунун жана каалаган чекиттин борбордук симметриясын тапкыла.

**21.** Чектелген жалпак фигура бирден ашык симметрия борборуна ээ болбой тургандыгын далилдегиле.

*Көрсөтмө.* Берилген фигура $O_1$ жана $O_2$ симметрия борборлоруна ээ болсун, $O_1$ жана $O_2$ чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзөбүз. Эгерде $O_1O_2$ түз сызыгы ал фигураны кессе, анда $O_1$ жана $O_2$ чекиттери бир эле кесиндинин ортолору болот эле; эгерде $O_1O_2$ түз сызыгы фигураны кеспесе, анда фигура чектелбеген болот.

**22.** Жактарынын саны так болгон ар кандай көп бурчтук симметрия борборуна ээ болбой тургандыгын далилдегиле.

**23.** $A(-2;\ 4)$ жана $B(4;\ -6)$ чекиттеринин симметрия борборун тапкыла.

**24.** Координаталар башталышына карата $M(-2;\ 3)$ чекитине симметриялуу чекитти тапкыла.

**25.** Борборго карата симметриялуу түз сызыктар параллель болоорун далилдегиле.

**26*.** Берилген $l$ түз сызыгын жана берилген айлананы кесип өткөндө, алардын арасындагы кесиндиси берилген $M$ чекитинде тең экиге бөлүнгөндөй кылып ал чекит аркылуу түз сызык жүргүзгүлө.

*Көрсөтмө.* $l$ түз сызыгын же айлананы $M$ чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

**27*.** $w$ жана $w_1$ айланаларынын кесилишкен $A$ чекити аркылуу түз сызык жүргүзгүлө. Бул түз сызыктын эки айлананы кескендеги кесиндилери барабар болсун.

*Көрсөтмө.* Берилген айланалардын бирин $A$ чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

**28.** Эки жагы жана үчүнчү жагына жүргүзүлгөн медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

**29.** Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Медианалардын кесилишкен чекитине карата медианалардын бирин симметриялуу чагылдыргыла.

**30.** Берилген бурчтун ичинде $A$ чекити жатат. $A$ чекити аркылуу, бурчтун жактарынын арасында камалган кесиндиси ал чекитте тең экиге бөлүнгөндөй кылып түз сызык жүргүзгүлө.

*Көрсөтмө.* Бурчтун жактарынын бирин $A$ чекитине карата симметриялуу чагылдыргыла.

**31.** Бир чекитте кесилишүүчү үч түз сызык жана алардын биринде жатуучу $A$ чекити берилген. Бир чокусу $A$ чекитинде, медианалары үч түз сызыкта жаткан үч бурчтук түзгүлө.

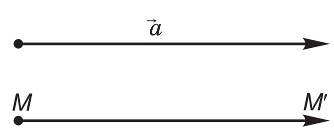
*Көрсөтмө.* $A \in a$, $a \cap b \cap c = 0$ болсун. $\frac{1}{2}AO = OD$ болгондой $D$ чекити табылат (медианалардын касиети). $b$ же $c$ ны $D$ га карата симметриялуу чагылдыргыла.

### 54.2. ПАРАЛЛЕЛЬ КӨЧҮРҮҮ

$\vec{a}$ вектору берилсин.

Аныктама. **Тегиздиктин ар бир $M$ чекитин $M'$ чекитине $MM' = \vec{a}$ болгондой өзгөртүү** (152-сүрөт) **параллель көчүрүү деп аталат.**

Мында тегиздиктин ар бир чекити $\vec{a}$ векторунун багыты боюнча ошол эле тегиздиктин бирден гана чекитине чагылдырылат. Бул өзгөртүүдө $M$



152-сүрөт.

чекиттерине туура келүүчү $M'$ чекиттердин аралыктары $\vec{a}$ векторунун узундуктарына барабар.

$\vec{a}$ вектору жана өз ара бир маанилүү туура келүүчү $M$ жана $M'$ чекиттери берилсе, анда тегиздикке параллель көчүрүү (которуу) толук аныкталган болот.

Параллель көчүрүү тегиздикти өзүн-өзүнө өз ара бир маанилүү чагылдыруу болот. Чындыгында эле, тегиздикте $\vec{a}$ вектору жана $M$ чекити берилсе, анда $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ болгондой бир гана $M'$ чекити табылат (эки вектордун барабардыгынын аныктоосу боюнча). Эгерде $M'$ чекитин $\vec{a}$ векторуна карама-каршы болгон $-\vec{a}$ вектору боюнча параллель көчүрсөк, анда бир гана $M$ чекитине ээ болобуз. Эгерде $\vec{a}$ вектору нөл вектор $(\vec{0})$ болсо, анда параллель көчүрүү теңдеш өзгөртүү болот, мында тегиздиктин ар бир чекити өзү-өзүнө өзгөртүлөт.

Эгерде тегиздиктеги $F$ фигурасынын ар бир $M$ чекитин берилген $\vec{a}$ векторуна карата параллель көчүрсөк $M'$ дей чекиттердин көптүгүнө ээ болобуз, алар $F'$ фигурасын аныктайт. Демек, $F$ фигурасын параллель көчүрүүдө $F'$ фигурасы алынган болот.

Параллель которуунун касиеттерине токтолобуз.

**1.** Параллель которууда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

$\vec{a}$ векторуна параллель көчүрүлүүчү $A$ жана $B$ чекиттери берилсин (чиймесин өзүңөр чийгиле). Анда аныктама боюнча $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{a}$ болот, б. а. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Демек, эки вектордун барабардыгынын аныктамасы боюнча $AA'$ жана $BB'$ кесиндилери параллель жана барабар болушат. Ошондуктан, $AA'B'B$ төрт бурчтугу параллелограмм болот, мындан $AB=A'B'$ экендиги келип чыгат.

**2.** Параллель көчүрүү жылдыруу болот. Бул 1-касиеттен келип чыгат.

**3.** Параллель көчүрүүдө $F$ фигурасы $F'$ фигурасына өзгөртүлсө, анда $F$ жана $F'$ фигуралары барабар болушат.

Бул касиеттин тууралыгы 1-, 2-касиеттерден жана фигуралардын барабардыгынын аныктамасынан келип чыгат.

**4.** Параллель көчүрүүдө ар кандай түз сызык ага параллель болгон түз сызыкка өзгөртүлөт.

Бул касиеттин тууралыгы 1-касиеттен келип чыгат. Чындыгында эле, $A$ жана $B$ чекиттери аркылуу өтүүчү $AB$ түз сызыгы параллель көчүрүүдө $A'$ жана $B'$ чекиттери аркылуу өтүүчү $A'B'$ түз сызыгына өзгөртүлөт. Мында $AA'B'B$ параллелограмм болгондуктан, $AB \parallel A'B'$ экендиги келип чыгат.

Демек, параллель которууда параллель түз сызыктар параллель түз сызыктарга өзгөртүлөт.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** $\vec{a}$ вектору берилген. Ал векторго карата: а) $A, B$ чекиттерин; б) $CD$ кесиндисин; в) $a$ түз сызыгын; г) $ABC$ үч бурчтугун; д) берилген айлананы параллель которгула.

**2*.** Эгерде үч бурчтуктун эки медианасы барабар болсо, анда ал үч бурчтук тең капталдуу болоорун далилдегиле.

*Көрсөтмө.* $ABC$ үч бурчтугунун $AE$ жана $CD$ медианалары барабар болсун. $AD=CE$ экендигин көрсөтсөк, маселе чыгарылат. Ал үчүн $ADC$ жана $CEA$ үч бурчтуктарынын барабардыгын көрсөтүү зарыл. Ушул максатта $CD$ медианасын $DE$ вектору боюнча параллель көчүргүлө.

**3*.** Трапециянын негиздеринин суммасы диагоналдарынын суммасынан кичине, ал эми алардын айырмасынан чоң экендигин далилдегиле.

*Көрсөтмө.* $ABCD$ трапециясынын $BD$ диагоналын $DC$ вектору боюнча параллель көчүрүп, андан кийин үч бурчтуктун жактарын салыштыруу теоремасынан пайдалангыла.

**4*.** Эгерде $ABCD$ төрт бурчтугунун $MN$ орто сызыгы ($M$ — $AD$ жагынын ортосу, $N$ — $BC$ жагынын ортосу) $AB$ жана $CD$ негиздеринин жарым суммасына барабар болсо, анда төрт бурчтук трапеция болоорун далилдегиле.

*Көрсөтмө.* 3-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.

**5.** $\vec{a}=(3; -5)$ вектору берилген. Бул векторго карата: а) координаталар башталышын жана $M\,(4; 6)$ чекитин; б) $Ox$ огун; в) $Oy$ огун параллель көчүргүлө.

**6.** Параллель көчүрүүдө берилген түз сызык өзүнө параллель түз сызыкка өзгөртүлөрүн далилдегиле.

**7.** Параллель көчүрүүдө эки параллель түз сызык кайрадан параллель түз сызыктарга өзгөртүлөрүн далилдегиле.

*Көрсөтмө.* 6-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла.

**8.** $ABC$ үч бурчтугун $BC$ вектору боюнча параллель көчүрсөк $A'B'C'$ үч бурчтугун алабыз. $ABC$ жана $A'B'C'$ үч бурчтуктарынын периметрлерин салыштыргыла.

**9.** Төрт жагы боюнча трапеция түзгүлө.

**10.** Чокусу чиймеде көрсөтүлбөгөн бурчтун биссектрисасын түзгүлө. *Көрсөтмө.* Берилген бурчтун жактарын бирдей аралыкка параллель көчүрүү керек.

**11.** Негиздери жана диагоналдары боюнча трапеция түзгүлө.

*Көрсөтмө.* 9-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.

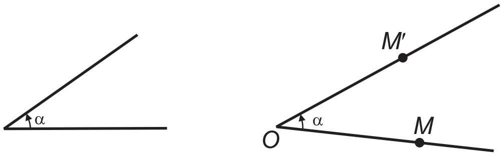
**12*.** Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

*Көрсөтмө.* $ABC$ үч бурчтугунун медианаларынын кесилишкен чекити $O$ болсун. $OC$ кесиндисин $\overline{OB}$ векторуна карата параллель көчүрсөк, $OBC'C$ параллелограммына ээ болобуз. $OBC'$ үч бурчтугун түзүүгө болот. Анын жактары берилген медианалардын $\frac{2}{3}$ бөлүгүн түзөт.

## 54.3. БУРУУ

Чекиттин айланасында буруууга токтолобуз.

$\alpha$ багытталган бурчу жана ***O*** чекити берилсин (153-сүрөт).




153-сүрөт.

А н ы к т а м а. **Тегиздиктин *M* чекитин *OM=OM′*, *∠MOM′=α* болгондой кылып *M′* чекитине өзгөртүү *M* чекитин *O* чекитинин айланасында *α* бурчуна буруу деп аталат.**

Мында $O$ — буруу борбору, $\alpha$ — буруу бурчу деп аталат. Буруууда $O$ борбору өзү-өзүнө өзгөрөт деп эсептелет.

$O$ борборунун айланасында буруунун аткарылышы $\alpha$ бурчунун багытына бирдей багытта бурулса, анда ал буруу **оң багытта** ($\alpha$ оң) болот, ал эми анын багытына каршы бурулса, анда буруу тескери багытта ($\alpha$ терс) аткарылган болот. $\alpha$ бурчунун багыты көрсөтүлбөсө, анда буруууну оң деп түшүнөбүз. $\alpha$ бурчу 0 менен $2\pi$ нин арасында өзгөрөт $(0\leq\alpha\leq2\pi)$. Эгерде $\alpha=0$ (же $2\pi$) болсо, анда $M$ чекити өзү-өзүнө өзгөргөн болот (же теңдеш өзгөртүлгөн болот). Бул учурда теңдеш буруууга ээ болобуз.

Чекиттин айланасында буруу бир маанилүү чагылдыруу болот. Ошондуктан ал геометриялык өзгөртүү. Чындыгында эле, тегиздикте $O$ борбору, $\alpha$ бурчу (белгилүү бир багыт боюнча) жана $M$ чекити берилсе, $OM=OM'$, $\angle MOM'=\alpha$ болгондой бир гана $M'$ чекитин табууга болот. Ал эми ошол эле $O$ борборунун айланасында $M'$ чекитин $-\alpha$ бурчуна ($\alpha$ га карама-каршы) бурсак, анда бир гана $M$ чекитине ээ болобуз. Бул учурда мурдагыга караганда тескери буруууну алабыз.

Чекиттин айланасында буруунун төмөндөгүдөй касиеттери бар.

**1.** Чекиттин айланасында буруууда эки чекиттин аралыгы өзгөрбөйт.

$O$ буруу борборуна жана $\alpha$ буруу бурчуна карата буруу берилсин. $A$ жана $B$ чекиттери бул буруууда $A'$ жана $B'$ чекиттерине өтөт. (Тиешелүү чиймени өзүңөр чийгиле).

Буруунун аныктамасы боюнча

$$OA=OA',\ OB=OB',\ \angle AOA'=\angle BOB'=\alpha.$$

Анда

$$\angle AOA'-\angle BOA'=\angle BOB'-\angle BOA'.$$
$$\angle AOB'=\angle A'OB'.$$

Натыйжада $\Delta OAB=\Delta OA'B'$ болот. Ошентип: $AB=A'B'$ ээ болобуз.

**2.** Чекиттин айланасында буруу жылдыруу болот. Бул касиеттин тууралыгы жылдыруунун аныктамасы жана 1-касиеттин жардамы менен негизделет.

**3.** $F$ фигурасын берилген буруу боюнча өзгөрткөндө $F'$ фигурасы алынса, анда $F$ жана $F'$ фигуралары барабар болушат.

$F$ фигурасын $O$ чекиттин айланасында $\alpha$ бурчуна бурганда $F'$ фигурасы алынды деп эсептейли. Анда $F$ фигурасынан алынган ар кандай $A$, $B$ эки чекитине $F'$ фигурасынан алынган $A'$, $B'$ эки чекити туура келет. Ал эми 1-касиеттин негизинде $AB=A'B'$ болот. Анда фигуралардын барабардыгынын аныктамасынын негизинде $F$ жана $F'$ фигуралары барабар болот.

Натыйжада чекиттин айланасында буруууда түз сызык, шоола тиешелүү түрдө түз сызыкка, шоолага өзгөртүлөт. Бул натыйжанын тууралыгы түздөн-түз 3-касиеттен келип чыгат.

**4.** Эгерде буруу бурчу $\alpha=180^\circ$ болсо, анда $O$ борборунун айланасында буруу борбордук симметрия болот.

Чындыгында эле, буруууда $M$ чекити $M'$ чекитине өтсө, анда $M$, $O$, $M'$ чекиттери бир түз сызыкта жатып, борбордук симметриянын аныктамасына баш иет.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $O$ жана $M$ чекиттери берилген. $M$ чекитин $O$ чекитинин айланасында (сааттын жебесинин айлануу багытына каршы багытта) а) $60^\circ$; б) $90^\circ$; в) $180^\circ$ ка бургандан келип чыгуучу $M'$ чекитин түзгүлө.
2. $O$ борбору, $\alpha$ бурчу берилген. а) $AB$ кесиндисин; б) $a$ түз сызыгын; в) $w$ айланасын $O$ борборунун айланасында (берилген багытта) $\alpha$ бурчуна бургула.

**3.** $\alpha$=180° та буруу борбордук симметрия болорун далилдегиле.
**4.** $\Delta ABC$ берилген. $A$ чокусунун айланасында 90° ка бурганда $\Delta AB'C'$ алынат, аны түзгүлө.
**5.** Ар бир чокусу берилген параллель үч түз сызыкта жаткан тең жактуу үч бурчтукту түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Берилген түз сызыктардын биринен $A$ чекитин белгилегиле. Калган эки түз сызыктын бирин $A$ чекитинин айланасында 60° бурчка бургула.

**6.** Чокулары борбордош үч айланада жатуучу тең жактуу үч бурчтукту түзгүлө.

*Көрсөтмө.* 5-маселенин көрсөтмөсүнөн пайдалангыла.

**7.** Үч чокусу берилген параллель үч түз сызыкта жатуучу квадратты түзгүлө. (5-маселенин чыгарылышынан пайдалангыла).
**8.** Бурч жана анын ичинде жаткан $A$ чекити берилген. Тик бурчунун чокусу $A$ чекитинде, калган эки чокусу берилген бурчтун жактарында жаткандай кылып тең жактуу тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Берилген бурчтун жактарынын бирин $A$ чекитинин айланасында 90° ка бургула.

**9.** $xOy$ системасында $A$ (2; 0) жана $B$ (0; −3) чекиттери берилген. Координаталар башталышынын айланасында ал чекиттерди сааттын жебесинин багытына карата: а) каршы багытта; б) бирдей багытта 90°ка бурсак, кандай чекиттер пайда болот?

## § 55. ГОМОТЕТИЯ. ОКШОШ ӨЗГӨРТҮҮ

Биз жылдырууда фигуранын формасы да, чоңдугу да, б. а. сызыктуу чоңдуктары өзгөрбөй тургандыгын көрдүк. Геометрияда формасын өзгөртпөй, бирок сызыктуу чоңдуктарын бирдей санга чоңойтуучу же кичирейтүүчү өзгөртүү да каралат. Андай өзгөртүүнүн катарына окшош өзгөртүү кирет.

А н ы к т а м а. **Тегиздиктин ар кандай $A$ жана $B$ чекиттерин тиешелүү түрдө $A'$ жана $B'$ чекиттерине $A'B'=k\cdot AB$ ($k\neq0$) болгондой кылып чагылдыруу окшош өзгөртүү деп аталат.**

Мында $k$ саны окшоштук коэффициенти деп аталат.

Окшош өзгөртүү өз ара бир маанилүү болоору түшүнүктүү.

$F$ фигурасы берилсин. Анын ар бир $M$ чекитин $k$ окшоштук коэффициенти боюнча $M'$ чекитине өзгөртөбүз. Анда $M'$ чекиттеринин көптүгү $F'$ фигурасын аныктайт. Мында $F'$ фигурасы $F$ фигурасынан окшош өзгөртүү аркылуу алынган болот. Мындай $F$ жана $F'$ фигуралары окшош деп аталышат да, $F$~$F'$

деп белгиленет (мында ~ окшоштук белгиси). Мисалы 154-сүрөттөгү фигуралар окшош.

Эгерде $k$=1 болсо, анда окшош өзгөртүү жылдыруу болот, б. а. теңдеш өзгөртүү болот.

Окшош өзгөртүүнүн аныктамасы боюнча $A'B'=k\cdot AB$ (1) болот. (1) барабардык $F$~$F'$ фигураларынын бардык чекиттери үчүн туура.

Ошондуктан окшош фигуралардын туура келүүчү кесиндилеринин катыштары барабар (пропорциялаш) болушат.

Анда үч бурчтуктардын жана көп бурчтуктардын окшоштуктары төмөнкүдөй аныкталат.

Эгерде эки үч бурчтуктун жактары пропорциялаш жана тиешелүү бурчтары барабар болушса, анда алар окшош болушат.

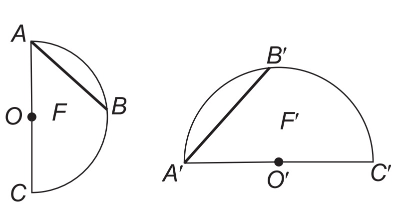
Демек, $\Delta ABC$ жана $\Delta A'B'C'$ үчүн $AB$: $A'B'=BC$:$B'C'=CA$:$C'A'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ болсо, анда $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болот. Эгерде эки көп бурчтутун туура келүүчү жактары пропорциялаш, ал эми туура келүүчү бурчтары барабар болсо, алар окшош болушат.

Мындан, эки туура $n$ бурчтуктар окшош болушат деп айта алабыз. Анткени алардын тиешелүү жактарынын катыштары барабар жана тиешелүү бурчтары да барабар. Эки туура $n$ бурчтуктун окшоштук коэффициенти алардын эки жагынын катышына же аларга сырттан (ичтен) сызылган айланалардын радиустарынын катышына барабар болоору түшүнүктүү.

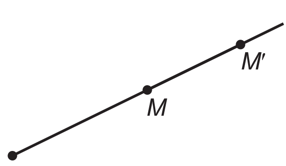
$O$ чекити жана $k\neq 0$ саны берилсин.

А н ы к т а м а. **Тегиздиктин ар бир $M$ чекитин $OM'=k\cdot OM$ болгондой кылып, $OM$ түз сызыгында жатуучу $M'$ чекитине чагылдыруу гомотетия[1] же борбордук окшош өзгөртүү деп аталат.**

Мында $O$ — гомотетия борбору, $k$ — гомотетия коэффициенти болот. $M$ жана $M'$ гомотетиялуу чекиттер болушат. $O$ борбору өзү-өзүнө гомотетиялуу деп эсептелет (155-сүрөт).




154-сүрөт.




155-сүрөт.

[1] Грек сөзү — өз ара окшош жайланышкан дегенди түшүндүрөт.

Эгерде $k>0$ ($k>0$) болсо, анда $OM$ жана $OM'$ кесиндилеринин багыттары бирдей (карама-каршы) болот, б. а. $M$ жана $M'$ чекиттери $O$ борборунун бир (ар түрдүү) жагында жатышат.

Бул учурда $M$ жана $M'$ чекиттери түз (тескери) гомотетиялуу чекиттер болушат.

$O$ борбору жана $k$ коэффициенти боюнча берилген гомотетия $F$ фигурасынын ар бир $M$ чекитин $M'$ чекитине которсун. Анда $M'$ чекиттеринин чогуусу $F'$ фигурасын аныктайт. Мында $F$ жана $F'$ фигуралары гомотетиялуу деп аталышат.

Эгерде $k=1$ болсо, анда $OM'=OM$ болот да, $M$ чекити өзүнө гомотетиялуу болгон $M'$ чекити менен дал келет. Бул учурда теңдеш гомотетияга ээ болобуз, мында ар кандай фигура өзү-өзүнө гомотетиялуу болот.

Эгерде $k=-1$ болсо, анда аныктаманын негизинде $OM'=-OM$ болот. Бул учурда $M$ жана $M'$ чекиттери $O$ борборунун ар түрдүү жагында болуп, андан бирдей алыстыкта жатышат, б. а. $M$ жана $M$ң чекиттери $O$ борборуна карата симметриялуу болушат. Ошентип, бул учурдагы гомотетия борбордук симметрия болот.

$O$ борбору, $k$ коэффициенти менен берилген гомотетия $M$ чекитин $M'$ чекитине чагылдырса, анда ошол эле $O$ борбору жана $\frac{1}{k}$ коэффициенти менен алынган гомотетия ага тескери деп аталат да, ал $M'$ чекитин кайрадан $M$ чекитине өзгөртөт, чындыгында эле $OM'=k\cdot OM$ барабардыгынан $OM=\frac{1}{k}OM'$ ди алабыз.

Гомотетиянын төмөндөгүдөй касиеттери бар.

**1.** Гомотетия өз ара бир маанилүү өзгөртүү болот.

$O$ борбору жана $k$ коэффициенти боюнча гомотетия берилсин. Бул гомотетия $M$ чекитин $M'$ жана $M''$эки чекитине өзгөртөт деп эсептейли. Анда $OM'=k\cdot OM$ жана $OM''=k\cdot OM$ болот. Мындан $OM'=OM''$ барабардыгына ээ болобуз, б. а. $M'$ жана $M''$ чекиттери дал келишет. Демек, берилген гомотетияда $M$ чекити бир гана $M'$ чекитине өзгөртүлөт, тескери гомотетияда $M'$ чекити кайрадан бир гана $M$ чекитине өзгөртүлөт.

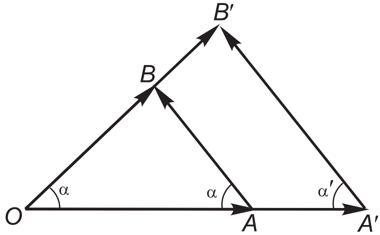
**2.** Гомотетия борбору аркылуу өтүүчү түз сызык өзү-өзүнө өзгөртүлөт.

$a$ түз сызыгы $O$ гомотетия борбору аркылуу өтсүн. Берилген гомотетия $a$ түз сызыгынын ар бир $M$ чекитин $M'$ чекитине өзгөртөт. Аныктама боюнча $M$, $O$, $M'$ чекиттери бир түз сызыкта ($a$ да) жатышы керек. Демек, $M'$ чекити $a$ түз сызыгында жатат.

**3.** Эгерде $O$ борбору, $k$ коэффициенти боюнча берилген гомотетия $AB$ кесиндисин $A'B'$ кесиндисине өзгөртсө, анда $A'B'=k\cdot AB$ жана $A'B'\parallel AB$ болот.

$A$ жана $B$ чекиттери $O$ борбору аркылуу өтүүчү түз сызыкта жатпасын. Берилген гомотетия $A$ жана $B$ чекиттерин тиешелүү түрдө $A'$ жана $B'$ чекиттерине которот (156-сүрөт). Анда $OA'=k\cdot OA$, $OB'=k\cdot OB$ болот. Мындан $OA':OB'=OA':OB$.

Ошондой эле, $\overrightarrow{OA}=|k|\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}=|k|\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}$, $|k|(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=|k|\overrightarrow{AB}$ же $A'B'=|k|\cdot\overrightarrow{AB}$. $b$ — жалпы бурч, $\overrightarrow{A'B'}$ жана $\overrightarrow{AB}$ векторлору параллель жана бирдей багытталган, ошондуктан $A'B'=k\cdot AB$, $A'B'\|AB$ болот.



156-сүрөт.

1-натыйжа. **Гомотетиялуу түз сызыктар параллель болушат.**

Бул 3-касиеттен келип чыгат. ($A'B'\|AB$, себеби $a=a'$ ).

2-натыйжа. **Гомотетия окшош өзгөртүү болот.** Бул натыйжанын тууралыгы окшош өзгөртүүнүн аныктамасынан жана 3-касиеттен келип чыгат. Демек, гомотетиянын бардык касиеттери окшош өзгөртүү үчүн да туура болот.

**4.** Гомотетияда параллель эки түз сызык параллель эки түз сызыкка өтөт. $a\|b$ түз сызыктары жана кандайдыр бир гомотетия берилсин. Берилген гомотетия $a$ жана $b$ түз сызыктарын тиешелүү түрдө $a'$ жана $b'$ түз сызыктарына которот. Бирок, 1-натыйжанын негизинде $a\|a'$, $b\|b'$. Шарт боюнча $a\|b$ болгондуктан $a'\|b'$ болот.

Демек, гомотетияда эки түз сызыктын арасындагы бурч өзгөрбөйт, б. а. берилген бурч ага барабар бурчка өзгөртүлөт.

Дагы бир өзгөчөлүктү белгилей кетели. $k>0$ коэффициенти аркылуу берилген окшош өзгөртүү кандайдыр $F$ фигурасын $F'$ фигурасына чагылдырсын. Анда $F$ фигурасындагы каалаган $AB$ кесиндиси $F'$ фигурасында ага туура келүүчү

$$A'B'=k\cdot AB \tag{1}$$

кесиндисине чагылдырылат.

Эми $O$ борбору жана $k$ коэффициенти менен берилген гомотетия $F$ ти $F_1$ фигурасына чагылдырсын. Анда $F$ фигурасындагы $AB$ кесиндиси $F_1$ фигурасында ага туура келүүчү

$$A_1B_1=k\cdot AB \tag{2}$$

кесиндисине чагылдырылат. Анда (1), (2) барабардыктардан

$$A_1B_1=A'B' \tag{3}$$

деп жазууга болот. $F_1$ ди $F'$ ке дал келгендей кылып жылдырууга болот. Бул жогорудагы талкуулоолор $F$, $F'$, $F_1$ фигураларынын бардык туура келүүчү чекиттери үчүн туура болот. Демек,

$F$ фигурасын адегенде гомотетиялуу өзгөртүп, андан кийин жылдырып деле $F'$ фигурасын алууга болот. Ошентип, окшош өзгөртүүнү гомотетия менен жылдыруунун удаалаш аткарылышы (көбөйтүндүсү же композициясы) деп да эсептөөгө болот.

### КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Ар кандай фигура өзүнө гомотетиялуу болоорун далилдегиле.
2. Барабар фигуралар гомотетиялуу болушабы?
3. Гомотетиялуу эки фигуранын бир түз сызыкта жатпаган эки түгөй туура келүүчү чекиттери берилсе, анын борборун тапкыла.
4. Гомотетиянын $O$ борбору, $k=2$ коэффициенти берилсе, $ABC$ үч бурчтугуна гомотетиялуу үч бурчтукту түзгүлө.
5. $ABC$ үч бурчтугу берилген. Анын орто сызыктары аркылуу $A'B'C'$ үч бурчтугу түзүлгөн. Берилген үч бурчтуктун медианаларынын кесилишкен чекитине карата ал эки үч бурчтук гомотетиялуу экендигин далилдегиле.
6. Бири-бирине барабар болбогон эки айлана гомотетиялуу болоорун далилдегиле.
7. Гомотетияда: а) параллелограмм; б) трапеция; в) ромб кандай фигурага өзгөрөт?
8. $xOy$ системасында $O$ борбору, $k=3$ коэффициенти боюнча берилген гомотетияда $A(1; 0)$; $B(0; 2)$; $C(-2; 0)$; $D(0; -1)$ чекиттери кандай чекиттерге чагылдырылат?

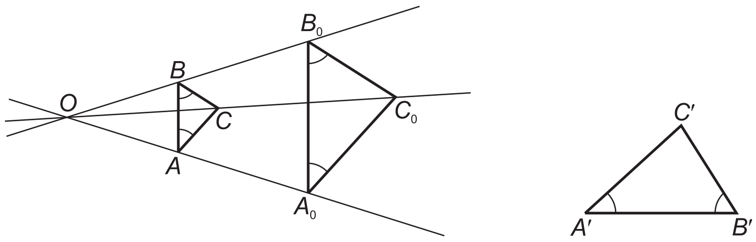
   *Көрсөтмө.* $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ барабардыгын пайдалангыла.

## § 56. ОКШОШ ФИГУРАЛАР. ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫН ОКШОШТУК БЕЛГИЛЕРИ

Биз жогоруда (§ 55) окшош фигураларды окшош өзгөртүүлөр аркылуу алууга мүмкүн экендигин карадык. Окшош фигураларга аныктаманы бердик, алардын касиеттерин көрсөттүк. Анын ичинде окшош үч бурчтуктарга § 55 та аныктама берилген. Мында ал түшүнүктөргө негиздеп, үч бурчтуктун окшоштук белгилерине гана токтолобуз.

Үч бурчтуктардын окшоштугунун үч белгиси бар. Алар төмөндөгүдөй теоремалар аркылуу баяндалат.

65 - *теорема* (1-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун эки бурчу экинчи үч бурчтуктун тиешелүү эки бурчуна барабар болсо, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**




157-сүрөт.

Д а л и л д ө ө. $\Delta ABC$ жана $\Delta A'B'C'$ берилген (157-сүрөт). $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болоорун далилдөө керек.

Каалагандай $O$ борбору жана $k=A'B':AB$ коэффициенти боюнча аныкталган гомотетияны карайбыз. Ал гомотетия $\Delta ABC$ ны $\Delta A_0B_0C_0$ гө өзгөртөт. Гомотетиянын касиеттеринин негизинде $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$, ошону менен бирге $B_0=k \cdot AB$, $\angle A=\angle A_0$, $\angle B=\angle B_0$ болот. Бирок, теореманын шарты жана түзүү боюнча $A'B'=k \cdot AB$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.

Мындан $A'B'=A_0B_0$ , $\angle A'=\angle A_0$, $\angle B=\angle B_0$. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгиси боюнча $\Delta A_0B_0C_0=\Delta A'B'C'$.

§ 55 та акыркы түшүнүктөрдүн негизинде $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Теорема далилденди.

*66 - теорема* (2-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун эки жагы экинчи үч бурчтуктун эки жагына пропорциялаш болуп, ал жактардын арасындагы бурчтар барабар болушса, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**

Д а л и л д ө ө . 157-сүрөттөн пайдаланабыз. $\Delta ABC$, $\Delta A'B'C'$ да $A'B':AB=B'C':BC$, $\angle B=\angle B'$ болсун. Үч бурчтуктардын окшоштугун далилдейбиз.

Каалагандай $O$ борбору жана $k=A'B':AB$ коэффициенти менен берилген гомотетия $\Delta ABC$ ны ага окшош болгон $\Delta A_0B_0C_0$ го өзгөртөт, $A_0B_0=k \cdot AB$, $B_0C_0=k \cdot BC$, $\angle B=\angle B_0$ болот. Теореманын шарты боюнча $A'B'=k \cdot AB$, $B'C'=k \cdot BC$, $\angle B=\angle B'$. Мындан $A_0B_0= =A'B'$, $B_0C_0=B'C'$, $\angle B=\angle B'$ болот. Үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгиси боюнча $\Delta A_0B_0C_0=\Delta A'B'C'$. § 55 та акыркы түшүнүктөрдүн негизинде $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болот. Теорема далилденди.

*67 - теорема* (3-белгиси). **Эгерде бир үч бурчтуктун үч жагы экинчи үч бурчтуктун үч жагына пропорциялаш болушса, анда ал үч бурчтуктар окшош болушат.**

Д а л и л д ө ө. 157-сүрөттү пайдаланабыз. $\Delta ABC$, $\Delta A'B'C'$ да $A'B':AB=B'C':BC=A'C'$ болсун. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ болоорун далилдейбиз. Далилдениши жогорудагы 65, 66-теоремалардын далилденишине окшош. Өз алдыңарча далилдегиле.

Н а т ы й ж а л а р. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктар: 1) бирден барабар тар бурчка ээ болсо; 2) биринин катеттери экинчисинин катеттерине пропорциялаш болсо, анда алар окшош болушат.

1) учурдун тууралыгы 65-теоремадан келип чыгат, анткени эки тик бурчтуу үч бурчтуктун бирден тар бурчтары барабар болсо, анда алардын экинчи тар бурчтары да барабар болот (тик бурчтары барабар).

2) учурдун тууралыгы 66-теоремадан келип чыгат.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** Окшош фигураларга мисалдар келтиргиле. Алар эмне үчүн окшош экендигин түшүндүргүлө.

**2.** Биринчи квадраттын периметри 24 см, ал эми экинчи квадраттын жагы 18 см болсо, алардын окшоштук коэффициентин тапкыла.

**3.** Айлананын диаметри 8 см. $k$=2,5 окшоштук коэффициенти боюнча аныкталган экинчи айлананын радиусун тапкыла.

**4.** Үч бурчтуктун жактарынын катышы 345ке барабар. Ага окшош үч бурчтуктун кичине жагы 12 дм. Экинчи үч бурчтуктун калган жактарын тапкыла.

**5.** Үч бурчтуктун жактарынын катышы 356га барабар. Ага окшош үч бурчтуктун периметри 4,2 дм. Экинчи үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

**6.** $ABC$ жана $A'B'C'$ үч бурчтуктарында $a=a_1,$ $b=b_1$. Бул үч бурчтуктар үчүн: 1) $a$=20; $b$=28; $a_1$=50; $c_1$=40 болсо, $c$ жана $b$ жактарын; 2) $a$=105; $a_1$=63; $c-c_1$=24 болсо $c$ жагын тапкыла.

**7.** Эки тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчтары барабар. Бир үч бурчтуктун каптал жагы жана негизи 8,5 дм жана 5 дм. Экинчисинин негизи 4 дм. Анын каптал жагын тапкыла.

**8.** Эгерде эки үч бурчтуктун жактары төмөндөгүдөй болуп берилсе, алар окшош болушабы: 0,1 м, 0,15 м, 0,2 м жана 1 см, 1,5 см, 2 см; 5 м, 10 м, 75 дм жана 64 дм, 40 дм, 80 дм; 10 м, 20 м, 12,5 м жана 100 см, 90 см, 160 см?

**9.** Бир үч бурчтуктун жактары 8 дм, 16 дм жана 20 дм. Ага окшош үч бурчтуктун периметри 55 дм. Экинчи үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

**10.** Бир үч бурчтуктун периметри ага окшош үч бурчтуктун периметринин $\frac{3}{11}$ бөлүгүн түзөт. Эки окшош жагынын айырмасы 10 дм. Ал жактарды тапкыла.

**11.** $ABC$ үч бурчтугунда $AC \| DE$ ($D$О$AB$, $E$=О$BC$ кесиндиси жүргүзүлгөн. Эгерде: 1) $AC$=2 дм, $AB$=1,7 дм жана $BD$=11,9 см болсо, $DE$ кесиндисин; 2) $AB=1{,}6$ дм, $AC=20$ см жана $DE=1{,}5$ дм болсо, $AD$ кесиндисин; 3) $AC:DE=\frac{5}{7}:\frac{4}{11}$ болсо, анда $AD:BD$ катышын аныктагыла.

**12.** Берилген периметри боюнча берилген үч бурчтукка окшош болгон үч бурчтукту түзгүлө.

**13.** Бурчтун ичинде жаткан $M$ чекити аркылуу өтүп, ал бурчтун жактарын жануучу айлананы түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Бурчтун жактарын жанып өтүүчү айлананы сызып, аны бурчтун чокусуна карата $M$ чекити аркылуу өткөндөй кылып гомотетиялуу өзгөрткүлө.

**14.** Берилген үч бурчтуктун ичинде, бардык чокулары анын жактарында жаткандай кылып ромбду сызгыла.

*Көрсөтмө.* Адегенде изделүүчү ромбго окшош, бирок үч чокусу берилген үч бурчтуктун эки жагында жаткандай ромбду сызгыла. Андан кийин аны үч бурчтуктун чокусу боюнча гомотетиялуу өзгөрткүлө.

**15.** Берилген үч бурчтуктун ичине, берилген параллелограммга окшош параллелограмм сызгыла.

**16.** Берилген ромбго ичтен сызылган квадратты түзгүлө.

**17.** Бир беш бурчтуктун жактары 3,5 дм, 1,4 дм, 2,8 дм, 2,1 дм, жана 4,2 дм. Ага окшош беш бурчтуктун кичине жагы 1,2 дм. Анын калган жактарын тапкыла.

**18.** Бир төрт бурчтуктун жактарынын катышы $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$ катышына барабар. Ага окшош төрт бурчтуктун периметри 7,5 м. Экинчи төрт бурчтуктун жактарын аныктагыла.

**19.** Төрт бурчтуктун жактары 1 м, 1,5 м, 2 м жана 2,5 м. Ага окшош төрт бурчтуктун эң чоң жана эң кичине жактарынын суммасы 2,8 м. Экинчи төрт бурчтуктун жактарын тапкыла.

**20.** Эки окшош көп бурчтуктун эң чоң жактары 3,5 м жана 1,4 м, ал эми алардын периметрлеринин айырмасы 6 м. Периметрлерин эсептегиле.

## § 57. ОКШОШ КӨП БУРЧТУКТАРДЫН АЯНТТАРЫНЫН КАТЫШЫ

67 - *теорема.* **Окшош көп бурчтуктардын аянттарынын катышы окшоштук коэффициентинин квадратына барабар.**

Д а л и л д ө ө. $n$ бурчтуу $F_1$ жана $F_2$ окшош көп бурчтуктары берилсин. Алардын окшоштук коэффициентин $k$ деп алалы. Берилген көп бурчтуктардын аянттарын салыштырабыз.

$F_1 \sim F_2$ болгондуктан, $F_1$ көп бурчтугун $F_2$ көп бурчтугуна өзгөртүүчү окшош өзгөртүү болот.

$F_1$ көп бурчтугун $n$ үч бурчтуктарга бөлөбүз: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Мында $\Delta_i$ ($i$=1, 2,..., $n$) ички жалпы чекиттерге ээ болбойт жана $F_1=\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n$. Анда жогоруда аталган окшош өзгөртүү бул үч бурчтуктарды $F_2$ көп бурчтугунун $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$ үч бурчтуктарына өзгөртөт да, $\Delta_i'=\Delta_i$ ($i$=1, 2,..., $n$) жана $F_2=\Delta_1'+\Delta_2'+\ldots+\Delta_n'$ болот. Эгерде $\Delta_i$ үч бурчтугунун негизи $a_i$ жана бийиктиги $h_i$ болсо, анда аларга окшош болгон $\Delta_i'$ үч бурчтугунун $a_i'$ негизи жана $h_i'$ бийиктиги тиешелүү түрдө $a_i'=ka_i$ жана $h_i'=kh_i$ болот.

Көп бурчтуктун аянтын аныктоодогу касиеттердин негизинде $F_1$ көп бурчтугунун аянты:

(4)

болот. Ал эми $F_2$ көп бурчтугунун аянты:

$$S(F_2)=S(\Delta_1')+S(\Delta_2')+\ldots+S(\Delta_n')=\frac{1}{2}a_1'h_1'+\frac{1}{2}a_2'h_2'+\ldots+\frac{1}{2}a_n'h_n'=$$

$$=\frac{1}{2}ka_1kh_1+\frac{1}{2}ka_2kh_2+\ldots+\frac{1}{2}ka_nkh_n=k^2S(F_1) \qquad (5)$$

болот, мында (4) формула пайдаланылды. (5) формуладан $S(F_2):S(F_1)=k^2$ болот. Теорема далилденди.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

**1.** Эгерде квадраттын жагын: а) үч эсе чоңойтсок; б) төрт эсе кичирейтсек, анын аянты кандай өзгөрөт?

**2.** Эгерде тең жактуу үч бурчтуктун жагын: 1) эки эсе чоңойтсок; 2) үч эсе кичирейтсек, анда анын аянты кандай өзгөрөт?

**3.** Бир квадраттын жагы $a$, экинчисиники $b$ болсо, алардын аянттарынын катышын тапкыла.

**4.** Айланага сырттан сызылган квадраттын аянты ошол эле айланага ичтен сызылган квадраттын аянтынан канчага чоң?

**5.** Үч бурчтуктун жагы 8 см. Ага окшош үч бурчтуктун аянты үч эсе чоң болсо, анда анын туура келүүчү жагын тапкыла.

**6.** Үч бурчтуктун жактарынын бири үч барабар бөлүккө бөлүнүп, бөлүү чекиттери аркылуу экинчи жагына параллель түз сызыктар жүргүзүлгөн. Берилген үч бурчтуктун жана түз сызыктар аркылуу түзүлгөн үч бурчтуктардын аянттарынын катышын тапкыла.

**7.** Үч бурчтуктун бийиктиги $h$. Үч бурчтуктун аянтын тең экиге бөлүүчү жана негизине параллель болгон түз сызык үч бурчтуктун чокусунан кандай аралыкта болот?

8. Үч окшош көп бурчтуктун аянттарынын суммасы 484 см$^2$, периметрлеринин катышы 234кө барабар. Ар бир көп бурчтуктун аянтын тапкыла.

9. Жактары $a$ жана $b$ болгон эки туура $n$ жактуу көп бурчтуктардын аянттарынын катышын тапкыла.

*Көрсөтмө.* § 41 тын 10-маселесиндеги (1) формуланы колдонгула.

10. Бир эле айланага сырттан жана ичтен сызылган туура $n$ бурчтуктун аянттарынын катышын тапкыла.

*Көрсөтмө. мө.* § 41 тын 13, 16-маселелериндеги (2), (3) формулаларды пайдалангыла.

11. Берилген айланага сырттан жана ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) алты бурчтуктардын аянттарынын катышын эсептегиле.

## X ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Өз ара бир маанилүү чагылдырууну түшүндүрүп бергиле. Мисалдар келтиргиле.
2. Тегиздикти геометриялык өзгөртүү деген кандай түшүндүрүлөт?
3. Жылдыруу фигураны кандай өзгөртөт?
4. Кандай фигуралар барабар болушат?
5. Жылдырууда түз сызык (кесинди, шоола) кандай фигурага өзгөрүлүп өтөт?
6. Жылдыруунун кандай түрлөрү бар?
7. Октук (борбордук) симметрия жылдыруу болобу? Эмне үчүн?
8. Чекиттин айланасында бурууну түшүндүргүлө. Ал жылдыруу болобу?
9. Параллель которууда фигуранын кандай элементтери чоңдугун өзгөртпөйт?
10. Окшош өзгөртүүгө түшүнүк бергиле.
11. Кандай фигуралар окшош болушат? Мисалдар келтиргиле.
12. Эмне үчүн туура $n$ бурчтуктар окшош болушат?
13. Окшош өзгөртүүдө туура келүүчү кесиндилердин кандай өзгөрө тургандыгын түшүндүрүп бергиле.
14. Гомотетияны аныктагыла. Ал кандай өзгөртүү болот?
15. Гомотетияда түз сызык кандай түз сызыкка өзгөрөт? Параллель түз сызыктарчы?
16. Гомотетия окшош өзгөртүү болобу? Окшош өзгөртүүнү гомотетия деп эсептөөгө болобу?
17. Окшош өзгөртүүнүн, гомотетиянын жана жылдыруунун кандай байланышы бар?
18. Жылдыруу окшош өзгөртүү боло алабы? Тескерисинче айтууга мүмкүнбү?
19. Барабар фигуралар окшош болушабы?
20. Эки үч бурчтуктун окшоштугунун белгилерин айтып бергиле.
21. Тик бурчтуу үч бурчтуктардын окшоштук белгилери кандай айтылат?

## X ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Борборлош эки айлана берилген. Алардын борбору $O$ болсун. Биринчи айлананын $M$ чекитине экинчи айлананын

$OM$ шооласында жаткан $M'$ чекити туура келет десек, анда айланалардын чекиттери кандай туура келишет? Мында кандай чагылдырууга ээ болобуз?

2. Жарым айлана диаметрине тик проекцияланган. Жарым айлана менен диаметрдин чекиттери кандай туура келишет? Бул кандай чагылдыруу болот?
3. $AB$ кесиндисин $O$ борборунан $CD$ кесиндисине проекциялап $MN$ кесиндисине ээ болдук деп эсептейли. $MN$ кесиндиси $CD$ кесиндисинин ичинде жатсын. Бул проекциялоодо $AB$ жана $MN$ кесиндилеринин чекиттери кандай туура келишет? $AB$ жана $CD$ кесиндилеринин чекиттеричи?
4. Тегиздиктин ар бир $M$ чекитине, анын $L$ түз сызыгындагы тик проекциясы болгон $M'$ чекити туура келсин. Тегиздик менен $L$ түз сызыгынын чекиттери өз ара кандай туура келишет?
5. а) Кесинди; б) түз сызык; в) айлана; г) тең жактуу үч бурчтук канча симметрия огуна ээ болот?
6. а) Кесинди; б) түз сызык канча симметрия борборуна ээ болот? Түшүндүргүлө.
7. Үч бурчтуктун симметрия борбору болбой тургандыгын далилдегиле.
8. Параллелограммдын диагоналдарынын кесилишкен чекити симметрия борбору болорун далилдегиле.
9. Параллель эки түз сызыкка (борборго) карата удаалаш аткарылган эки октук (борбордук) симметриянын натыйжасы параллель котоpуу болоорун далилдегиле.
10. Ар кандай фигура өзүнө окшош болоорун далилдегиле.
11. Эгерде $F$ фигурасы $F_1$ фигурасына, ал эми $F_1$ фигурасы $F_2$ фигурасына окшош болсо, анда $F$ жана $F_2$ фигуралары да окшош болоорун далилдегиле. Окшоштук коэффициенти кандай болот?
12. Тик бурчтуу тең капталдуу үч бурчтуктар окшош болоорун далилдегиле.
13. Үч бурчтуктун бардык орто сызыктары жүргүзүлгөн. Натыйжада берилген үч бурчтукка окшош болгон канча үч бурчтук түзүлдү?
14. Трапециянын негиздери $a$ жана $b$. Анын диагоналдары кесилишкен чекитте кандай катыштарга бөлүнүшөт?
15. Үч бурчтуктун жактары 5 см, 7 см, 4 см. Ага окшош болгон үч бурчтуктун эң чоң жагы 21 см. Анын калган жактарын тапкыла.
16. Окшош эки көп бурчтуктун кичине жактары 35 см жана 21 см, ал эми алардын периметрлеринин айырмасы 40 см. Көп бурчтуктардын периметрлерин эсептегиле.

## ПЛАНИМЕТРИЯ БОЮНЧА «ТАТААЛЫРААК» МАСЕЛЕЛЕР

**1.** Эгерде үч бурчтуктун биссектрисасы анын периметрин тең экиге бөлсө, анда берилген үч бурчтук тең капталдуу болорун далилдегиле.

**2.** Параллелограммдын сыртына анын жактары боюнча квадраттар түзүлгөн. Алардын борборлору жаңы квадраттын чокулары болуп эсептелерин далилдегиле.

**3.** Трапециянын негиздери $a$ жана $b$. Анын негиздерине параллель болуп, каптал жактарынын арасында жаткан жана трапецияны аянттары барабар болгондой эки бөлүккө бөлүүчү кесиндинин узундугун тапкыла.

**4.** Үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары $a$ жана $b$ ($a>b$) берилген. Негизинин каршысындагы чокудан түшүрүлгөн бийиктиктин жана ички бурчтун биссектрисасынын арасындагы бурчту тапкыла.

**5.** Үч бурчтуктун ортборбору кайсы чокусуна (жагына) жакын болот?

**6.** Үч бурчтуктун бийиктиктери берилген. Аянтын тапкыла.

**7.** Үч бурчтуктун медианалары берилген. Жактарын тапкыла.

**8.** Үч бурчтуктун жактары $a$, $b$, $c$ берилген. Орт борборунан чокуларына чейинки аралыктарды тапкыла.

**9.** Үч бурчтуктун жактары $a$, $b$, $c$ берилген. Сырттан сызылган айлананын борборунан жактарына чейинки аралыктарды тапкыла.

**10.** Радиусу $R$ ге барабар болгон жарым тегеректин диаметрине туура үч бурчтук түзүлгөн. Анын жарым тегеректин сыртында жаткан бөлүгүнүн аянтын тапкыла.

**11.** Берилген тегеректин ичине берилген квадраттын аянтына барабар болгон тик бурчтукту түзгүлө.

*Көрсөтмө.* Тик бурчтуктун жактарын тегеректин радиусу жана квадраттын жагы аркылуу туюнткула.

**12.** Берилген периметри аркылуу берилген айланага ичтен сызылган тик бурчтукту түзгүлө.

**13.** Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен $19^\circ$ бурчту бирдей 19 бөлүккө бөлгүлө.

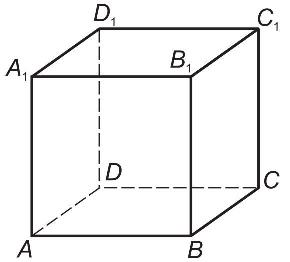
**14.** Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен $7^\circ$ бурчту бирдей 7 бөлүккө бөлгүлө.

**15.** Параллелограммдын тар бурчу $30^\circ$ ка, диагоналдары $c$ жана $d$ га барабар ($c>d$). Анын аянтын тапкыла.

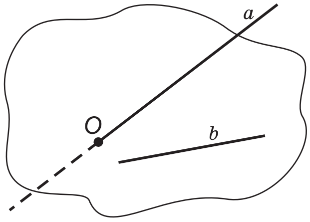
# XI *г л а в а*. СТЕРЕОМЕТРИЯ БОЮНЧА КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР

## § 58. КАЙЧЫЛАШ ТҮЗ СЫЗЫКТАР

Эки түз сызыкты мейкиндикте да кароого болот. Мисалы, кубдун кырлары боюнча аныкталган түз сызыктар мейкиндиктеги түз сызыктарды элестетет. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубунун бир эле $AA_1BB_1$ гранындагы (тегиздиктеги) өз ара кесилишүүчү, параллель жана перпендикулярдуу болушкан түз сызыктардын (кесиндилердин) түгөйлөрүн көрсөткүлө (158-сүрөт). Демек, тегиздикте эки түз сызык сөзсүз: *же кесилишет, же параллель*. Так-тап айтканда тегиздиктеги эки түз сызык мына ушул эки абалдын биринде гана болот. Ал эми мейкиндикте болсо өз ара кесилишпей турган, параллель да эмес, перпендикулярдуу да эмес эки түз сызыкты көрсөтүүгө болот (4-абал). Андай түз сызыктарды **кайчылаш** түз сызыктар дейбиз.




158-сүрөт.




159-сүрөт.

Мейкиндиктеги мындай түз сызыктар бир тегиздикте эмес, ар түрдүү тегиздиктерде жайланышат.

Мисалы, жогорудагы кубдун $BC$ жана $D_1C_1$ кырлары аркылуу өткөн түз сызыктар да кайчылаш түз сызыктар болушат.

Жалпы учурда бизге $\alpha$ тегиздиги, анын $O$ чекити жана ошол тегиздикте жаткан $b$ түз сызыгы берилди дейли (159-сүрөт). $a$ түз сызыгы $\alpha$ тегиздигин анын $O$ чекити аркылуу кесип өтсүн.

Анда $a$ жана $b$ түз сызыктары кайчылаш түз сызыктар болушат, анткени алар кесилишпейт жана бир тегиздикте жатышпайт.

**КӨНҮГҮҮЛӨР**

1. Мейкиндикте кесилишүүчү, параллель, перпендикуляр түз сызыктарга мисалдар келтиргиле.
2. Класстык бөлмөдөгү параллель, перпендикуляр, кесилишүүчү жана кайчылаш түз сызыктарды көрсөткүлө.
3. 158-сүрөттө кубдун $AB$ кырына кайчылаш түз сызыктарды көрсөткүлө. Белгилеп жазгыла. Канча кайчылаш түз сызык бар?
4. Кубдун: 1) $BC$ жана $A_1D_1$; 2) $BC$ жана $CC_1$ кырлары кандай түз сызыктарды аныктайт?

## § 59. АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

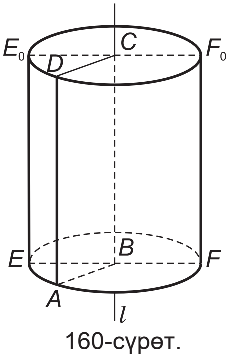
Геометриялык фигуралар мейкиндикте да берилет. Алардын айрымдары менен силер таанышсыңар. Мисалы: куб, тик бурчтуу параллелепипед, шар ж. б. Мейкиндикте аларды геометриялык телолор деп эсептешет. Демек, геометриялык телолор мейкиндиктин туюк жана чектелген бөлүгү катары каралат.

Эгерде кандайдыр жалпак фигураны анын тегиздикте жаткан $l$ огунун айланасында айландырсак, анда мейкиндикте айлануу телосу пайда болот. Айлануу телолорунун айрымдарына токтолобуз.

### 59.1. ЦИЛИНДР

Аныктама. **Тик бурчтукту анын бир жагынын айланасында айландыруудан пайда болгон тело цилиндр[1] деп аталат.**

Эгерде $ABCD$ тик бурчтугун $BC$ жагынын айланасында айландырсак, анда андан пайда болгон айлануу телосу цилиндрди аныктайт (160-сүрөт). Мында $BC$ түз сызыгы же $l$ айлануу огу цилиндрдин огу болуп эсептелет. $BC$ кесиндиси цилиндрдин бийиктиги болот. Бул цилиндр тик тегерек цилиндр деп аталат.



160-сүрөт.

[1] Грек сөзү, «*айландыруу*» деген маанини түшүндүрөт.

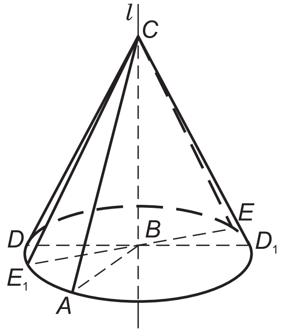
$AD$ — цилиндрдин түзүүчүсү болуп эсептелет. $CD$ жана $BA$ кесиндилери октун айланасында айланууда барабар жана параллель тегеректерди аныктайт, $B$, $C$ чекиттери алардын борборлору болушат. Ал тегеректер цилиндрдин **негиздери** деп аталат, алардын радиустары цилиндрдин радиусун аныктайт.

### 59.2. КОНУС

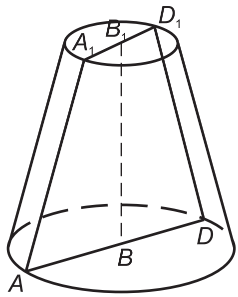
Аныктама. **Тик бурчтуу үч бурчтукту анын бир катетинин айланасында айландыруудан пайда болгон тело конус[1] деп аталат.**

Эгерде $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугун ($AC$ — гипотенуза, $AB$, $BC$ — катеттер) катетинин айланасында айландырсак, андан пайда болгон айлануу телосу конусту аныктайт (161-сүрөт). Мында $BC$ катети аркылуу өткөн $l$ түз сызыгы конустун айлануу огу же конустун огу деп аталат. Пайда болгон конус **тик тегерек конус** деп аталат.

$AB$ катетин $l$ огунун айланасында айландыруудан алынган тегерек конустун **негизин** аныктайт, анын радиусу $AB$ катетине барабар. $BC$ кесиндиси конустун огу болуп эсептелет.




161-сүрөт.




162-сүрөт.

$ABB_1A_1$ тик бурчтуу трапециясын($AB\perp BB_1$, $A_1B_1\perp BB_1$) $BB_1$ огунун айланасында айландырсак, анда кесилген конус пайда болот (162-сүрөт). Радиустары $AB$, $A_1B_1$ болгон тегеректер кесилген конустун негиздери болот.

---

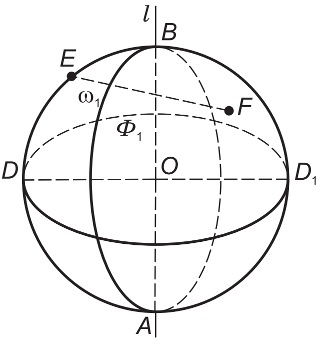
[1] Грек сөзү, «*кайыңдын түспөлү*» дегенди түшүндүрөт.

### 59.3. СФЕРА ЖАНА ШАР

Сфера менен шар тыгыз байланышта. Адегенде шар жөнүндө баяндайбыз.

Жарым тегеректи анын диаметринин айланасында айландыруудан пайда болгон тело **шар** деп аталат.

$\Phi_1$ жарым тегерегин $AB$ диаметринин айланасында айландырганда шар алынат (163-сүрөт). $AB$ диаметри аркылуу өткөн $l$ түз сызыгын айлануу огу деп атайбыз. Шарды чектеп турган бет **сфера**[1] деп аталат. Ал сфераны $w_1$ жарым айланасынын $l$ огунун айланасында айландыруудан пайда болгон айлануу бети катарында да кароого болот.



163-сүрөт.

Сферанын борбору, радиусу, диаметри, огу, хордасы ал чектеп турган шардын да борбору ($O$), радиусу ($OA=R$), диаметри ($AB$), хордасы ($EF$) болот.

Шардын тегиздик менен кесилиши дайыма тегерек болот. Эгерде кесилишүүчү тегиздик шардын борбору аркылуу өтсө, анда кесилиште чоң тегерек алынат, анын радиусу шардын радиусуна барабар. Мисалы, чоң тегеректин айланасы глобустагы экватор жана меридиандар болуп эсептелет.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Цилиндрдин огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
2. Цилиндрдин огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши жагы 8 см болгон квадрат болсо, цилиндрдин радиусун жана түзүүчүсүн тапкыла.
3. Цилиндрдин октук кесилишинин диагоналы аны кандай үч бурчтуктарга бөлөт?
4. Жактары 6 см жана 10 см болгон тик бурчтуктун бир жагынын айланасында айлануудан алынган цилиндрдин диаметрин жана бийиктигин эсептегиле.
5. Конустун огу аркылуу өтүүчү тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
6. Конустун түзүүчүсү: 1) анын бийиктигине; 2) негизиндеги айлананын радиусуна барабар болушу мүмкүнбү?

---

[1] Грек сөзү, «*топ*» дегенди түшүндүрөт.

7. Конустун негизине параллель тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот? Аны түзүп көрсөткүлө.
8. $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугунда $AB=5$ дм, $BC=4$ дм, $CA=3$ дм. Берилген үч бурчтуктун: 1) $CA$ катетинин; 2) $BC$ катетинин айланасында айланышынан пайда болгон айлануу телосунун диаметрин, бийиктигин жана түзүүчүсүн тапкыла.
9. Бийиктиги 16 см, радиусу 12 см конус бийиктигинин тең ортосу аркылуу өтүп, негизине параллель болгон тегиздик менен кесилген. Кесилген конустун негиздеринин радиустарын жана бийиктигин тапкыла.
10. Сфера менен шардын айырмасын түшүндүрүп бергиле.
11. Сферанын тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
12. Шардын тегиздик менен кесилиши кандай фигура болот?
13. Радиусу 8 см шарды тегиздиктер менен кескенде радиустары 2 см жана 3 см болгон тегеректер пайда болду. Алардын кайсынысы шардын борборуна жакын?
14. Шардын радиусу 10 дм болсо, анын чоң тегерегинин айланасынын узундугун тапкыла.

    *Көрсөтмө.* Айлананын узундугун $C=2\pi R$ формуласы аркылуу аныктагыла, мында $C$ – айлананын узундугу, $R$ – радиусу, $\pi\approx 3{,}14$ деп алгыла.

## § 60. КӨП ГРАНДЫКТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Көп грандыктар мейкиндиктеги геометриялык фигуралар (телолор) болушат. Алар бардык жагынан көп бурчтуктар менен чектелген фигуралар. Ал көп бурчтуктар грандары деп аталат. Көп грандыктын бир гранында жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесинди анын диагоналы деп аталат. 164-сүрөттө көп грандык көрсөтүлгөн, анын диагоналы $CF_1$. Көп грандыктар ар кандай жана татаал болот. Биз аларды 11-класста кеңири карайбыз. Азырынча айрым гана жөнөкөй көп грандыктарга токтолобуз.

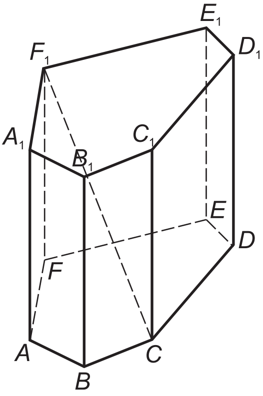
### 60.1. ТИК ПРИЗМА

Призма[1] эң жөнөкөй көп грандыктардын бири болуп эсептелет. Куб, учталбаган алты кырдуу карандаш ж. б. призмага мисал боло алышат.

---

[1] Грек сөзү, «*кесилип алынган тело*» деген маанини түшүндүрөт. Байыркы термин.

Негиздери деп аталуучу эки граны $ABCDEF$ жана $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ барабар көп бурчтуктар жана алардын тиешелүү жактары параллель, ал эми калган грандары тик бурчтуктар болушкан көп грандык **тик призма** деп аталат (164-сүрөт).



164-сүрөт.

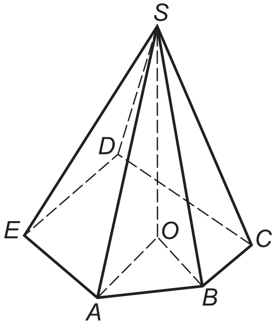
$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасында $ABB_1A_1$, $BCC_1B_1, \ldots,$ $FAA_1F_1$ тик бурчтуктары призманын каптал грандары, $AA_1$, $BB_1$, ..., $EF_1$ каптал кырлары деп аталат. Призманын каптал кырлары анын бийиктиги болуп эсептелет. Негизиндеги көп бурчтукка карата призма үч бурчтуу, төрт бурчтуу ж. у. с. болушу ыктымал. 164-сүрөттө 6 бурчтуу призма көрсөтүлгөн, $CF_1$ анын диагоналы.

Куб, тик бурчтуу параллелепипед призманын айрым түрлөрү болуп эсептелет, алар силерге мурдатан белгилүү.

## 60.2. ПИРАМИДА

Көп грандыктардын дагы бир жөнөкөй түрү болуп пирамида[1] эсептелет. Анын сүрөтү 165-сүрөттө көрсөтүлгөн.

Бир граны кандайдыр көп бурчтук, ал эми калган грандары жалпы чокулуу үч бурчтуктар болгон көп грандык **пирамида** деп аталат (165-сүрөт).



165-сүрөт.

Эгерде $ABCDE$ көп бурчтугун алып, анын чокуларын көп бурчтуктун тегиздигинен тышкары жаткан $S$ чекити менен туташтырсак, пирамида пайда болот (165-сүрөт). Ал пирамиданы $SABCDE$ аркылуу белгилешет. Көп бурчтук пирамиданын негизи, $SA, SB, \ldots$ каптал кырлары, $ABC, \ldots, AES$ — үч бурчтуктары каптал грандары болушат.

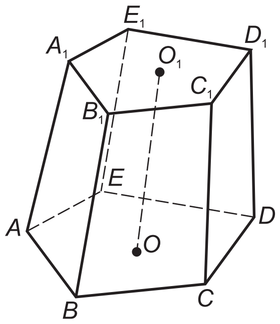
Эгерде $SO$ кесиндиси $AO$ жана $BO$ кесиндилерине перпендикулярдуу, тактап айтканда пирамиданын негизинин тегиз-

[1] Грек сөзү. Томпок көп грандык деген мааниде.

дигине перпендикулярдуу болсо, анда $SO$ пирамиданын бийиктиги деп аталат.

Пирамиданын негизи үч бурчтук, төрт бурчтук ж. б. болсо, анда тиешелүү түрдө үч бурчтуу, төрт бурчтуу ж. б. пирамидага ээ болобуз. 165-сүрөттө беш бурчтуу пирамида көрсөтүлгөн.

### 60.3. КЕСИЛГЕН ПИРАМИДА



166-сүрөт.

Эгерде $SABCDE$ пирамидасын негизине параллель болгон $\alpha$ тегиздиги менен кескенден пайда болгон $SA_1B_1C_1D_1E_1$ пирамидасын алып коюп, анын калган бөлүгүн өзүнчө карасак, ал да көп грандыкты аныктайт (165-сүрөт). Аны кесилген пирамида деп атайбыз. Демек, пирамиданын негизинин тегиздиги менен негизине параллель кесүүчү тегиздиктин арасында жаткан пирамиданын бөлүгү кесилген пирамида деп аталат (166-сүрөт).

$ABCDE$ жана $A_1B_1C_1D_1E_1$ көп бурчтуктары кесилген пирамиданын негиздери, $ABB_1A_1$, $BCC_1B_1$, ..., $EAA_1E_1$, төрт бурчтуктары — каптал грандары, $AA_1$, $BB_1$, ..., $EE_1$ — каптал кырлары, $OO_1$ — бийиктиги болот.

Толук пирамидадагыдай эле, кесилген пирамида да үч, төрт ж. б. бурчтуу болушу мүмкүн.

### КӨНҮГҮҮЛӨР

1. 1) Үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу тик призманы сызгыла.
2. Сегиз гранга ээ болгон тик призманын: 1) негизи кандай көп бурчтук; 2) канча каптал граны болот?
3. Тик призманын каптал грандарынын саны менен негизиндеги көп бурчтуктун жактарынын санынын кандай байланышы бар?
4. Беш бурчтуу тик призманын канча чокусу, граны, кыры бар?
5. Кубдун бир чокусунан чыккан кырларынын учтары аркылуу өтүүчү кесилишти түзгүлө.
6. Кубдун кыры $a$. Анын: 1) каптал гранынын диагоналын; 2) кубдун өзүнүн диагоналын тапкыла.
7. Тик бурчтуу параллелепипеддин: 1) карама-каршы кырлары; 2) карама-каршы грандары барабардыгын далилдегиле.

**8.** Тик бурчтуу параллелепипеддин кырлары $a, b, c$. Диагоналын тапкыла.

**9.** Тик бурчтуу параллелепипеддин бардык диагоналдары барабар болорун далилдегиле.

**10.** Эгерде тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмдөрү: 1) 2 м, 3 м, 6 м; 2) 3 дм, 6 дм, 12 дм болсо, диагоналын эсептегиле.

**11*.** Кырларынын саны 15 ке барабар болгон тик призма болобу?

**12.** 1) Үч бурчтуу; 2) төрт бурчтуу пирамиданы сызгыла. Чокуларын, кырларын, грандарын, негизин атагыла, көрсөткүлө.

**13.** Беш бурчтуу пирамиданын канча чокусу, граны, кыры бар?

**14.** Пирамиданын чокусу жана негизинин диагоналы аркылуу өткөн тегиздик диагоналдык тегиздикти аныктайт. 1) Төрт бурчтуу пирамидада; 2) беш бурчтуу пирамидада канча диагоналдык кесилишти жүргүзүүгө болот? Чиймеде көрсөткүлө.

**15.** Пирамиданын бардык каптал кырлары $l$ ге барабар, ал эми негизи $a$ жактуу квадрат. Анын бийиктигин эсептегиле.

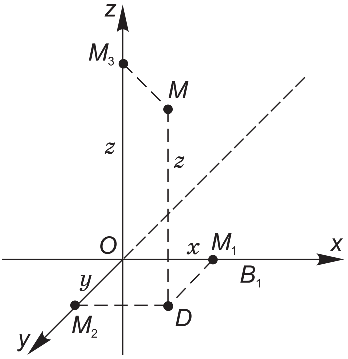
**16.** Төрт бурчтуу пирамиданын каптал кырлары $l$ ге барабар, бийиктиги $h$, ал эми негизи тик бурчтук. Пирамиданын негизинин диагоналын тапкыла.

**17.** Кесилген төрт бурчтуу пирамиданын негиздери жактары 10 дм жана 2 дм болгон квадраттар, ал эми каптал кырлары 9 дм. Пирамиданын бийиктигин тапкыла.

**18.** Кесилген пирамиданын негиздери жактары 4 см жана 1 см болгон тең жактуу үч бурчтуктар, ал эми каптал кырлары 5 см. Ар бир гранынын периметрин тапкыла.

## § 61. МЕЙКИНДИКТЕГИ ЧЕКИТТИН КООРДИНАТАЛАРЫ

Мейкиндикте да чекиттин координаталарын аныктоого болот. Ал тегиздиктегиге окшош. Демек, мейкиндикте чекитти координаталар (сандар) аркылуу туюнтуп жазуу үчүн мейкиндиктеги координаталар системасын түзүү талап кылынат.



167-сүрөт.

Мейкиндикте $O$ чекитинде кесилишүүчү жана бири-бирине перпендикулярдуу болушкан $Ox$, $Oy$, $Oz$ окторун алабыз (167-сүрөт). Алар координаталар октору деп аталат. $Ox$, $Oy$

[1] Латын сөзү, «*тыгыз байланышкан*» деген маанини түшүндүрөт.

октору кандай аталаары белгилүү, $Oz$ — апликата[1] огу деп аталат. $O$ – координаталар башталышы болот.

Ар бир эки ок аркылуу тегиздик жүргүзүүгө мүмкүн, алар координата тегиздигин аныктайт. Демек, үч координаталар тегиздиги болот. Октор боюнча масштаб бирдиктерин тегиздиктегидей эле тандап алууга мүмкүн.

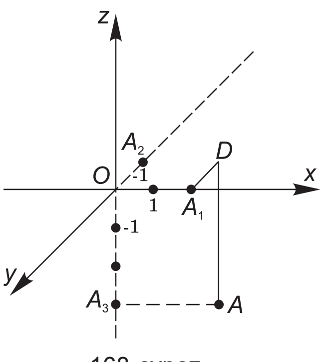
$O$ – башталышы, октору, алар боюнча масштаб бирдиктери берилсе, анда *мейкиндикте тик бурчтуу координаталар системасы* аныкталган болот, аны кыскача $Oxyz$ аркылуу белгилейбиз.

Эми бул системада $M$ чекити берилсе, ага туура келүүчү $x$, $y$, $z$ үч санын, ал эми, тескерисинче, $x$, $y$, $z$ сандары берилсе алар аркылуу аныкталуучу $M$ чекитин таап алууга болот.

$M$ чекити берилсе, ал аркылуу $Oz$ огуна параллель түз сызык жүргүзүп анын $xOy$ координата тегиздиги менен кесилишин табабыз, ал $D$ чекити болот: $DM=OM_3=z$ деп белгилейбиз.

Эми $D$ чекити аркылуу $Ox$, $Oy$ окторуна параллель түз сызыктарды жүргүзүп, $M_1D=OM_2=y$, $M_2D=OM_1=x$ сандарын табабыз. Демек, $M$ чекити аркылуу $x$, $y$, $z$ сандары аныкталды.

Эгерде $x$, $y$, $z$ сандары берилсе, анда $x=OM_1$, $y=OM_2=M_1D$ ($Oy$ ке параллель), $z=OM_3=DM$ ($Oz$ ке параллель) кесиндилерин түзүп, $M$ чекитин табабыз. Мында $x$, $y$, $z$ сандарына карата $M$ чекити табылды. Ар бир учурда масштаб бирдиктери жана $x$, $y$, $z$ сандарынын белгилери эсепке алынышы керек. Бул учурда $x$, $y$, $z$ сандары мейкиндикте $M$ чекитинин координаталары деп аталат да, $M(x, y, z)$ аркылуу белгиленип жазылат.




168-сүрөт.

Мисалы, $Oxyz$ системасында $A(2; -1; -3)$ чекитин түзөлү (168-сүрөт).

$Ox$ огуна $OA_1=2$ бирдик кесиндисин өлчөп коюп, $A_1$ чекитине ээ болобуз. $A_1$ чекити аркылуу $Oy$ огуна карама-каршы багытта параллель шоола сызып, ага $A_1D=1$ кесиндисин өлчөп коёбуз. $D$ чекити аркылуу $Oz$ ке карама-каршы багытта параллель шоола жүргүзүп, $DA=3$ кесиндисин түзөбүз. $A$ изделүүчү чекит болот.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $Oxyz$ координаталар системасында $A\,(4;\,2;\,3)$; $B\,(-2;\,2;\,-2)$; $C\,(-3;\,1;\,2)$; $D\,(2;\,0;\,-3)$; $E\,(-2;\,-3;\,0)$; $F\,(5;\,0;\,0)$; $L(\frac{1}{2};\,3\,;-1)$ чекиттерин түзгүлө.
2. 1-маселедеги чекиттердин кайсынысы: 1) координаталар окторунда; 2) координаталар тегиздигинде жатат?
3. $Oxyz$ координаталар системасында: 1) $A(0;\,0;\,2)$; 2) $B(0;\,3;\,0)$; 3) $C(-3;\,0;\,0)$ чекити кайсы окто жатат? Аларды түзгүлө.
4. $Oxyz$ координаталар системасында: 1) $A(-2;\,0;\,1)$; 2) $B(3;\,-2;\,0)$; 3) $C(0;\,2;\,5)$ чекити кайсы координаталар тегиздигинде жатат?
5. $Oxyz$ координаталар системасында $E(-2;\,3;\,4)$ жана $F(2;\,-2;\,1)$ чекиттери берилген. $EF$ кесиндисин түзгүлө.
6. $Oxyz$ координаталар системасында берилген $K(2;\,3;\,-4)$ чекити аркылуу координаталар тегиздиктеринин ар бирине параллель болуп жүргүзүлгөн тегиздик координаталар окторун кандай чекиттерде кесет?
7. Кубдун кыры 4 см. Бир чокусу $Oxyz$ координаталар системасынын $O$ башталышы, ал чокудан чыгуучу кырлар координаталар окторунун оң багыттары менен дал келет. Кубдун чокуларынын координаталарын тапкыла.

## § 62. МЕЙКИНДИКТЕГИ ЭКИ ЧЕКИТТИН АРАЛЫГЫ. КЕСИНДИНИН ОРТОСУНУН КООРДИНАТАЛАРЫ

Тегиздикте $xOy$ системасына карата $A(x_1;\,y_1)$ жана $B(x_2;\,y_2)$ чекиттери берилсе, алардын арасындагы аралык

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (1)$$

формуласы аркылуу эсептеле тургандыгы белгилүү.

Тегиздикте берилген эки чекиттин арасындагы аралыкты табууга окшоштуруп, мейкиндиктин $Oxyz$ системасында $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ жана $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$ чекиттери берилсе, алардын арасындагы аралыкты

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \qquad (2)$$

формуласы аркылуу эсептөөгө болот. (2)формуланын толук чыгарылышына кийин токтолобуз.

$A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ жана $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$ чекиттери менен чектелген $AB$ кесиндисинин ортосунда жаткан $C(x_0;\,y_0;\,z_0)$ чекитинин координаталарын тегиздиктегиге окшоштуруп,

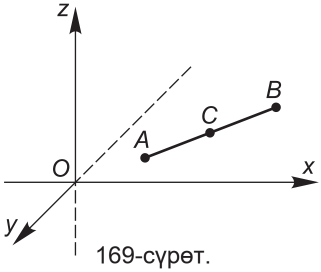
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\,;\;\; y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\,;\;\; z_0=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3)$$

формуласы аркылуу эсептөөгө болот.

Чындыгында эле, $AC$ жана $CB$ аралыктарын (2) формуласы аркылуу эсептесек (169-сүрөт).

$$AC^2=\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)^2+\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1\right)^2=\frac{AB^2}{4} \qquad (4)$$

же $AC=\frac{1}{2}AB$.



169-сүрөт.

Ошондой эле $CB=\frac{1}{2}AB$ болот.

Бул шарттар качан гана $C$ чекити $AB$ кесиндисинин ортосунда жатканда туура, б. а.

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2};\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

болот.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $Oxyz$ координаталар системасында $A(2; -3; 4)$ жана $B(-4; 5; 4)$ чекиттери берилген. $AB$ аралыгын тапкыла.
2. $A(-3; -4; 3)$ жана $B(1; 4; 5)$ чекиттери берилген. 1) $AB$ кесиндисинин ортосундагы $C$ чекитинин координаталарын тапкыла; 2) $AC$ жана $CB$ кесиндилеринин узундуктарын эсептегиле; 3) алар $AB$ кесиндисинин кандай бөлүгү болорун көрсөткүлө.
3. $ABC$ үч бурчтугунун чокулары $A(-5; 2; 4)$, $B(1; 6; -7)$, $C(3; -2; 8)$ болсун. Үч бурчтуктун: 1) периметрин; 2) $AD$ медианасын тапкыла.
4. $AB$ кесиндисинин башталышы $A(1; -3; 4)$, ал эми ортосу $C(3; -1; 1)$ болсо, $B$ чекитинин координаталарын тапкыла.
5. $ABCB$ параллелограммынын $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$ чокулары берилген. 1) Диагоналдарынын кесилишкен чекитин; 2) $D$ чокусунун координаталарын; 3) $BD$ диагоналын эсептегиле.

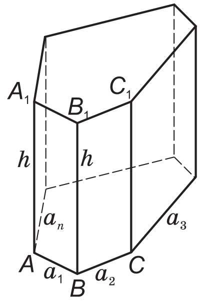
## § 63. МЕЙКИНДИКТЕГИ ТЕЛОЛОРДУН БЕТТЕРИНИН АЯНТТАРЫ ЖӨНҮНДӨ МААЛЫМАТТАР

Мейкиндиктеги жөнөкөй телолордун беттеринин аянттарын эсептейбиз. Ал тегиздиктеги фигуралардын аянттарын табууга негизделген.

### 63.1. ТИК ПРИЗМАНЫН БЕТИНИН АЯНТЫ

Тик призма берилип, негизинин жактары $a_1, a_2\ ,\ldots,a_n$, бийиктиги $h$ болсун (170-сүрөт). Бул призманын ар бир каптал граны тик бурчтук, ал тик бурчтуктардын аянттарынын суммасы призманын каптал бетинин аянтын аныктайт:

$$S_{к.б.}=a_1h+a_2h+\ldots+a_nh=(a_1+a_2+\ldots+a_n)h=P\cdot h, \qquad (1)$$



170-сүрөт.

$S_{к.б}$ — каптал бетинин аянты, $P$ — негизинин периметри. Демек, **тик призманын каптал бетинин аянты анын негизинин периметрин бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Ал эми тик призманын бетинин же толук бетинин аянтын табыш үчүн каптал бетинин аянтына негиздеринин аянттарын кошобуз: $$S_{т.б.}=S_{к.б}+2S_н. \qquad (2)$$

$S_{т.б.}$ – призманын толук бетинин аянты, $S_{н.}$ – негизинин аянты.

### 63.2. ПИРАМИДАНЫН БЕТИНИН АЯНТЫ

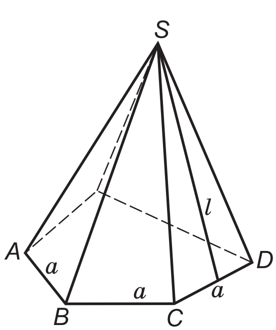
Пирамиданын каптал грандары үч бурчтуктар, ал эми негизи көп бурчтук боло тургандыгы белгилүү. Пирамиданын каптал бетиндеги үч бурчтуктардын (каптал грандарынын) аянттарынын суммасы анын каптал бетинин аянтын аныктайт.

Пирамиданын негизи туура көп бурчтук, ал эми каптал кырлары барабар болгон пирамиданы карайлы. Ал туура $n$ бурчтуу пирамида деп аталат. Анын негизинин жагы $a$, каптал гранынын $S$ чокусунан түшүрүлгөн бийиктиги $l$ болсун. $SE=l$, $AB=a$, $SE$ бийиктиги пирамиданын **апофемасы** деп аталат (171-сүрөт).

Бул пирамиданын каптал гранындагы бир үч бурчтктун аянты $\frac{1}{2}\ a\cdot l$ болот. Анда анын каптал бетинин аянты

$$S_{к.б.}=\frac{1}{2}a\cdot n\cdot l \text{ же } S_{к.б.}=\frac{1}{2}P\cdot l. \qquad (3)$$

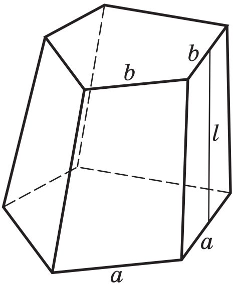
Туура пирамиданын каптал бетинин аянты негизинин периметринин жарымын апофемасына көбөйткөнгө барабар. Пирамиданын толук бетинин аянты каптал бетинин аянты менен негизинин аянтынын суммасына барабар.



171-сүрөт.

$$S_{т.б.}=S_{к.б.}+S_{н.}\ . \qquad (4)$$

$S_{н.}$ — негизинин аянты, аны аныктоо белгилүү.



172-сүрөт.

Кесилген $n$ бурчтуу туура пирамиданын негиздеринин жактары $a$, $b$ апофемасы $l$ болсун (172-сүрөт). Анын каптал грандары тең капталдуу трапециялар болушат. Алардын аянттарынын суммасы кесилген пирамиданын каптал бетинин аянтын аныктайт. Бир трапециянын аянты $\frac{a+b}{2}\cdot l$ болору белгилүү. Анда кесилген пирамиданын каптал бетинин аянты

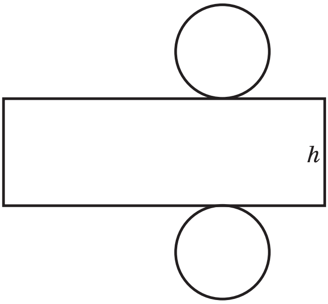
$$S_{к.б.}=\frac{a+b}{2}\cdot l\cdot n \quad \text{же} \quad S_{к.б.}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l\,, \qquad (5)$$

мында $P_1$, $P_2$ — негиздеринин периметрлери.

Кесилген пирамиданын негиздеринин аянттары $S_{1н.}$ жана $S_{2н.}$ болсо, толук бетинин аянты

$$S_{т.б.}=S_{к.б.}+S_{1н.}+S_{2н.} \ \text{болот.} \qquad (6)$$

### 63.3. ЦИЛИНДРДИН БЕТИНИН АЯНТЫ



173-сүрөт.

Цилиндрдин негиздери барабар тегеректер экендиги белгилүү. Эгерде цилиндрдик бетти бир түзүүчүсү боюнча кесип, анын жайылмасын түзсөк, анда 173-сүрөттөгүдөй болот. Мында тик бурчтук цилиндрдин каптал бетин, ал эми тегеректер болсо анын негиздерин аныктайт. Цилиндрдин радиусу $R$, бийиктиги $h$ болсо, тик бурчтуктун бир жагы цилиндрдин негизинин айланасынын узундугуна, экинчи жагы цилиндрдин бийиктигине барабар. Анда тик бурчтуктун аянты цилиндрдин каптал бетинин аянтына барабар:

$$S_{ц.}=2\pi\cdot R\cdot h\ . \qquad (7)$$

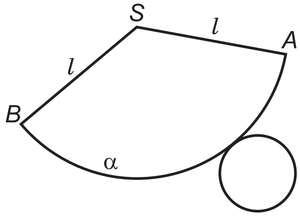
Ал эми толук бетинин аянты $S_{ц.б.}=S_{ц.к.б.}+2S_{н.}=2\pi\cdot R\cdot h+2\pi\cdot R^2$

же

$$S_{ц.б.}=2\pi\cdot R(h+R)\ \text{болот.} \qquad (8)$$

### 63.4. КОНУСТУН БЕТИНИН АЯНТЫ

Эгерде конустук бетти бир түзүүчүсү боюнча кесип анын жайылмасын түзсөк, 174-сүрөттө көрсөтүлгөндөй, тегеректин секторуна жана тегерекке ээ болобуз. Конустун түзүүчүсү $l$, радиусу $R$ болсун. $SA=l$ — сектордун радиусу, $\angle ASB=\alpha$ болот.




174-сүрөт.

Бул учурда конустун каптал бетинин аянты $SAB$ секторунун аянтына барабар болот

$$S_{к.б.}=S_{сек.}=\frac{\pi l^2\alpha}{360°}\ . \tag{9}$$

$AB$ жаасынын узундугу $m=\frac{\pi l\alpha}{180°}$ болоору белгилүү. Ошондуктан (9) дан

$$S_{к.\,б.}=\frac{\pi l^2\alpha}{360°}=\frac{\pi l\alpha}{180°}\cdot\frac{1}{2}=m\cdot\frac{1}{2}\ , \tag{10}$$

бирок, $AB$ жаасынын узундугу конустун негизинин айланасынын узундугун аныктайт. Анда $m\approx 2\pi R$ болот. Ошентип, конустун каптал бетинин аянты

$$S_{к.\,б.}=\pi Rl \tag{11}$$

болот. Натыйжада конустун толук бетинин аянты

$$S_{т.\,б.}=\pi Rl+\pi R^2 \tag{12}$$

болот.

Кесилген конустун каптал бетинин аянтын негиздеринин радиустары $R$ жана $r$, түзүүчүлөрү $l+l_1$ жана $l_1$ болгон эки толук конустун каптал беттеринин аянттарынын айырмасы катарында табууга болот. Натыйжада кесилген конустун каптал бетинин аянтын эсептөөдө

$$S_{к.\,к.\,к.\,б.}=\pi R(l+l_1)-\pi Rl_1=\pi\ (R+r)l \tag{13}$$

формуласын пайдаланууга мүмкүн, мында $(R-r)l_1=l_r$ экендиги белгилүү. Эми кесилген конустун толук бетинин аянты

$$S_{т.\,б.}=\pi\ (R+r)l+\pi R^2+\pi r^2 \tag{14}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

### 63.5. ШАРДЫН БЕТИНИН (СФЕРАНЫН) АЯНТЫ

Цилиндрге же конуска окшоштуруп, алардын жайылмасын түзүү мүмкүн эмес. Ошондуктан шардын бетинин аянтын аныктай тургандай формуланы табуу кошумча түшүнүктөрдү талап кылат. Ага кийинчерээк, 11-класста токтолобуз. Азырынча шардын бетинин (сферанын) аянтын табуунун төмөндөгүдөй даяр формуласынан пайдаланабыз:

$$S_{б.а.}=4\pi R^2, \text{ мында } R - \text{шардын радиусу.} \qquad (15)$$

### КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун кыры 5 дм. Бетинин аянтын тапкыла.
2. Кубдун каптал гранынын диагоналы 8 см. Бетинин аянтын тапкыла.
3. Кубдун бетинин аянты 54 м$^2$. Кубдун кырын эсептегиле.
4. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү: 1) 2 см, 4 см, 8 см; 2) 1,5 дм, 4 дм, 4,5 дм. Бетинин аянтын эсептегиле.
5. Тик бурчтуу параллелепипеддин негизинин жактары 5 м жана 3 м, ал эми бийиктиги 6,5 м болсо: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.
6. Кубдун диагоналы $d$. Бетинин аянтын аныктагыла.
7. Кубдун бетинин аянты $S$. 1) Кырын; 2) диагоналын тапкыла.
8. Тик бурчтуу параллелепипеддин каптал бетинин аянты 48 см$^2$, бийиктиги 4 см, негиздеринин аянттары 16 см$^2$ болсо, негизинин жактарын тапкыла.
9. Беш бурчтуу тик призманын негизинин жактары 1,5 м, 2,5 м, 3 м, 1 м, 5 м, ал эми бийиктиги 6 м болсо, каптал бетинин аянтын эсептегиле.
10. Негизи параллелограмм болгон тик призманын бийиктиги 12 дм, негизинин жактары 6 дм жана 4 дм. Параллелограммдын тар бурчу $30^\circ$ Призманын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын тапкыла.
11. Тик призманын негизи ромб, бийиктиги 8 дм. Ромбдун диагоналдары 6 дм жана 8 дм. Призманын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.
12. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 12 см, каптал кыры 10 см. Пирамиданын бетинин аянтын тапкыла.
13. Туура үч бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 16 дм, апофемасы 5 дм. Анын толук бетинин аянтын эсептегиле.
14. Туура 6 бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 3 м, апофемасы 4 м. Каптал жана толук бетинин аянтын тапкыла.

**15.** Кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары 4 см жана 2 см, апофемасы 3 см. Анын: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.

**16.** Цилиндрдин: 1) бийиктигин үч эсе чоңойтсок; 2) негизинин радиусун эки эсе чоңойтсок, анда каптал бетинин аянты кандай өзгөрөт?

**17.** Цилиндрдин: 1) радиусу 1,2 дм, бийиктиги 2,5 дм; 2) диаметри 20 см, бийиктиги 14 см. Бетинин аянтын эсептегиле.

**18.** Цилиндрдин жайылмасында тегеректердин ар биринин аянты 25,2 $см^2$, тик бурчтуктун аянты 62,8 $см^2$. Цилиндрдин радиусун жана бийиктигин тапкыла.

**19.** Цилиндрдин октук кесилишиндеги квадраттын жагы $a$ га барабар. Цилиндрдин бетинин аянтын аныктагыла.

**20.** Эгерде конустун: 1) түзүүчүсүн эки эсе чоңойтсок; 2) радиусун үч эсе кичирейтсек, анда конустун каптал бетинин аянты кандай өзгөрөт?

**21.** Конустун түзүүчүсү $l$, радиусу $R$, бийиктиги $h$ болсун. Эгерде: 1) $l$=16 см, $R$=4 см, 2) $l$=1,5 см, $h$=1 см, 3) $h$=24 см, $R$=15 см болсо, конустун бетинин аянтын тапкыла.

**22.** Катеттери 0,8 дм, 0,6 дм болгон тик бурчтуу үч бурчтук чоң катетинин айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон беттин аянтын эсептегиле.

**23.** Кесилген конустун негиздеринин радиустары 5 см жана 2 см, ал эми тузүүчүсү 10 см. Конустун: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын эсептегиле.

**24.** Негиздери 20 см жана 14 см, ал эми бийиктиги 4 см болгон тең капталдуу трапеция негиздеринин тең ортосу аркылуу өтүүчү октун айланасында айланат. Айлануудан пайда болгон телонун: 1) каптал бетинин аянтын; 2) толук бетинин аянтын аныктагыла.

**25.** Шардын радиусу: 1) 8 см; 2) 5 дм болсо, бетинин аянтын эсептегиле.

**26.** Шарлардын радиустары 5 см жана 2,5 см. Алардын беттеринин аянттарынын катышын тапкыла.

**27.** Жердин радиусу болжол менен 6 400 км. Жердин бетинин: 1) аянтын эсептегиле; 2) 30% и кургактыкты түзсө, кургактыктын аянтын эсептегиле.

## § 64. МЕЙКИНДИКТЕГИ ТЕЛОЛОРДУН КӨЛӨМДӨРҮ ЖӨНҮНДӨ МААЛЫМАТТАР

Түз сызыкта кесиндинин узундугун, тегиздикте фигуранын аянтын өлчөгөндөй эле, мейкиндиктеги телонун көлөмүн өлчөөгө болот. Көлөм жөнүндөгү түшүнүктөр да турмуштук керектөөлөрдөн келип чыккан (мисалы, идиштин көлөмүн билүү, бөлмөнүн көлөмүн аныктоо ж. б.). Телонун көлөмү мейкиндикте чоңдукту мүнөздөйт. Ар кандай чоңдукту мүнөздөө үчүн бирдик тандалып алынат. Ошондуктан көлөмдү өлчөө үчүн көлөмдүн бирдигин тандап алуу керек.

Кырынын узундугу бирдик кесиндиге барабар болгон кубду бирдик куб деп аташат. Бул бирдик кубдун көлөмү көлөмдүн бирдиги катары кабыл алынат. Мейкиндиктеги телонун көлөмүн табуу үчүн ал телодо канча бирдик куб бар экендигин аныктоо керек. Ал оң сан аркылуу туюнтулат.

Жалпы учурда, мейкиндиктеги $F$ телосуна анын көлөмү деп аталуучу $V$ оң саны туура келтирилет жана ал төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1) Барабар телолордун көлөмдөрү барабар.

2) Эгерде тело бөлүктөргө бөлүнсө, анда анын көлөмү алынган бөлүктөрдүн көлөмдөрүнүн суммасына барабар.

Көлөмдүн тандалып алынган бирдигинде ар кандай тело үчүн анын көлөмү деп аталуучу санды аныктоого болот. Ал суроого биз 11-класста кеңири токтолобуз. Жөнөкөй телолордун көлөмүн аныктоонун даяр формулалары төмөнкүлөр.

### 64.1. ТИК ПРИЗМАНЫН КӨЛӨМҮ

Тик бурчтуу параллелепипеддин көлөмү

$$V=a\cdot b\cdot c \qquad (1)$$

формуласы менен аныктала тургандыгы 6-класстан эле белгилүү, мында $a$, $b$, $c$ анын үч өлчөмү. (1) формуланы

$$V=S\cdot h \qquad (2)$$

түрүндө жазууга да мүмкүн, мында $S=a\cdot b$ параллелепипеддин негизинин аянты, $h$ — бийиктиги. Параллелепипед призманын бир түрү экендиги белгилүү. (2) формула каалагандай тик призма үчүн да туура болот, мында $S$ тик призманын негизинин аянты болот. Демек, **тик призманын көлөмү анын негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

### 64.2. ПИРАМИДАНЫН КӨЛӨМҮ

Пирамиданын негизинин аянты $S_н$, бийиктиги $h$ болсо, анын көлөмү

$$V = \frac{1}{3} S_н \cdot h \tag{3}$$

формуласы менен аныкталат. Демек, пирамиданын көлөмү анын негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар. Кесилген пирамиданын көлөмү

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \tag{4}$$

формуласы аркылуу аныкталат, мында $S_1$ жана $S_2$ — пирамиданын негиздеринин аянттары, $h$ — пирамиданын бийиктиги.

### 64.3. ЦИЛИНДРДИН КӨЛӨМҮ

Цилиндрдин негизинин радиусу $R$ болсо, анда негизинин аянты $S = \pi R^2$ болот. Тик призманын көлөмүн аныктоого окшоштуруп, цилиндрдин көлөмүн

$$V = S \cdot h$$

же

$$V = \pi R^2 h \tag{5}$$

формуласы аркылуу аныктоого болот. Демек, цилиндрдин көлөмү анын негизинин аянтын бийиктигине көбөйткөнгө барабар.

### 64.4. КОНУСТУН КӨЛӨМҮ

Конустун негизинин радиусу $R$, бийиктиги $h$ болсо, анын негизинин аянты $S = \pi R^2$ (тегеректин аянты) болот. Конустун көлөмү негизинин аянтынын бийиктигине көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

же

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \tag{6}$$

Конустун көлөмүнүн формуласы пирамиданын көлөмүнүн формуласына окшош, ошондой эле (3) жана (6) формулалар да окшош. Андай болуп калышы бекеринен эмес. Анткени, конустун негизинин ичине туура көп бурчтукту сызып, анын чокуларын конустун чокусу менен туташтырсак туура пирамида алынат, ал пирамиданын жактарынын санын чоңойткондо конус пирамидага окшоп калат.

Кесилген конустун көлөмү

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2) \qquad (7)$$

формуласы аркылуу табылат, мында $R$ жана $r$ кесилген конустун негиздеринин радиустары, $h$ — кесилген конустун бийиктиги. (4) жана (7) формулаларды салыштырып көргүлө.

### 64.5. ШАРДЫН КӨЛӨМҮ

Радиусу $R$ ге барабар шардын көлөмү

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (8)$$

формуласы аркылуу эсептелинет.

## КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Кубдун кыры 4 см. Көлөмүн тапкыла.
2. Тик бурчтуу параллелепипеддин үч өлчөмү 4 м, 2 м жана 6 м. Көлөмүн эсептегиле.
3. Тик призманын негизи тик бурчтуу үч бурчтук, бийиктиги 9 дм. Катеттери 6 дм жана 8 дм болсо, анын көлөмүн тапкыла.
4. Тик призманын негизи жактары 10 см жана 6 см, арасындагы бурчу $60^\circ$ болгон параллелограмм. Призманын бийиктиги 12 см болсо, анын көлөмүн эсептегиле.
5. Жагы 8 м, тар бурчу $30^\circ$ болгон ромб тик призманын негизи болуп эсептелет. Ал тик призманын көлөмү 128 $м^2$ болсо, бийиктигин тапкыла.
6. Туура төрт бурчтуу пирамиданын негизинин жагы 6 см, бийиктиги 9 см. Пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
7. Негизинин жагы 8 дм, бийиктиги 12 дм болгон туура: 1) үч; 2) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн эсептегиле.
8. Негизинин жагы $a$, бийиктиги $h$ болгон туура: 1) үч; 2) төрт; 3) алты бурчтуу пирамиданын көлөмүн аныктагыла.
9. Жактары 4 м жана 3 м болгон тик бурчтук пирамиданын негизи. Пирамиданын каптал кырлары барабар, ал эми көлөмү 20 $м^3$ болсо, пирамиданын бийиктигин эсептегиле.
10. Кесилген туура төрт бурчтуу пирамиданын негиздеринин жактары 6 см, 2 см, бийиктиги 15 см. Көлөмүн эсептегиле.
11. Эгерде цилиндрдин: 1) бийиктиги үч эсе чоңойсо; 2) радиусу эки эсе чоңойсо, анын көлөмү кандай өзгөрөт?
12. Цилиндрдин: 1) радиусу 4 см, бийиктиги 5 см; 2) диаметри 10 дм, бийиктиги 8 дм болсо, анын көлөмүн эсептегиле.

**13.** Цилиндрдин негизинин айланасынын узундугу $C$, бийиктиги $h$ болсо, анын көлөмүн тапкыла.

**14.** Цилиндрдин радиусу 5 см, көлөмү 628 см$^3$ болсо, анын бийиктигин эсептегиле.

**15.** Конустун түзүүчүсү $l$, радиусу $R$, бийиктиги $h$ болсун. Эгерде: 1) $l$=1,6 дм, $R$=4 см; 2) $l$=15 см, $h$=10 см; 3) $h$=2,4 дм, $R$=15 см болсо, конустун көлөмүн эсептегиле.

**16.** Конустун түзүүчүсү анын тегиздигине 45$^\circ$ менен жантайган. Конустун радиусу 12 дм болсо, анын көлөмүн тапкыла.

**17.** Конустун радиусу 6 см, көлөмү 376,8 см$^3$ болсо, конустун бийиктигин аныктагыла.

**18.** Кесилген конустун негиздеринин радиустары 9 см жана 1 см, ал эми бийиктиги 6 см. Кесилген конустун көлөмүн тапкыла.

**19.** Эгерде шардын радиусу: 1) 2,5 см; 2) 8 дм; 3) 1 м; 4) 1,5 дм болсо, анын көлөмүн эсептегиле.

**20.** Шардын радиусун үч эсе чоңойтсок, көлөмү кандай өзгөрөт?

## 1. ГЕОМЕТРИЯНЫН АЛГАЧКЫ ТАРЫХЫ ЖӨНҮНДӨ КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР

Ар кандай илимдин өнүгүш тарыхы дайыма фактылардан башталат, ал конкреттүү фактылардын топтолушуна жараша илимдин өзүнүн закондору жана теориялары иштелип чыгат да, кыйла узак убакыттан кийин калыптанган бир системага түшүрүлөт. Геометрия да дал ушундай жол менен өсүп өнүктү.

Геометриянын пайда болгон күнүн, айын же жылын так көрсөтүү мүмкүн эмес. Анткени геометрия башка бардык илимдердей эле, адамдардын турмуштук керектөөлөрүнөн келип чыккан. Ал керектөөлөр айрым геометриялык түшүнүктөр менен мүнөздөлгөн. Бул түшүнүктөр кылымдар бою топтолуп, кийин бир калыпка түшкөн, системалашкан. Эми геометрия өзүнчө илим болуп түзүлгөнгө чейинки айрым фактыларга токтололу.

Геометриянын алгачкы элементтери адегенде Вавилондо жана Египетте пайда болгон. Египеттиктерде көбүнчө жерди өлчөөнүн негизинде келип чыккан. Биздин египеттик математика менен тааныштыгыбыз азыркы эрага чейинки 2000–1700 жылдарда жазылып калтырылган байыркы кол жазмаларга негизделген. Ал кол жазмаларды, эстеликтерди изилдөө менен египеттиктердин ошол кезде эле тик бурчтуктун, үч бурчтуктун, трапециянын аянттарын аныктай билишкенине ынанабыз. Аянттын бирдиги үчүн алар жагынын узундугу бирге барабар болгон квадратты алышкан. Фигуралардын окшоштугу жөнүндө да элестери болгон. Ал гана эмес кесилген туура пирамиданын көлөмүн да азыркыдай так формула менен аныкташкан. Геометрияны өнүктүрүүдө вавилондуктар египеттиктерден кем калышкан эмес. Вавилондуктар геометриялык айрым маселелерди алгебраны колдонуп чечишкен.

Бирок Египеттин экономикасынын кийинчерээк өспөй төмөндөп кетиши геометриянын бул өлкөдө андан ары өнүгүшүнө тоскоолдук кылган. Ошондуктан жалпы эле математикалык маданияттын борбору акырындык менен Египеттен Грецияга өтө баштайт. Биздин эрага чейинки VII–VI кылымдарда Грецияда шаардык курулуштардын, деңизде сүзүүнүн өнүгүшү астрономиянын, физиканын алгачкы түшүнүктөрүнүн пайда болушу байкалат. Мунун өзү кыйла так өлчөөлөрдү талап кылган. Ошондуктан геометриялык татаал маселелерди чыгарууга туура келген.

Мындай маслелерди чыгарууга мурда колдонулуп келген геометриялык жөнөкөй ыкмалар жетишсиздик кылган. Ошондуктан геометрияны теориялык жактан негиздөө зарылдыгы келип чыккан.

Бул милдетти ишке ашырууну Фалестин мектеби колго алган. Аталган мектеп байыркы грек илимин жана философиясын негиздөөчү Фалес Милетскийдин (биздин эрага чейинки 624–547-жылдар) ысымына байланыштуу. Бул мектепте геометрия негизги изилдөөлөрдүн катарында турган. Ошентип, геометрия гректик философтор тарабынан акырындык менен илимге айланып, анын айрым сүйлөмдөрү теорема катарында логикалык түрдө далилдене баштаган. Азыр мектептин геометрия курсунда далилденип жүргөн айрым теоремалар ошол кезде эле Фалес тарабынан далилденген деп эсептешет. Андай теоремалардын катарына төмөндөгүлөр кирет:

1) Жарым айланага ичтен сызылган бурч тик бурч болот.

2) Вертикалдык бурчтар барабар.

3) Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтары барабар.

4) Үч бурчтук бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу боюнча аныкталат.

Грецияда геометриянын андан ары өнүгүшү Пифагор Самосскийге (б. э. чейинки 580–500-жж.) жана анын мектебине байланыштуу. Геометриялык ачылыштардын көбү Пифагордук мектепке таандык. Атап айтканда:

1) Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы жөнүндөгү теорема.

2) Квадраттык теңдеменин геометриялык жол менен чыгарылышы.

3) Пифагордун теоремасы.

Бул мектепте геометрия менен алгебранын байланышына чоң көңүл бурулган. Пифагордук мектептеги «өлчөнүлбөй турган кесиндилердин» бар экендигинин ачылышы геометриянын андан аркы өнүгүшү үчүн чоң мааниге ээ болду. Ага чейин ар кандай эки кесиндинин катышы рационалдуу сан менен туюнтулат деп келишкен. Анын туура эмес экендиги далилденди. Каалагандай кесиндини өлчөө үчүн рационалдуу сандардын жетишсиз экендиги ачылган. Демек, иррационалдуу сан жөнүндө түшүнүккө өтүү зарылдыгы пайда болгон.

Биздин эрага чейинки VI–III кылымдарда грек окумуштуулары Демокриттин (б. э. ч. 460–370-жж.), Платондун (б. э. ч. 429–348-жж.), Аристотелдин (б. э. ч. 384–322-жж.) геометрия боюнча ачылыштары да геометриянын андан ары өнүгүшүнө жакшы шарт түзгөн. Мисалы, пирамиданын жана конустун көлөмдөрүн аныктоо Демокрит тарабынан ошондо эле белгиленген.

Ошол учурда Грецияда математиканын, анын ичинде геометриянын өнүгүшүнө өзгөчө көңүл бурулган. Ал турсун философияны үйрөнүү үчүн биринчи иретте геометрияны билүү керек деп эсептешкен. Мисалы, Платон тарабынан уюштурулган Академияга «геометрияны билбеген адам кирбей эле койсун» деген сөз эл арасында тарап кеткен.

Ошентип, Грецияда геометриянын өнүгүшү философия менен тыгыз байланышта болгон. Ошонун натыйжасында геометрия гректердин философиялык мектептеринде жогорку баскычка жеткен. Натыйжада биздин эрага чейинки VII–III кылымдарда Грецияда геометрия боюнча көп маселелер топтолгон. Ал топтолгон материалдарды белгилүү бир илимий принциптин негизинде бир системага жайгаштыруу зарылчылыгы келип чыккан.

Бул зарылчылыктуу иш болжол менен биздин эрага чейин III кылымда грек окумуштуусу Евклид тарабынан ишке ашырылган. Анын «Башталыш» деп аталган китеби (жыйнагы) 13 бөлүктөн туруп, геометриянын көп суроолорун камтыган.

Биз жогоруда геометриянын алгачкы тарыхына кыскача токтолдук. Анын жалпы тарыхы өтө көлөмдүү маалыматтардан турат жана ири изилдөөлөрдү талап кылат. Өзгөчө, геометриянын азыркыдай жогорку деңгээлдеги зор тарыхы кимди болсо да кызыктырбай койбойт. Алардын айрымдарына дагы кийинчерээк токтолобуз.

## 2. ЦИРКУЛДУН ЖАНА СЫЗГЫЧТЫН ЖАРДАМЫ МЕНЕН ТҮЗҮЛБӨЙ (ЧЫГАРЫЛБАЙ) ТУРГАН АЙРЫМ МАСЕЛЕЛЕР

Циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чыгарууга мүмкүн болбогон байыркы «атактуу» үч маселеге токтолобуз.

### а) Кубду эки эселентүү маселеси

Бул байыркы маселелердин бири. Анын келип чыгышы төмөндөгү жөнөкөй маселеге байланыштуу болушу ыктымал:

аянты берилген квадраттын аянтынан эки эсе чоң болгон квадратты түзгүлө. Бул маселенин циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чыгарылышы белгилүү. Берилген квадраттын жагынын узундугу $a$, изделүүчү квадраттын жагынын узундугун $x$ десек: анда маселенин шарты боюнча $x^2=2a^2$ же $x=a\sqrt{2}$ болот. Мындай кесиндини түзүү үчүн катеттеринин узундуктары $a$ га барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзсөк, анда анын гипотенузасынын узундугу $x$ болот, демек, изделүүчү квадраттын жагы аныкталат. Ал эми ал жагы боюнча квадратты түзүү белгилүү.

Ушуга окшоштуруп, окумуштуулар кубду эки эселентүү маселесин да циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чечүүгө аракеттенишкен. Бирок, аны узак убакыттар бою чече алышкан эмес. Ошондуктан бул маселе өтө маанилүү проблемалык маселелердин бири болуп калган.

Кубду эки эселентүү маселеси төмөндөгүдөй: кырынын узундугу $a$ га барабар болгон куб берилген. Көлөмү ушул кубдун көлөмүнөн эки эсе чоң болгон кубдун кырын түзүү талап кылынат. Изделүүчү кубдун кырынын узундугун $x$ аркылуу белгилейли. Анда маселенин шарты боюнча $x^3=2a^3$ болот (мында $a^3$ — берилген кубдун, $x^3$ изделүүчү кубдун көлөмү). $a=1$ деп алалы. Анда жогорудагы барабардыктан төмөнкү теңдемени алабыз:

$$x^3-2=0 \tag{1}$$

Эгерде (1) теңдемесинин тамырларын циркуль жана сызгыч менен түзүүгө мүмкүн болсо, анда ал куралдарды колдонуп изделүүчү кубдун кырын түзүүгө мүмкүн болоор эле.

Бирок (1) теңдеменин рационалдык тамыры жок.

Ошентип, берилген маселени циркулдун жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө (чыгарууга) болбойт.

**б) Бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү**

Маселенин шарты төмөндөгүдөй: ар кандай бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлгүлө.

Бул маселе да байыркы маселелердин бири. Ал байыркы Грецияда биздин эрага чейин V кылымда пайда болгон. Ар кандай бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен дайыма тең экиге бөлүүгө болот. Ошол кезде эле, «эмне үчүн циркулдун жана сызгычтын жардамы менен ар кандай бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү мүмкүн эмес?» – деген суроо келип чыккан. Анын үстүнө бул маселенин практикалык мааниси да чоң эле. Ал айлананы барабар бөлүктөргө бөлүү маселеси менен да байланыштуу. Мында маселенин жалпы учурда чечилиши талап кылынып жатат. Анткени айрым учурдагы, мисалы: $90^\circ$ же $180^\circ$ сыяктуу бурчту үч бөлүккө бөлүү оңой эле. Бирок ар кандай бурчту циркуль жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүү мүмкүн эмес экендигин далилдөө үчүн барабар үч бөлүккө бөлүүгө мүмкүн болбогон бир бурчтун бар экендигин көрсөтүү жетиштүү болот.

Берилген бурчтун чоңдугун $\alpha$ аркылуу белгилеп, аны тар бурч деп эсептейли. Эгерде ал кең бурч болсо, анда аны $\alpha=180^\circ-\beta$ түрүндө жазууга болот, мында $\beta$ тар бурч болуп калат.

$\frac{\alpha}{3}=60^\circ-\frac{\beta}{3}$ түрүндө жазууга мүмкүн болгондуктан, $\alpha$ ны үч бөлүккө бөлүүнү, $\beta$ ны барабар үч бөлүккө бөлүүгө келтиришет. Анткени $60^\circ$ бурчту дайыма түзө алабыз. Ошондуктан маселени тар бурч үчүн кароо жетиштүү болот. Изделүүчү тар бурчтун чоңдугун $j$ аркылуу белгилейли. Анда маселенин шарты боюнча $\varphi=\frac{\alpha}{3}$ болот.

Эгерде борбору координаталар башталышында жаткан жана радиусу бирге барабар болгон айлана берилсе, анда айланада жаткан чекиттин абсциссасы ($\alpha$ – тар бурч болгондо ал оң мааниге ээ) бурчтун косинусун аныктай тургандыгы белгилүү, ошондуктан бурчтун косинусун кесиндини түзүү менен байланыштырабыз. Белгилүү формула боюнча $\cos\alpha=\cos 3j$ же $\cos\alpha=4\cos^3 j-3\cos j$ болот (бул формула алгебра курсунан силерге белгилүү).

Мындан $4\cos^3 j-3\cos j-\cos\alpha=0$ барабардыгына ээ болобуз. $\cos\varphi=\frac{x}{2}$; $\cos\alpha=\frac{b}{2}$ деп белгилесек,

$$x^3-3x-b=0 \tag{2}$$

теңдемесине ээ болобуз. (2) нин рационалдык тамыры болсо, $x$ түзүлөт. Демек, $j$ да түзүлөт. $0<\alpha<90^\circ$ болгондо, (2) нин рационалдык тамыры болбойт. Мисалы, $\alpha=60^\circ$ десек, $\cos\alpha=60^\circ=\frac{1}{2}$. Анда жогорудагы белгилөө боюнча $b=1$ болот. Натыйжада $x^3-3x-1=0$. Бул теңдеменин рационалдык тамыры жок.

Демек, бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүүгө мүмкүн эмес.

Ошентип, жалпы учурда циркуль жана сызгычтын жардамы менен бул маселени да чечүүгө мүмкүн эмес.

**в) Тегеректи квадратка келтирүү**

Бул байыркы «атактуу» маселелердин үчүнчүсү. Муну бардык математикалык маселелердин алгачкысы десек жаңылышпайбыз, анткени ал болжол менен төрт миң жыл мурда эле пайда болгон. Бул маселени чыгарууга гректер, вавилондуктар, египеттиктер жана индиялыктар көп эле аракет кылышкан.

Маселенин берилиши төмөндөгүдөй: циркулдун жана сызгычтын жардамы менен аянты берилген тегеректин аянтына барабар болгон квадратты түзгүлө.

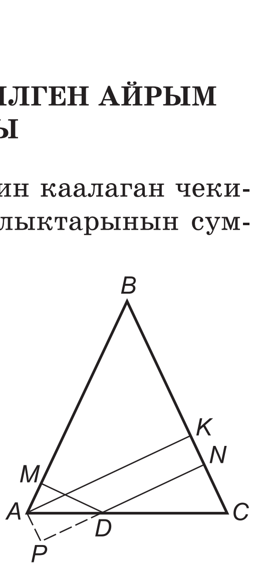
Берилген тегеректин радиусунун узундугун $R$ деп, изделүүчү квадраттын жагынын узундугун $x$ деп белгилейли. Анда тегеректин аянты $\pi R^2$, ал эми изделүүчү квадраттын аянты $x^2$ болот. Маселенин шарты боюнча $x^2=\pi R^2$ же же $x=R\sqrt{\pi}$ .

Жогоруда эскерткендей, эгерде квадраттын жагын түзө алсак (белгилүү болсо), анда квадратты дайыма түзө алабыз. Аны түзүү силерге белгилүү. Бирок, мында квадраттын жагын түзүү $\sqrt{\pi}$ санына (б. а. $\pi$) санына байланыштуу. Эгерде $\pi$ кандайдыр оң бүтүн же рационалдуу сан болсо, анда биз $x$ кесиндисин оңой эле түзө алат элек. Бирок, $\pi$ рационалдык сан эмес. Демек, $x=R\sqrt{\pi}$ кесиндисин, же $R=1$ десек, $x=\sqrt{\pi}$ кесиндисин циркулдун жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө мүмкүн эмес. Ошондуктан аянты берилген тегеректин аянтына барабар болгон квадратты түзүү маселеси циркулдун жана сызгычтын жардамы менен чечилбейт.

## 3. ДАЛИЛДӨӨГӨ ЖАНА ТҮЗҮҮГӨ БЕРИЛГЕН АЙРЫМ МАСЕЛЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

**1.** Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин каалаган чекитинен анын каптал жактарына чейинки аралыктарынын суммасы үч бурчтуктун каптал жагына түшүрүлгөн бийиктикке барабар экендигин далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. Бул сүйлөмдүн тууралыгын адегенде үч бурчтуктун чокусундагы бурчу тар бурч болгон учур үчүн далилдейли. Маселенин шартына туура келүүчү үч бурчтук $ABC$ болсун дейли (175-сүрөт).



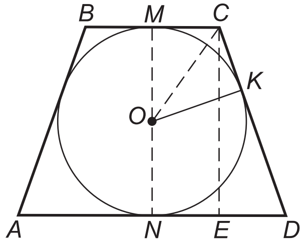
175-сүрөт.

$AB=BC$ болсун, $AC$ негизинен каалаган $D$ чекитин алып, андан үч бурчтуктун каптал жактарына $DM$ жана $DN$ перпендикулярларын жүргүзөбүз: $DM\perp AB$, $DN\perp BC$, $BC$ жагына $AK$ бийиктигин жүргүзөбүз: $AK\perp BC$. Демек $AK\parallel DN$, анткени алар бир эле $BC$ жагына перпендикулярдуу. $ND$ ны $D$ чекитинен ары көздөй созобуз да, $A$ чекити аркылуу $BC$ жагына параллель түз сызык жүргүзөбүз, анын $ND$ кесиндисинин уландысы менен кесилишкен чекитин $P$ аркылуу белгилейбиз. Натыйжада $ADP$ тик бурчтуу үч бурчтугуна ээ болобуз. $AMD$ жана $APD$ тик бурчтуу үч бурчтуктары өз ара барабар, анткени алардын гипотенузалары жалпы ($AD$), $\angle MAD=\angle DAP$ (булардын ар бири тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурч, анткени $\angle BCA=\angle DAP$, булар параллель $BC$ жана $AP$ түз сызыгы менен кесилишиндеги ички кайчылаш бурчтар болушат. Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан $DM=DP$, параллель $AP$ жана $BC$ түз сызыктардын арасындагы перпендикуляр болгондуктан $AK=PN$; $PN=PD+DN=$ $=DM+DN$. Демек, $AK=DM+DN$ экендиги далилденди.

Берилген тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы $B$ бурчу тик болгондо $AK$ бийиктиги $AB$ жагына дал келет, ал эми $B$ буру кең бурч болгондо, $AK$ бийиктиги үч бурчтуктун тышында $CB$ жагынын уландысына түшүрүлөт.

**2.** Тең капталдуу трапецияга ичтен тегерек сызылган. Тегеректин аянтынын трапециянын аянтына болгон катышы тегеректин айланасынын узундугунун трапециянын периметрине болгон катышына барабар экендигин далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ тең капталдуу трапециясына ичтен тегерек сызылган дейли (176-сүрөт). Ичтен сызылган тегеректин радиусу $OM=r$ дейли. Көп маселелерди чыгарууда керектүү элементтерди өз өзүнчө жекече табууга аракеттенүү эч бир натыйжа бербейт, мындай учурда изделүүчү элементтердин бир нечесинин же алгебралык суммасын, же көбөйтүндүсүн, же катышын табуу маселенин чыгарылышын жеңилдетет. Дал ошол сыяктуу маселелердин бири биздин азыркы алган маселебиз болуп эсептелет. Мындай маселени чыгарууда биз, трапециянын эч болбогондо бир жагын (мисалы, $BC$ ны) ичтен сызылган тегеректин радиусу ($OM=R$) аркылуу туюндуруп алууга аракеттенебиз. Ырас, алар тегерекке сырттан сызылган төрт бурчтуктун жактарынын касиети боюнча $AD+BC=AB+CD$ боло тургандыгын жана трапеция тең капталдуу болгондуктан $AD+BC=2AB$ боло турган-



176-сүрөт.

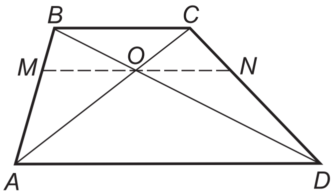
дыгын, мындан $AB=\frac{AD+BC}{2}$, башкача айтканда, трапециянын каптал жагы анын орто сызыгына барабар экендигин аныктайбыз. Андан ары $OCD$ үч бурчтугунун тик бурчтуу экендигин негиздеп, андан $OK=\sqrt{CK\cdot KD}$ , башкача айтканда $r=\sqrt{CK\cdot KD}$ экендигин аныктап, $CED$ тик бурчтуу үч бурчтугунанбы же башка көз карандылыктарданбы, иши кылып трапециянын бир жагын ичтен сызылган айлананын радиусу аркылуу туюнтууга аракеттенүү мүмкүн. Бирок мындай аракет бир натыйжа бербейт. Ошондуктан трапециянын кандайдыр бир сызыктуу элементин ичтен сызылган тегеректин радиусу аркылуу туюндурууга курулай аракеттене бербестен, маселенин талабына ылайык келүүчү катыштарды түздөн түз табууга өтө берүү керек.Ошентип биздин белгилөөлөр жана жогоруда келтирилген баяндамалар боюнча:

тегеректин аянты $r^2$ ка,
трапециянын аянты $MN\cdot CD=2rCD$ га,
айлананын узундугу $2\pi r$ ге,
трапециянын периметри $2CD+BC+AD=4CD$ га барабар.

Демек: $\frac{\pi r^2}{2r\cdot DC}=\frac{2\pi r}{4CD}$ мындан $\frac{\pi r}{2\cdot CD}=\frac{\pi r}{2\cdot CD}$ экендиги өзүнөн өзү келип чыгат.

**3.** Трапециянын диагоналдарынын кесилишкен чекитинде анын негиздерине параллель болуп жүргүзүлгөн түз сызыктын трапециянын каптал жактарынын арасында камалган кесиндиси, ошол диагоналдардын кесилишкен чекитинде тең экиге бөлүнөрүн далилдегиле.

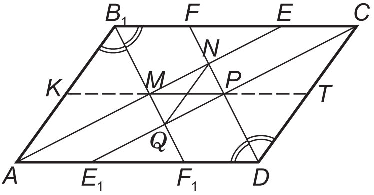
Д а л и л д ө ө. Эгерде берилген трапеция тең капталдуу болсо, анда маселенин чыгарылышы өзүнөн өзү түшүнүктүү. Ошондуктан биз бул сүйлөмдүн тууралыгын ар кандай трапеция үчүн далилдейбиз. Берилген трапеция $ABCD$ болсун дейли (177-сүрөт). $BD$ жана $AC$ диагоналдарынын кесилишинен $O$ чекити аркылуу, трапециянын негиздерине параллель кылып $MN$ түз сызыгын жүргүзөбүз. $MO=ON$ экендигин далилдөө үчүн $AOM$ жана $ABC$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OM}{BC}=\frac{AO}{AC}$, мындан $OM=BC\cdot\frac{AO}{AC}$ ны; $OND$ жана $BCD$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан: $\frac{ON}{BC}=\frac{OD}{BD}$, мындан $ON=BC\cdot\frac{OD}{BD}$ ны табабыз. Үчтөн бурч-



177-сүрөт.

тары барабар болушкандыктан $BOC$ жана $AOD$ үч бурчтуктары да окшош. Демек: $\frac{AO}{OC}=\frac{OD}{BO}$, мындан $\frac{AO}{AO+OC}=\frac{OD}{OD+BO}$ же $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ экендиги келип чыгат. Ошентип, биз $OM=BC\cdot\frac{AO}{AC}$; $ON=BC\cdot\frac{OD}{BD}$, $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ экендигине ээ болобуз. Бул үч барабардыкты салыштырып көрүп $OM=ON$ деген корутундуга келебиз.

**4.** Параллелограммдын ички бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен тик бурчтук пайда болоорун жана ал тик бурчтуктун диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын айырмасына барабар боло тургандыгын далилдегиле.



178-сүрөт.

Д а л и л д ө ө. Берилген параллелограмм $ABCD$ болсун дейли (178-сүрөт), анын ички бурчтарынын биссектрисаларын жүргүзөбүз, алардын кесилишинен $MNPQ$ төрт бурчтугу пайда болот. Мында параллелограммдын карама каршы бурчтарынын биссектрисалары өз ара параллель болушат, башкача айтканда: $AE\parallel CE_1$, $DF\parallel BF_1$.

Параллелограммдын бир жагына тиешелүү бурчтар болушкандыктан $\angle A+\angle B=2d$, демек $\angle BAM+\angle MBA=d$. Ошондуктан $\angle AMB=\angle QMN=d$, башкача айтканда $MNPQ$ тик бурчтук.

$ABM$ жана $BME$ тик бурчтуу үч бурчтуктарынын барабардыгынан (анткени алардын $BM$ — катети жалпы жана бирден тар бурчтары барабар) $AB=BE$ экендиги, башкача айтканда $ABE$ үч бурчтугу (ошондой эле $CDE_1$ үч бурчтугу да) тең капталдуу экендиги келип чыгат. Демек $AM=ME$ (ошондой эле $CP=PE_1$) $AECE_1$ параллелограммынын жактары болушкандыктан $AE=CE_1$ экендигин эске алып $AM=ME=E_1P=PC$ экендигине ынанабыз. Демек бирден тар бурчтары ($MAF_1$ жана $PE_1D$) жана бирден катеттери ($AM$ жана $E_1P$) барабар болушкандыктан $MAF_1$ жана $PE_1D$ тик бурчтуу үч бурчтуктары өз ара барабар болушат. Бул үч бурчтуктардын экөөнүн тең гипотенузасы $AD$ түз сызыгында жаткандыктан алардын гипотенузаларына түшүрүлүүчү бийиктиктери да өз ара барабар болушат, башкача айтканда $M$ жана $P$ чекиттери $AD$ дан бирдей алыстыкта, демек, $MP\parallel AD$ болот.

$ABE$ үч бурчтугунун орто сызыгы $KM=\frac{1}{2}BE$, $E_1CD$ үч бурчтугунун орто сызыгы $PT=\frac{1}{2}E_1D$.

$$MP=KT-(KM+PT)=AD-(\tfrac{1}{2}BE+\tfrac{1}{2}ED)=AD-(\tfrac{1}{2}BE+\tfrac{1}{2}BE),$$

анткени $BE=E_1D$.

$MP=AD-BE=AD-AB$, анткени $AB+BE$. Ошентип, тик бурчтуктун диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын айырмасына барабар экендиги далилденди.

**5.** Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарына окшош жактары үч бурчтуктун жактары болгондой кылынып окшош көп бурчтуктар курулган. Гипотенузага курулган көп бурчтуктун аянты катеттерге курулган көп бурчтуктардын аянттарынын суммасына барабар экендигин далилдегиле.

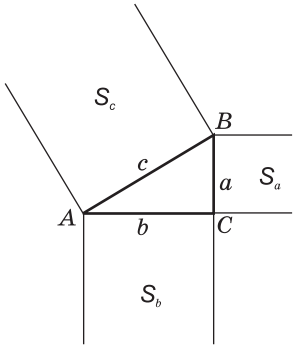
Д а л и л д ө ө. $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугунун жактарына өз ара окшош болгон кандайдыр бир көп бурчтуктар курулду дейли (179-сүрөт). Гипотенузага курулган көп бурчтуктун аянтын $S_c$ деп, $a$ жана $b$ катеттерине курулган көп бурчтуктардын аянттарын $S_a$ жана $S_b$ деп белгилейли.

Окшош көп бурчтуктардын аянттары алардын окшош жактарынын квадраттарындай катыша тургандыктан:

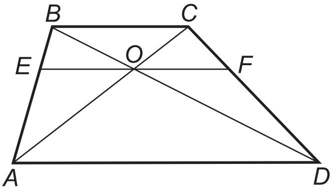
$$\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2};\ \frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2};\ \frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2};$$

$$\frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{c^2};\ \frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1\,.$$

мындан $S_a+S_b=S_c$ экендиги келип чыгат.




179-сүрөт.




180-сүрөт.

**6.** $ABCD$ трапециянын диагоналдарынын кесилишкен чекити аркылуу анын негиздерине $EF$ параллель түз сызыгы жүргүзүлгөн. $EF$ түз сызыгы негиздердин орточо гармоникалык мааниси ($EF$ тин тескери чоңдугу) негиздердин тескери чоңдуктарынын орточо арифметикалык маанисине барабар), башкача айтканда $\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})$ боло тургандыгын далилдегиле (180-сүрөт).

Д а л и л д ө ө. $ABC$ жана $AOE$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{BC}{EO}=\frac{AB}{AE}\cdot ABD$ жана $BOE$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{EO}$. Бул пропорциялардан

$$\frac{EO}{BD}+\frac{OE}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB};\ OE(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})=\frac{AE+EB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

$OFD$ жана $BCD$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OF}{BC}=\frac{FD}{CD}$; $COF$ жана $ACD$ үч бурчтуктарынын окшоштугунан $\frac{OF}{AD}=\frac{CF}{CD}$. Бул пропорцияларды мүчөлөп кошобуз.

$$\frac{OF}{BC}+\frac{OF}{AD}=\frac{FD}{CD}+\frac{CF}{CD};\ OF(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})=\frac{DF+FC}{CD}=\frac{DC}{CD}=1.$$

$$OE(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})+OF(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})=2,$$

$$(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})(OE+OF)=2;\ (\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD})\cdot EF=2;$$

мындан:

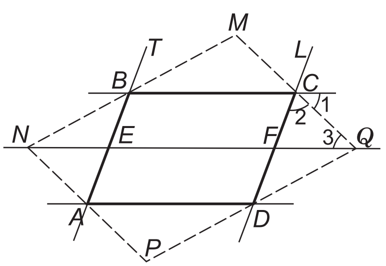
$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}).$$

**7.** Параллелограммдын тышкы бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен диагоналы параллелограммдын жанаша жаткан жактарынын суммасына барабар болгон тик бурчтук пайда болоорун далилдегиле.

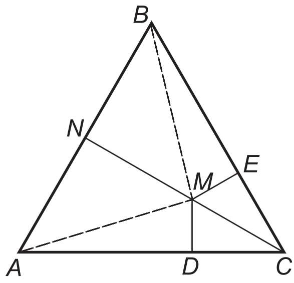
Д а л и л д ө ө. Адегенде $ABCD$ параллелограммынын тышкы бурчтарынын биссектрисаларынын кесилишинен пайда болуучу $MNPQ$ төрт бурчтугунун тик бурчтук экендигин көрсөтүүгө киришели (181-сүрөт).

$BT$ жана $CL$ параллель түз сызыктарынын $BC$ түз сызыгы менен кесилишкендеги бир жактуу бурчтар болушкандыктан $\angle TBC+\angle LCB=180^\circ$, $\frac{1}{2}\cdot\angle TBC+\frac{1}{2}\cdot\angle LCB=90^\circ$, башкача айтканда $\angle MBC+\angle MCB=90^\circ$, демек $BMC=90^\circ$. Ушул эле сыяктуу $MNPQ$ төрт бурчтугунун калган $N$, $P$ жана $Q$ бурчтарынын ар бири да тик экендигин далилдөөгө болот. Мунун өзү $MNPQ$ — тик бурчтук дегендикке жатат.

Эми бул төрт бурчтуктун $NQ$ диагоналын жүргүзүп, анын $AB$ жана $CD$ жактары менен кесилишкен чекиттерин $E$ жана $F$ аркылуу белгилейбиз. $CQ$ тышкы бурчтун биссектисасы болгондуктан $\angle 1=\angle 2$, параллель түз сызыктардын үчүнчү бир түз сызык менен кесилишкендеги ички кайчылаш бурчтар болгондуктан $\angle 1=\angle 3$, демек $\angle 2=\angle 3$, башкача айтканда $FCQ$ тең капталдуу үч бурчтук: $FC=FQ$. Ушундай эле жол менен $FDQ$ үч




181-сүрөт.




182-сүрөт.

бурчтугунун да тең капталдуу экендигин, башкача айтканда $FQ=FD$ экендигин далилдөөгө болот. Ошентип биз акыркы эки барабардыктан $FQ=\frac{1}{2}CD$ экендигине ээ болобуз. Дал ушундай эле жол менен $EN=\frac{1}{2}AB$ экендигин көрсөтүүгө болот.

Натыйжада $MNPQ$ тик бурчтугунун диагоналы

$$NQ=NE+EF+FQ=\frac{1}{2}AB+BC+\frac{1}{2}AB=AB+BC$$

экендиги келип чыгат.

**8.** Тең жактуу үч бурчтуктун ичинен алынган кандайдыр бир $M$ чекитинен анын жактарына чейинки аралыктардын суммасы турактуу жана ал үч бурчтуктун бийиктигине барабар экендигин далилдегиле.

Далилдөө. $ABC$ тең жактуу үч бурчтугунун $M$ чекитинен анын жактарына $MD$, $ME$ жана $MN$ перпендикулярларын жүргүзүп, $M$ чекитин үч бурчтуктун чокулары менен туташтырабыз (182-сүрөт). Натыйжада $ABC$ үч бурчтугу үч үч бурчтукка бөлүнөт. Берилген үч үч бурчтуктун аянттарынын суммасына барабар. Демек:

$$S_{ABC}=S_{AMC}+S_{CMB}+S_{BMA}=\frac{1}{2}DM\cdot AC+\frac{1}{2}EM\cdot BC+\frac{1}{2}NM\cdot AB.$$

Үч бурчтук тең жактуу: $AB=AC=BC$ болгондуктан

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB(DM+EM+NM)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h,$$

башкача айтканда $DM+EM+NM=h$ үч бурчтуктун бийиктиги. Акыркы барабардыктагы үч кесиндинин суммасы $M$ чекитинин үч бурчтуктун кайсы жеринен алынгандыгына карабастан дайыма турактуу болот, анткени үч бурчтуктун аянты турактуу.

**9.** Параллелограммдын ичинен алынган чекит анын бардык чокулары менен туташтырылган. Мына ушундан пайда болуучу карама-каршы үч бурчтуктардын аянттарынын суммасы өз ара барабар болуша тургандыгын далилдегиле.

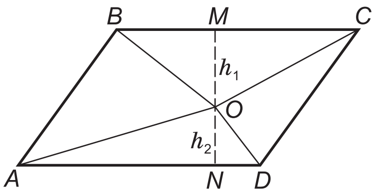
Д а л и л д ө ө. *ABCD* параллелограммынын ичинен *O* чекитин алып, аны параллелограммдын чокулары менен туташтырабыз (183-сүрөт). *BOC* жана ага карама-каршы *AOD* үч бурчтуктарынын аянттарынын суммасын табалы.

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OM\ ,\ \ S_{AOD}=\frac{1}{2}AD\cdot ON\ ;$$

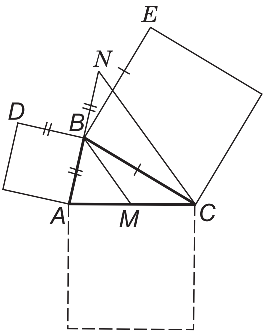
$$S_{BOC}+S_{AOD}=\frac{1}{2}AD(OM+ON)=\frac{1}{2}AD\cdot MN=\frac{1}{2}S_{ABCD}\ .$$

*AOB* жана *DOC* үч бурчтуктарынын аянттарынын суммасы да параллелограммдын аянтынын жарымына барабар болорун көрсөтүүгө болот.

Ошондуктан $S_{BOC}+S_{AOD}=S_{AOB}+S_{DOC}$ экендиги келип чыгат.




183-сүрөт.



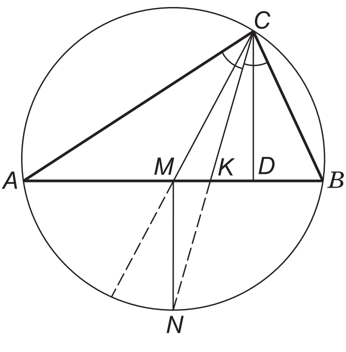

184-сүрөт.

**10.** Үч бурчтуктун жактарына квадраттар курулган. Квадраттардын үч бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу жактарынын учтарын туташтыруучу кесинди үч бурчтуктун ошол чокусунан жүргүзүлгөн медианасынан эки эсе чоң боло тургандыгын далилдегиле.

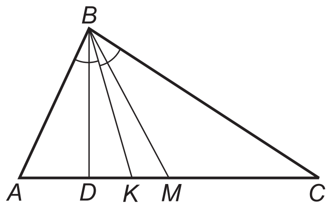
Д а л и л д ө ө. *ABC* үч бурчтугунун жактарына квадраттар куруп, *AB* жагын *N* чекитине чейин *BN*=*AB* кесиндисине улантып, *B* чокусунан *AC* жагына *BM* медианасын жүргүзөбүз (184-сүрөт). Мындан *MA*=*MC* болгондуктан $BM=\frac{1}{2}NC$, *DEB*=*BNC* анткени *DB*=*BN*, *BE*=*BC*, *DBE*=*NBC*=90°+*NBE*. Демек, *DE*=*NC*, ошондуктан $BM=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}DE$. *DE*=2*BM*. Ушул эле сыяктуу *A* жана $C$ чокуларынан чыккан квадраттардын жактарынын учтарын бириктирүүчү кесиндилердин ар биринин тиешелүү медиანадан эки эсе чоң экендигин да далилдөөгө болот.

**11.** Ар кандай үч бурчтукта кандайдыр бир бурчтун биссектрисасы ошол эле бурчтун чокусу аркылуу жүргүзүлгөн анын медианасы менен бийиктигинин арасында боло тургандыгын далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. **1-жол.** Берилген $ABC$ үч бурчтугуна сырттан айлана сызабыз. $C$ чокусунан үч бурчтуктун $CD$ бийиктигин, $CM$ медианасын жана $CK$ биссектрисасын жүргүзөбүз (185-сүрөт). $CK$ биссектрисасын айлана менен $N$ чекитинде кесилишкенче созобуз, анда $\angle ACK=\angle NCB$ болгондуктан $\breve{AN}=\breve{NB}$ болот. $N$ чекитин медиананын негизи болгон $M$ чекити менен туташтырабыз. $AM=MB$, $\breve{AN}=\breve{NB}$ болгондуктан $MN\perp AB$. $CN$ жантык сызыгынын (биссектрисанын) учтарынын $AB$ түз сызыгындагы проекциясы, $M$ менен $D$ (медиананын негизи менен бийиктиктин негизи) $ABC$ тең капталдуу үч бурчтук болуучу жалгыз бир учурдан башка бардык учурда тең, $K$ чекитинин эки жагында болот. Эгерде $ABC$ тең капталдуу үч бурчтук болуп калса, анда $M$, $K$ жана $D$ чекиттери бири-бирине дал келишет.




185-сүрөт.




186-сүрөт.

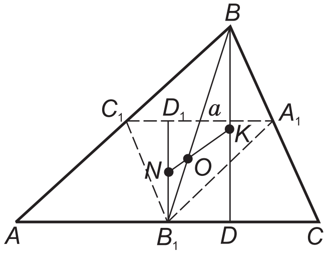
**2-жол.** $D$, $K$ жана $M$ чекиттери $ABC$ үч бурчтугунун $B$ бурчунун чокусу аркылуу жүргүзүлгөн бийиктиктин, биссектрисасынын жана медиананын негиздери болушсун дейли (186-сүрөт). Эгерде $AB=BC$ болсо, анда $D$, $K$, $M$ чекиттери бири бирине дал келишет. $AB<BC$ болсун дейли, анда $\angle A<\angle C$ (анткени чоң жактын каршысында чоң бурч жатат).

Демек, $\angle ABD<\angle DBC$, анткени $ABD$ жана $DBC$ тик бурчтуу үч бурчтуктарынын ар бириндеги тар бурчтардын суммасы турактуу жана $\angle BAD>\angle BCD$. Ошентип, $\angle ABD<\angle DBC$, ал эми $\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD$. Демек, $\angle ABD<\frac{1}{2}\angle ABC$, башкача айтканда $ABD<ABK$ жана $D$ чекити $AK$ кесиндисинде жатат. Бурчтун биссектрисасынын касиети боюнча $AK:KC+AB:BC$, болжолдоо боюнча $AB<BC$ болгондуктан акыркы барабардыктан $AK<KC$ экендиги келип чыгат. Мындан $AK<\frac{1}{2}AC=AM$ экендигине ээ болобуз, демек $M$ чекити $KC$ кесиндисинде жатат.

Ошентип, $K$ чекити $D$ жана $M$ чекиттеринин арасында боло тургандыгы далилденди.

**12.** Ар кандай үч бурчтукта анын медианаларынын кесилишкен чекити, орто борбору (бийиктиктеринин кесилишкен чекити) жана сырттан сызылган айлананын борбору бир түз сызыкта (Эйлердин түз сызыгы деп аталуучу түз сызыкта) жатыша тургандыгын далилдегиле.

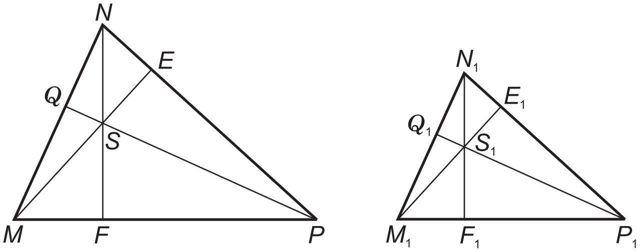
Д а л и л д ө ө. $ABC$ үч бурчтугунун жактарынын тең ортолорун туташтыруу аркылуу $A_1B_1C_1$ үч бурчтугуна ээ болобуз (187-сүрөт). Тиешелүү жактары пропорциялаш болгондуктан $ABC$ жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктары өз ара окшош, алардын окшоштук коэффициенти 0,5 ке барабар. $ABC$ үч бурчтугунун медианаларынын кесилишкен $O$ чекити $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун медианаларынын да кесилишкен чекити болот, башкача айтканда $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун медианалары $ABC$ үч бурчтугунун медианаларынын бөлүгүн түзүшөт,



187-сүрөт.

анткени $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун, мисалы, $A_1$ чокусунан жүргүзүлүүчү анын медианасын алып көрө турган болсок, ал сөзсүз $AA_1$ медианасынын бөлүгүн түзөт (чындыгында эле $AC_1A_1B_1$ — параллелограмм болгондуктан анын $A_1A$ жана $C_1B_1$ диагоналдары болгондуктан анын $A_1A$ жана $C_1B_1$ диагоналдары $A_1C_1B_1$ үч бурчтугунун $C_1B_1$ жагынын тең ортосунда кесилишет). $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун калган $C_1$ жана $B_1$ чокуларынан чыгуучу медианалары да $ABC$ үч бурчтугунун $C$ жана $B$ чокулары аркылуу жүргүзүлгөн медианаларынын бөлүктөрүн түзө тургандыгын ушундай эле жол менен көрсөтүүгө болот. $ABC$ жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын окшош жактары өз ара параллель болушкандыктан $ABC$ үч бурчтугунун жактарынын тең ортолорунан ал жактарга тургузулган перпендикуляр $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун бийиктиктери болушат, башкача айтканда $ABC$ үч бурчтугуна сырттан сызылуучу айлананын борбору $A_1B_1C_1$ үч бурчтугунун орто борбору болот, аны $N$ деп белгилейли. $N$ жана $O$ чекиттери аркылуу жүргүзүлгөн түз сызык $ABC$ үч бурчтугунун бийиктиктеринин кесилишкен $K$ чекити аркылуу да өтө тургандыгын көрсөтүү керек.

$ABC$ жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын окшоштук коэффициенти 0,5ке барабар болгондуктан: 1) алардын окшош жактарына түшүрүлгөн бийиктиктеринин катышы: $B_1D_1$:$BD$=0,5 жана 2) окшош жактарына түшүрүлгөн медианалардын катышы да $B_1O_1$:$BB_1$=0,5 болот. Бул акыркы эки барабардыктын негизинде үч бурчтуктардын окшоштугун эске алып: $B_1N$:$BK$=0,5 жана $B_1O$:$BO$=0,5 деген корутундуга келебиз.Чындыгында эле, эгерде берилген эки үч бурчтук окшош болсо, анда алардын, мисалы, окшош бийиктиктери гана эмес, ошол окшош бийиктиктеринин тиешелүү кесиндилери (мисалы, бийиктиктеринин орто борбордон чокуга чейинки кесиндилери) да үч бурчтуктун жктары сыяктуу катыша тургандыгын байкоого болот. Мисалы, эгерде $MNP$ үч бурчтугу $M_1N_1P_1$ үч бурчтугуна окшош болсо (188-сүрөт), анда алардын окшош жактарынын пропорциялаштыгы-



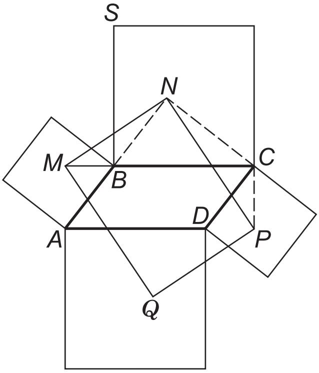

188-сүрөт.

нан жана бурчтарынын барабардыгынан пайдаланып, алардын ар биринин, мисалы, бардык үч бийиктиктерин жүргүзүүдөн пайда болуучу туундуу үч бурчтуктардын да окшош болуша тургандыгын (мисалы: $MQP$ менен $M_1Q_1P_1$, $MEP$ менен $M_1E_1P_1$, $MSP$ менен $M_1S_1P_1$ $ESP$ менен $E_1S_1P_1$ жана башка үч бурчтуктардын) көрсөтүүгө болот. Мына ошол туунду үч бурчтуктардын окшоштугунан $SP$:$S_1P_1$=$SF$:$S_1F_1$=$SM$:$S_1M_1$=...=$MP$:$M_1P_1$ экендигине ээ болобуз. Окшош үч бурчтуктардын бийиктиктеринин гана эмес медианаларынын жана биссектрисаларынын тиешелүү кесиндилеринин катышы жөнүндө да ушундай эле ой жүргүзүүгө болот.

Мына ошентип, жогорку биздин негизги маселеге карата чийилген чийме боюнча $B_1N=\frac{1}{2}BK$ жана $B_1O=\frac{1}{2}BO$ экендигин көрдүк. Мындан тышкары $B_1D_1 \| BD$ болгондуктан $\angle NB_1O=\angle OBK$, демек, $\Delta B_1NO \sim \text{D}OBK$, мындан $\angle NOB_1=\angle BOK$ экендиги, башкача айтканда $NO$ менен $OK$ бир түз сызыкта жата тургандыгы келип чыгат. Мына ошентип биз ар кандай $ABC$ үч бурчтугунда анын медианаларынын кесилишкен чекити ($O$), ортоцентри ($K$) жана жактарынын тең ортолорунан тургузулган перпендикулярлардын кесилишкен чекити ($N$) үчөө тең бир түз сызыкта жата тургандыгын далилдедик.

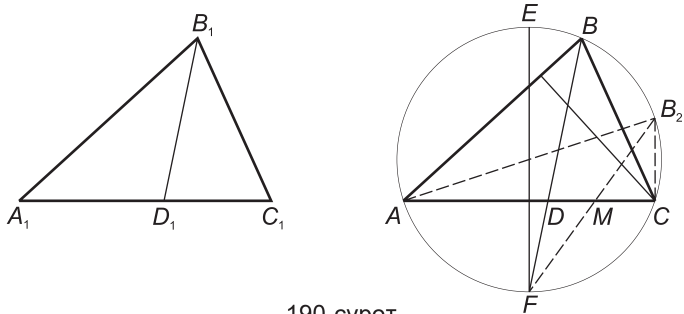
**13.** Параллелограммдын жактарына анын сыртын көздөй курулган квадраттардын борборлору квадраттын чокулары боло тургандыгын далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ параллелограммынын жактарына квадраттар курабыз (189-сүрөт). Бул квадраттардын борборлорун туташтыруудан пайда болгон $MNPQ$ төрт бурчтугунун квадрат боло тургандыгын далилдөө үчүн биринчиден анын жактарынын барабар экендигин, экинчиден анын бурчтарынын тик экендигин көрсөтүү жетиштүү болот. Параллелограммдын, мисалы, $B$ жана $C$ чокуларынын ар бирин тиешелүү квадраттардын борборлору менен туташтырып биз $MBN$ жана $NCP$ үч бурчтуктарына ээ болобуз. Бул үч бурчтуктар өз ара барабар, анткени $BM=CP$, $BN=CN$ жана $\angle MBN=\angle NCP$ (себеби $\angle MBN=\angle MBK+\angle SBN+\angle KBC=90^\circ+$ $+\angle KBC$, ошондой эле $\angle NCP=90^\circ+$ $+\angle DCB$, бирок тиешелүү жактары өз ара перпендикулярдуу болгондуктан $\angle KBS=\angle DCB$). $MBN$ жана $CNP$ үч бурчтуктарынын барабардыгынан $MN=NP$ экендиги келип чыгат. Ушул эле сыяктуу $PQ=QM=MN$ экендигин да көрсөтүүгө болот, башкача айтканда төрт бурчтуктун жактарынын барабар экендиги далилденди. $MBN$ жана $NPC$ үч бурчтуктарынын барабардыгынан $\angle MNB=\angle PNC$ экендиги келип чыгат. $BNC=90^\circ$ жана $\angle MNB=\angle PNC$ болгондуктан $MNP=90^\circ$, башкача айтканда төрт бурчтуктун бурчу тик болот. Бардык жактары барабар болгондуктан $MNPQ$ — параллелограмм, ал эми бир бурчу тик болгондуктан ал квадрат болот.



189-сүрөт.

14. Эгерде үч бурчтуктун эки биссектрисасы өз ара барабар болсо, анда ал тең капталдуу боло тургандыгын далилдегиле.



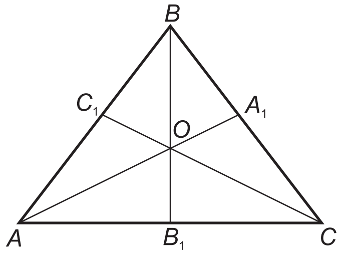

190-сүрөт.

Бул маселени чыгаруу үчүн адегенде кошумча төмөнкү маселени чыгарууга туура келет. «Эгерде берилген $ABC$ жана $A_1B_1C_1$ үч бурчтуктарынын негиздери чокусундагы бурчтары жана ал бурчтарынын биссектрисалары өз ара барабар болушса ($AC{=}A_1C_1$, $\angle B{=}\angle B_1$, $BD{=}B_1D_1$), анда ал үч бурчтуктардын өздөрү да барабар болушат (190-сүрөт).

Д а л и л д ө ө. $ABC$ үч бурчтугуна сырттан айлана сызабыз да, анын $AC$ жагына перпендикулярдуу кылып $EF$ диаметрин жүргүзөбүз. $A_1B_1C_1$ үч бурчтугун $ABC$ үч бурчтугунун үстүнө алардын барабар негиздери жана барабар бурчтары өз ара дал келишкендей кылып коебуз. Бул учурда үч бурчтуктардын барабар биссектрисалары жана алардын өздөрү да толук бири бирине дал келишет. Бул корутундунун тууралыгын карама-каршы метод менен далилдейли, башкача айтканда $B_1$ чокусу $B$ чокусуна дал келишпейт, башка бир $B_2$ абалында болот деп болжолдойлу. Маселенин шарты боюнча $\angle ABC{=}\angle A_1B_1C_1$, биздин болжолдообуз боюнча $\angle A_1B_1C_1{=}\angle AB_2C$ болгондуктан $B_2$ чекити айланада жаткан болот. $B_1D_1$ биссектрисасы $B_2M$ ге өтсүн $F$ чекити $AC$ жаасынын тең ортосу болгондуктан $AC$ жаасына таянуучу ичтен сызылган $B$ жана $B_2$ бурчтарынын экөөнүн тең биссектрисаларынын ($BD$ менен $B_2M$ дин) уландылары $F$ чекити аркылуу өтөт.

$F\breve{C}B > F\breve{C}B_2$ болсун дейли, анда $FB{>}FB_2$ жана $FD{<}FM$ (анткени $AC$ түз сызыгындагы $FD$ нын проекциясы $FM$ дин проекциясынан кичине). Демек, $BD{=}BF{-}FD{>}B_2F{-}FM{=}B_2M{=}B_2D_1$, $BD{>}B_1D_1$.

Бул натыйжа маселенин шартына ($BD{=}B_1D_1$) туура келбейт. Демек $B_1$ чокусу $B$ чокусуна дал келбейт деп болжолдоого болбойт, алар сөзсүз дал келишет. Ошондуктан $\Delta ABC{=}\Delta A_1B_1C_1$ болуп чыгат.

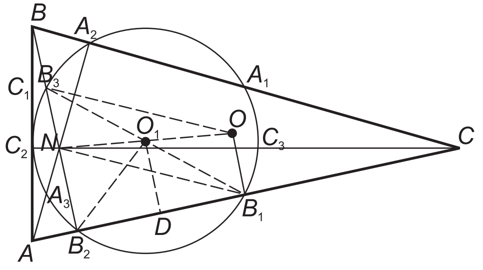



191-сүрөт.

Эми негизги маселенин чыгарылышына өтөлү. $ABC$ берилген үч бурчтук болсун (191-сүрөт). Анын $A$ жана $C$ бурчтарынын $AA_1$ жана $CC_1$ биссектрисаларын жүргүзөлү. Алар $AA_1=CC_1$ болушсун. $B$ бурчунун $BB_1$ биссектрисасын жүргүзөбүз. Анда жогоруда далилденген маалымат боюнча $\Delta AA_1B = \Delta CC_1B$, анткени алардын негиздери барабар ($AA_1=CC_1$) чокусундагы бурчтары барабар ($B$ бурчу жалпы бурч) чокусундагы бурчтарынын биссектрисалары барабар ($BO$ жалпы биссектриса). Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан $AB=BC$, башкача айтканда $ABC$ нын тең капталдуу үч бурчтук экендиги келип чыгат.

**15.** Ар кандай үч бурчтукта анын үч жагынын тең ортолору, үч бийиктигининин негиздери жана бийиктиктердин орто борбордон баштап чокуларга чейинки кесиндилерин тең экиге бөлүүчү үч чекит бир айланада жатыша тургандыгын далилдегиле. (Мындай айлана *тогуз чекиттин айланасы* деп аталат).

Д а л и л д ө ө. Берилген $ABC$ үч бурчтугуна сырттан сызылуучу айлананын борборун табуу максатында адегенде үч бурчтуктун үч жагынын тең ортолорунан ал жактарга жүргүзүлгөн перпендикулярлардын кесилишинен $O$ чекитин табабыз. (192-сүрөт). Андан кийин үч бурчтуктун орто борборун (бийиктиктегинин кесилишкен чекитин) таап, аны $N$ аркылуу белгилейбиз. Эйлердин түз сызыгы деп аталуучу түз сызык жөнүндөгү жогоруда чыгарылган маселенин чыгарылышында белгиленген сыяктуу эгерде $B_1$ үч бурчтуктун $AC$ жагынын тең ортосу жана $BB_2$ — үч бурчтуктун $AC$ жагына түшүрүлгөн бийиктик болсо, анда $B_1O \parallel NB$ жана $B_1O=\frac{1}{2}NB$ экендигин көрүүгө болот. $NB$ кесиндисинин тең ортосун $B_3$ деп белгилейли, анда $OB_1=NB_3$ болот.

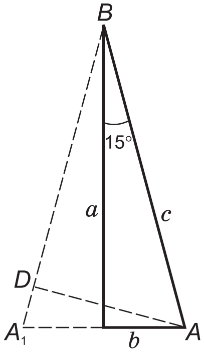



192-сүрөт.

Ошентип, $OB_1 \parallel NB_3$ жана $OB_1=NB_3$ болгондуктан $OB_1NB_3$ төрт бурчтугу параллелограмм болот, демек, эгерде анын диагоналдарынын кесилишкен чекитин $O_1$ деп белгилей турган болсок, анда $B_3O_1=B_1O_1$ жана $NO_1=O_1O$ болот. $OB_1 \| B_2N$ болгондуктан $B_2NOB_1$ төрт бурчтугу трапеция болот. Демек $O_1D \perp AC$ жана $NO_1=O_1O$ болгондуктан $O_1D$ — трапециянын орто сызыгы болот, башкача айтканда $B_2D=DB_1$. Ошентип, катеттери барабар болушкандыктан $\Delta B_2O_1D=\Delta B_1O_1D$,мындан $O_1B_1=O_1B_2$ экендиги келип чыгат. $B_3O_1=O_1B_1$ экендиги мурда көрсөтүлгөн. Демек $B_3O_1=O_1B_1=O_1B_2$, башкача айтканда $B_1$, $B_2$ жана $B_3$ чекиттеринин ар бири (үч бурчтуктун жагынын тең ортосу, бийиктигинин негизи жана орто борбордон чокуга чейинки бийиктиктин кесиндисинин тең ортосу) $O_1$ чекиттен бирдей алыстыкта турушат. Ошондуктан $O_1$ борборунан $B_1$, $B_2$, $B_3$ чекиттери аркылуу айлана жүргүзүүгө болот. Калган алты чекиттин ($A_1$, $A_2$, $A_3$, $C_1$, $C_2$, $C_3$) ар бири дал ушул айланада жата тургандыгын ушундай жол менен далилдөөгө болот.

Э с к е р т ү ү. $ONB$ үч бурчтугунда $NO_1=O_1O$ жана $NB_3=B_3B$ болгондуктан $O_1B_3$ кесиндиси ушул үч бурчтуктун орто сызыгы болот, демек $O_1B_3=\frac{1}{2}OB$, башкача айтканда тогуз чекиттин айланасы деп аталуучу айлананын радиусу ($O_1B_3$) берилген үч бурчтукка сырттан сызылуучу айлананын радиусунун ($O_1B$) жарымына барабар.

**16.** Тар бурчу $15^\circ$ болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин көбөйтүндүсү анын гипотенузасынын жарымынын квадратына барабар экендигин далилдегиле.



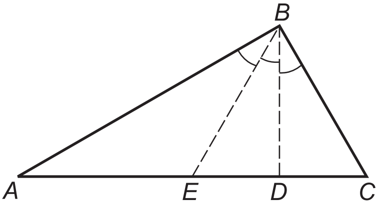
193-сүрөт.

Д а л и л д ө ө. Катеттери $a$ жана $b$, гипотенузасы $c$ болгон $ABC$ тик бурчтуу үч бурчтугун алып (193-сүрөт), мында $ab=(\frac{c}{2})^2$ экендигин далилдөө үчүн бул үч бурчтукту өзүнө барабар болгон $A_1BC$ үч бурчтугу менен кошумчалап $A_1BA$ тең капталдуу үч бурчтугуна ээ болобуз. Мында $\angle A_1BA=30^\circ$, анткени $\angle CBA=15^\circ$ экендиги берилген. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагына $AD$ бийиктигин түшүрүп $S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1B\cdot AD=\frac{1}{2}c\cdot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}$ экендигине ээ болобуз, анткени $A_1B=c$, $AD=\frac{c}{2}$. Экинчи жактан алганда ушул эле үч бурчтуктун аянты $S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1A\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot a=ab$. Мына ошентип, $ab=\frac{c^2}{4}$ экендиги келип чыгат.

**17.** Эгерде үч бурчтуктун бир чокусунан жүргүзүлгөн медианасы мене бийиктиги, анын ошол чокудагы бурчун үч барабар бөлүккө бөлө турган болсо, анда ал тик бурчтуу үч бурчтук боло тургандыгын далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. $ABC$ үч бурчтугунун $AC$ жагына $BE$ медианасын ($AE=EC$) жана $BD$, бийиктигин ($BD\perp AC$) жүргүзөбүз (194-сүрөт).

Маселенин шарты боюнча $\angle ABE\leftrightarrow\angle EBD\leftrightarrow==\angle DBC$. $EBC$ үч бурчтугунда $BD$ — бийиктик да жана биссектрисасы да болуп жаткандыктан тик бурчтуу үч бурчтуктардын барабардыгынан $ED=DC$ экендиги келип чыгат. $AE=EC=2ED=2DC$. $ABD$ үч бурчтугунун $BE$ биссектрисасынын касиети боюнча $AB:BD=AE:ED= =2ED:ED=2:1=2$. Демек, $AB=2BD$. $ABD$ үч бурчтугу тик бурчтуу жана $AB=2BD$, демек $\angle BAD=30^\circ$ жана $\angle ABD=60^\circ$. $BE$ кесиндиси $ABD$ бурчунун биссектрисасы боло тургандыктан $\angle ABE=\angle EBD=30^\circ$, демек $\angle DBC=30^\circ$, башкача айтканда $\angle ABC=90^\circ$ болот.

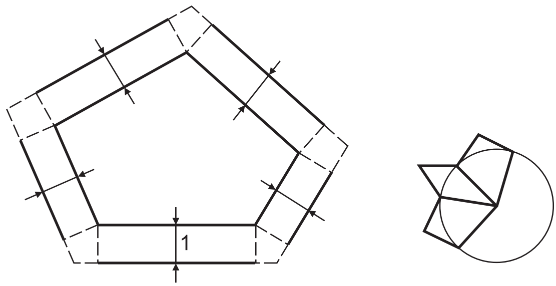


194-сүрөт.

**18.** Периметри 12 бирдикке барабар болгон томпок көп бурчтуктун бардык жактары өз өзүнө параллель бойдон көп бурчтуктун сыртын көздөй бир бирдикке жылдырылат. Бул учурда көп бурчтуктун аянты эң кеминде 15 бирдикке чоңоё тургандыгын далилдегиле.

Д а л и л д ө ө. Берилген көп бурчтуктун сыртын көздөй анын жактарынын ар бирин өз өзүнө параллель кылып жылдыралы, мында жактары ички жана тышкы окшош эки бурчтуктардын жактары менен чектелген шакекче пайда болот (195-сүрөт).

Мына ушул шакекченин аянты 15 бирдиктен кем болбой тургандыгын далилдөөгө тийишпиз. Бул шакекченин аянты бийиктиги 1ге барабар болгон негиздеринин жалпы узундугу



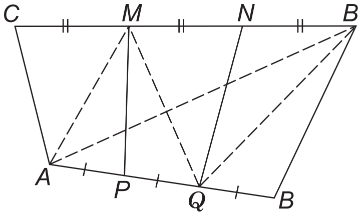
195-сүрөт.

12 болгон тик бурчтуктардын аянттарынын суммасынан (демек 12 бирдиктен) жана көп бурчтуктун бурчтарындагы кичинекей төрт бурчтуктардын аянттарынын суммасынан турат. Бул кичинекей төрт бурчтуктардын бардыгын жалпы бир чокуга $O$ чекитинин айланасына бириктире жылдырсак, алар өз ара кандайдыр бир көп бурчтукту түзүшөт. Бул көп бурчтуктун аянты $O$ борборунан жүргүзүлүүчү радиусу 1 болгон тегеректин аянтынан чоң. Радиусу 1 болгон тегеректин аянты $\pi r^2=\pi=3{,}14$.

Демек, шакектин аянты 12+3, 14=15, 14 бирдиктен чоң, башкача айтканда периметри 12 болгон томпок көп бурчтуктун жактарынын ар бирин өз өзүнө параллель кылып көп бурчтуктун сыртын көздөй жылдырганда анын аянты эң кеминде 15 бирдикке чоңоёт.

**19.** $ABCD$ томпок төрт бурчтугунун $AB$ жана $CD$ жактарынын ар бири үч барабар бөлүккө бөлүнгөн (196-сүрөт).

$CM=MN=ND$, $AP=PQ=QB$. $MNPQ$ төрт бурчтугунун аянты $ABCD$ төрт бурчтугунун аянтынын $\frac{1}{3}$ бөлүгүн түзө тургандыгын далилдегиле.



196-сүрөт.

Д а л и л д ө ө. Чокулары жалпы, бирок биринин негизи экинчисинин негизинен үч эсе кичине болгондуктан:

$$S_{ACM}=\frac{1}{3}S_{ACD} \text{ жана } S_{BQD}=\frac{1}{3}S_{ABD},$$
$$S_{ABDC}=S_{ABD}+S_{ACD},$$

демек

$$S_{ADQ}=\frac{2}{3}S_{BDA};\ S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ACD}.$$

Бул акыркы эки барабардыкты мүчөлөп кошсок:

$$S_{ADQ}+S_{AMD}=\frac{2}{3}(S_{DBA}+S_{ACD}).$$

$$S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ABDC},$$

$$S_{PMQ}=\frac{1}{2}S_{AMQ},\ S_{MQN}=\frac{1}{2}S_{MQD}.$$

Бул акыркы эки барабардыкты мүчөлөп кошсок

$$S_{PMQ}+S_{MQN}=S_{MNPQ}$$

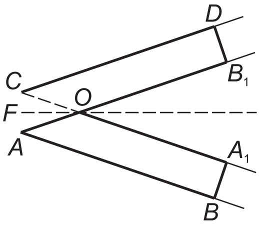
жана

$$\frac{1}{2}S_{AMQ}+\frac{1}{2}S_{MQD}=\frac{1}{2}(S_{AMQ}+S_{MQD})=\frac{1}{2}S_{AMDQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ABDC}=\frac{1}{3}S_{ABDC}$$

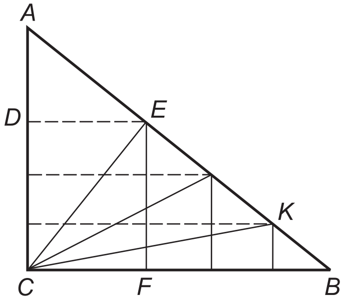
боло тургандыктан $S_{MNQP}=\frac{1}{3}S_{ABDC}$ экендиги келип чыгат.

**20.** Чокусу барак кагаздын сыртында жаткан бурчтун биссектрисасын жүзгүзгүлө.

Ч ы г а р у у. Маселени чыгаруу үчүн бурчтун $AB$ жагынын каалаган чекитинен анын $CD$ жагына параллель кылып $AB_1$ түз сызыгын жүргүзөбүз (197-сүрөт). $CD$ жагынан каалаган $D$ чекитинен $AB_1$ ге перпендикуляр кылып $DB_1$ кесиндисин жүргүзөбүз. $AB$ жагынын каалаган $B$ чекитинен $AB$ га перпендикулярдуу болгон $BA_1=DB_1$ кесиндисин ченеп коёбуз да $A_1$ чекити аркылуу $A_1B$ га перпендикулярдуу болгон түз сызык жүргүзөбүз, ал перпендикулярдуу түз сызыктын $AB_1$ менен кесилишинен пайда болгон $O$ бурчунун биссектрисасы берилген бурчтун да биссектрисасы болот, анткени $COAE$ төрт бурчтугу ромб болуп эсептелет.



197-сүрөт.



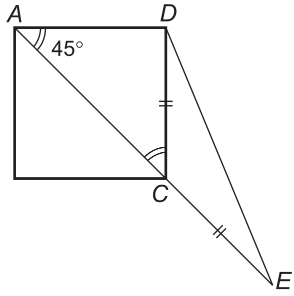
198-сүрөт.

**21.** Берилген тик бурчтуу үч бурчтукка чокусу тик бурчтуу үч бурчтуктун тик бурчу менен дал келгидей кылып диагоналы эң кичине болгон тик бурчтукту ичтен кандайча сызууга болот?

Ч ы г а р у у. Тик бурчтуу $ABC$ үч бурчтугуна бир нече тик бурчтуктарды ичтен сызалы (198-сүрөт). Бул тик бурчтуктардын ичинен бизге диагоналы эң кыскасы керек. $C$ чокусунан жүргүзүлүүчү мындай тик бурчтуктардын диагоналдары $AB$ гипотенузасына жүргүзүлүүчү кесиндилер болот. Албетте, мындай кесиндилердин эң кыскасы $C$ чокусунан $AB$ га түшүрүлгөн перпендикуляр болуп эсептелет. Ошондуктан изделүүчү тик бурчтукту ичтен сызуу үчүн адегенде $CE\perp AB$ ны жүргүзүп, $E$

чекити аркылуу үч бурчтуктун катеттерине параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Мына ошондон пайда болгон $DEFC$ изделүүчү тик бурчтук болот, анткени анын диагоналы $CE$ (перпендикуляр) башка ар кандай тик бурчтуктун диагоналынан (жантык сызыктан) кыска.

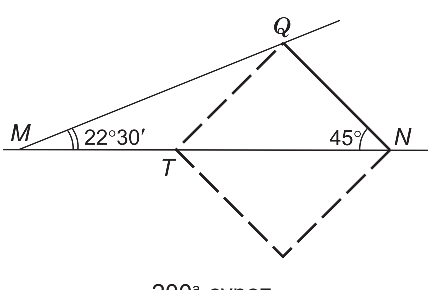
**22.** Диагоналы менен жагынын суммасы боюнча квадрат түзгүлө.



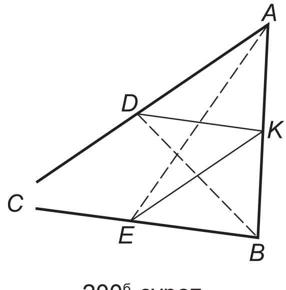
199-сүрөт.

Ч ы г а р у у. Маселе чыгарылды деп эсептейли, башкача айтканда изделүүчү квадрат $ABCD$ болсун дейли (199-сүрөт). $AC$ диагоналынын уландысына квадраттын жагын ченеп коебуз ($CE=CD$) да, пайда болгон $E$ чекитти $D$ чокусу менен туташтырабыз. $CDE$ — тең капталдуу үч бурчтугунун тышкы бурчу $ACD=45^\circ$ болгондуктан анын негизиндеги бурчтарынын ар бири $\angle DEC=\angle EDC=22^\circ 30'$ болот. Мында $AE=AC+CD$. Ошентип, берилген маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын түзүүгө мүмкүндүк алабыз.

Эркибизче алынган түз сызыктын үстүнө изделүүчү квадраттын диагоналы менен жагынын суммасына барабар болгон кесиндини ченеп коюп, дал ошол кесиндиге жанаша жаткан бурчтарынын бири $22^\circ 30'$, экинчиси $45^\circ$ болгудай $MNQ$ үч бурчтугун түзөбүз (200[а]-сүрөт)). Мына ушул үч бурчтуктун $22^\circ 30'$ тук бурчуна карама-каршы жаткан $QN$ жагы изделүүчү квадраттын жагы болуп эсептелет. Же болбосо $Q$ чекитинен $NQ$ га перпендикулярдуу кылып $QT$ ны жүргүзөбүз. Пайда болгон $QTN$ тик бурчтуу үч бурчтугун квадратка толуктап, изделүүчү квадратка ээ болобуз.

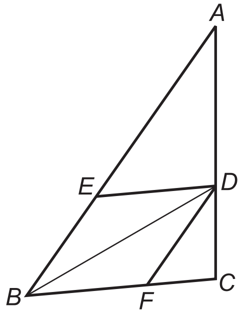


200[а]-сүрөт.

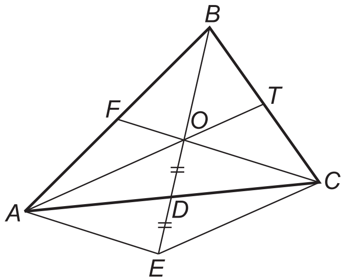


200[б]-сүрөт.

**23.** $C$ чокусу чиймеге батпай калган $ABC$ үч бурчтугунун $A$ жана $B$ чокуларынын медианаларын жүргүзгүлө (200[б]-сүрөт).




201-сүрөт.




202-сүрөт.

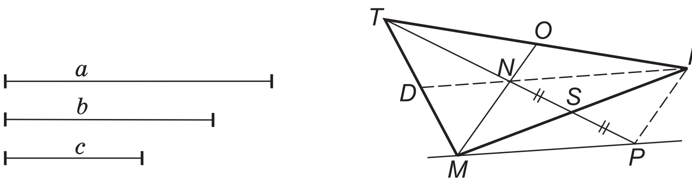
Ч ы г а р у у. $AB$ жагын $K$ чекитинде тең экиге бөлөбүз ($AK=KB$), $K$ чекити аркылуу $BC$ жагына параллель кылып $KD$ түз сызыгын, $AC$ жагына параллель кылып $KE$ түз сызыгын жүргүзөбүз. Мында $D$ жана $E$ чекиттери үч бурчтуктун $AC$ жана $BC$ жактарынын тең ортолору болушат. Демек $AE$ жана $BD$ үч бурчтуктун медианалары болушат.

**24.** Берилген $ABC$ үч бурчтугуна $ABC$ бурчу жалпы болгудай кылып ромбду ичтен сызгыла (201-сүрөт).

Ч ы г а р у у. $ABC$ бурчунун $BD$ биссектрисасын жүргүзөбүз да, $D$ чекити аркылуу $BC$га параллель болгон $DE$ни, $AB$га параллель болгон $DF$ти жүргүзөбүз. Натыйжада изделүүчү $DEBF$ ромбуна ээ болобуз, анткени түзүү боюнча бул төрт бурчтук параллелограмм жана анын диагоналы карама-каршы бурчтарынын биссектрисасы болуп эсептелет.

**25.** Үч медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Маселени чыгаруу үчүн адегенде анын шартын төмөндөгүчө талдап көрөлү. Үч бурчтук түзүлдү дейли, ал $ABC$ болсун (202-сүрөт). Бул үч бурчтуктун медианаларынын бирин, мисалы, $BD$ ны анын узундугунун $\frac{1}{3}$ не созобуз да пайда болгон $E$ чекитин $A$ жана $C$ чокулары менен кесиндилер аркылуу бириктиребиз. $AD=DC$ жана $OD=DE$ болгондуктан $AOCE$ төрт бурчтугу диагоналдары кесилишкен чекитинде тең экиге бөлүнүүчү төрт бурчтук, башкача айтканда, параллелограмм болот. Ошондуктан $AE=OC=\frac{2}{3}CF$ болот. $AOE$ үч бурчтугунун ар бир жагы изделүүчү үч бурчтуктун медианаларынын бирөөнүн $\frac{2}{3}$ бөлүгүнө барабар экендиги көрүнүп турат. Мындан төмөндөгүдөй түзүү келип чыгат. Мисалы, бизге үч бурчтуктун үч медианасы ($a$, $b$, $c$ — кесиндилери) берилди дейли (202[а]-сүрөт).



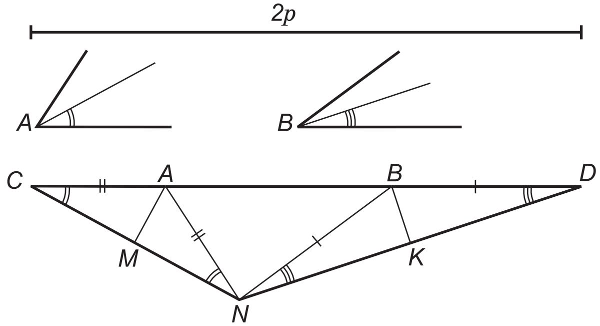

202ᵃ-сүрөт.

Жактары дал ушул медианалардын ден бөлүктөрүнө барабар болуучу $MNP$ үч бурчтугун анын үч жагы боюнча түзөбүз: $MP=\frac{2}{3}a$, $MN=\frac{2}{3}c$, $PN=\frac{2}{3}b$, $MN$ кесиндисин $NQ=\frac{1}{3}c$ кесиндисине созобуз. $PN$ кесиндисин $S$ чекитинде тең экиге бөлүп, $S$ чекитинен $ST=b$ кесиндисин $PN$ дин багыты боюнча ченеп коёбуз. $T$ жана $Q$ чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп, анын үстүнө $QK=TQ$ кесиндисин ченеп коёбуз. $M$ чекитин $T$ жана $K$ чекиттери менен кесиндилер аркылуу бириктирип, натыйжада изделүүчү $MTK$ үч бурчтукка ээ болобуз. Чындыгында эле түзүү боюнча бул үч бурчтуктун бир медианасы $ST=b$, экинчи медианасы $MQ=MN+NQ=\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}c=c$ үчүнчү медианасы $KD=KN+NK=MP+NK=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=a$.

**26.** Берилген периметри жана негизиндеги эки бурчу боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Маселенин шартын кыскача анализдеп чыгуу максатында адегенде бул маселени чыгарылды, башкача айтканда, үч бурчтук түзүлдү деп болжолдойлу. Эгерде ал үч бурчтуктун негизин анын каптал жактарына барабар болгон кесиндилерге эки жагын көздөй созо турган болсок, жана келип чыккан чекиттерди берилген үч бурчтуктун чокусу менен туташтыра турган болсок, анда берилген маселенин чыгарылышы негизи изделүүчү үч бурчтуктун периметрине, ал эми негизиндеги бурчтары болсо ошол эле изделүүчү үч бурчтуктун негизиндеги бурчтардын жарымдарына барабар болуучу $CDN$ үч бурчтугун түзүүгө келтирилет (203-сүрөт), анткени $CA+AB+BD=2p$, $AC+AN$, $BN=BD$. $\angle ACD=\angle ANC=\frac{1}{2}\angle BAN=\frac{1}{2}\angle A$

$\angle BND=\angle BDN=\frac{1}{2}\angle ABN=\frac{1}{2}\angle B$. $CM=MN$, $NK=KD$ болгондуктан берилген маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот. Берилген негизи ($2p$) жана ошол негизиндеги бурчтары ($\frac{1}{2}\angle A$ жана $\frac{1}{2}\angle B$) боюнча үч бурчтук түзөбүз ($CDN$). Ал үч бурчтуктун каптал жактарынын тең ортолорунан аларга




203-сүрөт.

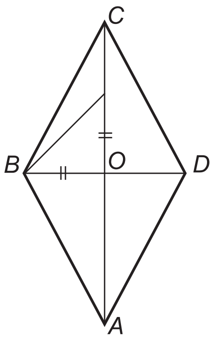
перпендикулярлар тургузабыз. Ошол перпендикулярлардын үч бурчтуктун негизи ($CD$) менен кесилишкен чекиттери изделүүчү үч бурчтуктун калган эки чокусун ($A$ жана $B$ чокуларын) беришет.

**27.** Диагоналы менен негизинин арасындагы бурчу жана диагоналдарынын суммасы боюнча ромб түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Маселенин шартын төмөндөгүчө анализдейбиз. Изделүүчү ромб $ABCD$ болсун дейли (204-сүрөт), анда $AC+BD=a$, $\angle BAC=\alpha$ болсун. $O$ чекитинен баштап $OC$ нын үстүнө $OB$ кесиндисин ченеп коёбуз, анда

$$AE=AO+OE=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}a;\ \angle BEO=45^\circ$$

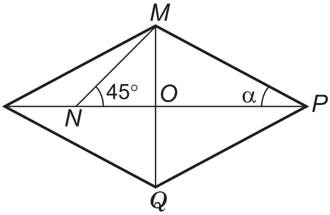
болот.




204-сүрөт.

Демек, $BAE$ үч бурчтугунун $AE$ негизи берилген кесиндинин жарымына барабар, негизиндеги бир бурчу $45^\circ$, экинчи бурчу болсо берилген $\alpha$ бурчуна барабар, $BO$ болсо ошол негизге түшүрүлгөн үч бурчтуктун бийиктиги, ал ромбдун кыска диагоналынын жарымын түзөт. Ошондуктан изделүүчү ромбду түзүү үчүн адегенде негизи берилген кесиндинин жарымына (изделүүчү ромбдун диагоналдарынын жарым суммасына) барабар болгон, негизиндеги бурчтарынын бири $45^\circ$, экинчиси берилген бурчуна барабар болгон кандайдыр бир $MNP$ үч бурчтугун түзөбүз (205-сүрөт).

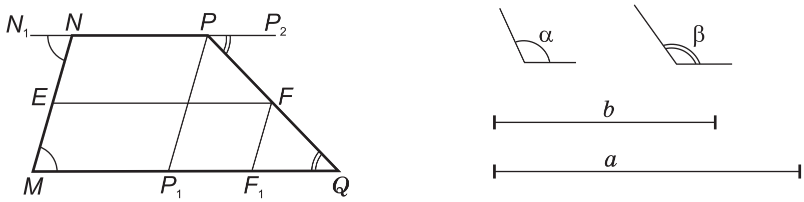
Мында анын негизи $NP=\frac{1}{2}a$; негизиндеги $\angle MNP=45^\circ$, $\angle NPM=\alpha$. $M$ чокусунан $NP$ негизине бийиктик түшүрөбүз, анын негизи $O$ изделүүчү ромбдун борбору болот. $OM$ болсо ошол ромбдун диагоналынын жарымы болот. $MO$ ну $O$ чекитинен ары көздөй өзүнүн узундугунча созобуз да пайда болгон $Q$ чекитин $P$ чокусу менен бириктиребиз. $MPQ$ үч бурчтугун $MQ$ га салыштырмалуу симметриялуу түрдө ромбго толуктайбыз.




205-сүрөт.

**28.** Берилген чоң негизи, орто сызыгы жана кичине негизиндеги бурчтары боюнча трапеция түзгүлө.

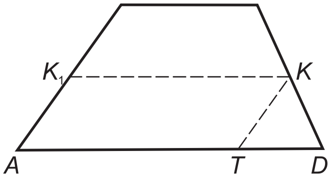
Ч ы г а р у у. Изделүүчү трапеция $MNPQ$ болсун дейли (206-сүрөт), анда анын $MQ=a$ негизи, $EF=b$ орто сызыгы жана $\angle MNP=\alpha$, $\angle NPQ=\beta$ бурчтары белгилүү болот. $\angle N_1NM=\angle NMQ=$ $=180^\circ-\alpha$, $\angle P_2PQ=\angle PQM=180^\circ-\beta$ ; $FF_1Q$ үч бурчтугунда $F_1Q=MQ-$ $-EF=a-b$, $\angle FF_1Q=180^\circ-\alpha$ , $\angle FQF_1=180^\circ-\beta$ . Мына ушундан түзүүнүн төмөндөгүдөй планы келип чыгат.




206-сүрөт.

Адегенде $DKT$ үч бурчтугун курабыз ($TD=a-b$, $T=180^\circ-\alpha$. $D=180^\circ-\beta$).

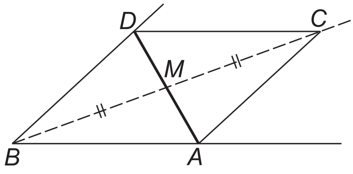
$D$ чекитинен баштап $T$ ны көздөй $DT$ нын үстүнө $DA=a$ ны ченеп коебуз да $A$ чекити аркылуу $TK$ га параллель болгон $AB$ ны жүргүзөбүз. $DK$ жагынын уландысына $KC=KD$ кесиндисин ченеп коебуз (206ᵃ-сүрөт). $C$ чекити аркылуу $DA$ га параллель түз сызык жүргүзөбүз, ал $AB$ менен $B$ чекитинде кесилишет, натыйжада $ABCD$ трапециясы келип чыгат. Мунун өзү изделүүчү трапеция болот, анткени түзүү боюнча анын чоң негизи $DA=a$, орто сызыгы $KK_1=b$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$ .




206ᵃ-сүрөт.

**29.** Кандайдыр бурчтун ичинен $M$ чекити берилген. Бурчтун жактарынын арасындагы кесинди $M$ чекитинде тең экиге бөлүнгөндөй кылып $M$ чекити аркылуу түз сызык жүргүзгүлө.

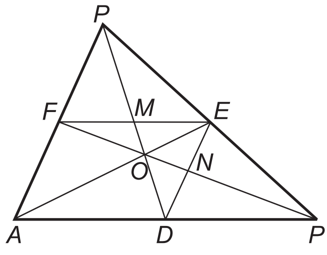
Ч ы г а р у у. Берилген $B$ бурчунун ичинен каалаган $M$ чекитин алып аны бурчтун чокусу менен түз сызык аркылуу бириктиребиз (207-сүрөт). $BM$ түз сызыгынын үстүнө $M$ чекитинен баштап $MC=MB$ кесиндисин ченеп коёбуз. $C$ чекити аркылуу бурчтун жактарына параллель түз сызыктар жүргүзөбүз. Пайда болгон $ACDB$ параллелограммдын $AD$ диагоналы изделүүчү түз сызыктын кесиндиси болот, анткени $DM=MA$.



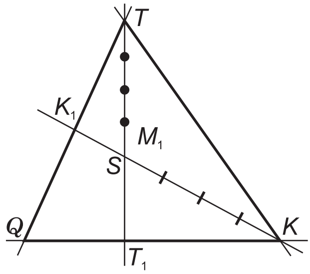
207-сүрөт.

**30.** Берилген оордук борбору (медианаларынын кесилишкен чекити) жана эки орто сызыгынын тең ортоңку чекиттери боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Маселе чыгарылды, анын шартын канааттандыруучу үч бурчтук $ABC$ болсун дейли. (208-сүрөт). Үч бурчтуктун оордук борбору анын медианасын 1:2 катышында бөлө тургандыктан, мисалы, $OD{:}OB=1{:}2$ болот. Үч бурчтуктун орто сызыгы болсо медиананы тең экиге бөлөт (буга үч бурчтуктун орто сызыктарынын жардамы менен түзүлгөн $AFED$ жана $ECDF$ параллелограммдарынан жеңил эле ишенүүгө болот), ошондуктан $BM=MD$ жана $FN=NC$ болот. $BM=\frac{1}{2}BD$, $OD=\frac{1}{3}BD$ болгондуктан $OM=MD-OD=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{3}BD=\frac{1}{6}BD$, демек $OM$ кесиндиси $BD$ кесиндисинин $\frac{1}{6}$ бөлүгүн, $BM$дин $\frac{1}{3}$ бөлүгүн, $OD$ нын $\frac{1}{2}$ бөлүгүн түзөт.



208-сүрөт.



209-сүрөт.

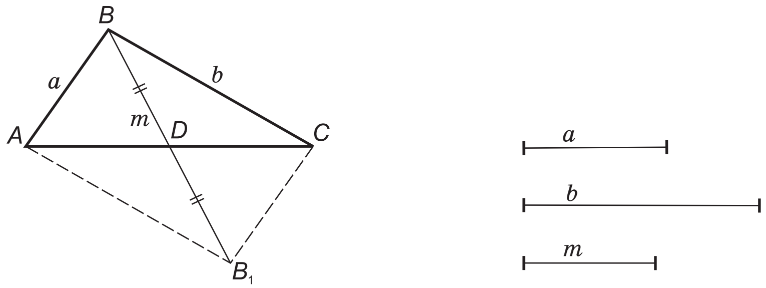
Ушул эле сыяктуу О$N$ кесиндиси да $FC$ медианасынын $\frac{1}{6}$ бөлүгүн, $NC$ тин $\frac{1}{3}$ бөлүгүн жана $OF$ тин $\frac{1}{2}$ бөлүгүн түзө тургандыгын көрүүгө болот. Мындан тышкары, ар кандай үч бурчтукта анын оордук борбору жана эки орто сызыгынын тең ортоңку чекиттери бир түз сызыкта жатышпай тургандыгын көрүүгө болот. Мына ушул айтылгандардын негизинде маселени чыгаруунун төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот.

Бир түз сызыкта жатпаган каалаган үч чекит алабыз, алардын бири ($S$ чекити) изделүүчү үч бурчтуктун оордук борбору; калган экөө ($M_1$ менен $N_1$) ошол эле үч бурчтуктун орто сызыктарынын тең ортолору болушсун (209-сүрөт). $M_1$ жана $S$ чекиттери аркылуу түз сызыктын үстүнө $M_1$ ден баштап $SM_1$ багыты боюнча $M_1T=3SM_1$ кесиндисин ченеп коёбуз. $M_1$ ден баштап $M_1S$ багыты боюнча $M_1T_1=M_1T$ ны ченеп коёбуз.

Ошол эле сыяктуу $S$ жана $N_1$ чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп, анын үстүнө $SN_1$ багыты боюнча $N_1$ ден баштап $N_1K_1=3SN_1$, кесиндисин ченеп коюп, андан кийин $N_1S$ багыты боюнча $N_1$ ден баштап $N_1K_1=N_1K$ кесиндисин ченеп коёбуз. $K_1$ жана $T$ чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзүп анын үстүнө $TK_1$ боюнча $K_1$ ден баштап $K_1Q=K_1T$ кесиндисин ченеп коёбуз. Пайда болгон $T$, $K$ жана $Q$ чекиттери изделүүчү үч бурчтуктун чокулары болушат.

**31.** Бир чокусунан чыккан эки жагы жана медианасы боюнча үч бурчтук түзгүлө.

Ч ы г а р у у. Изделүүчү үч бурчтук $ABC$ болсун дейли (210-сүрөт), башкача айтканда үч бурчтуктун $AB$, $BC$ жагы жана $BD$ медианасы берилген кесиндилерге ($a$, $b$, $m$) барабар болушсун.

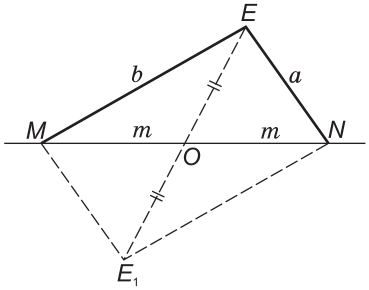



210-сүрөт.

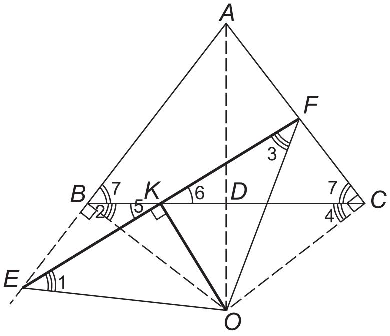
$BD$ медианасын $D$ чекитинен ары созуп, анын үстүнө $DB_1=DB$ кесиндисин ченеп коёбуз. $B_1$ чекитин $A$ жана $C$ чекиттери менен бириктирип, диагоналдары кесилишкен чекитинде тең бөлүнүүчү $ABCB_1$ ($AD=DC$, анткени $BD$ — медиана, $DB=DB_1$ түзүү боюнча) төрт бурчтугуна ээ болобуз. Демек $ABCB_1$ төрт бурчтугу параллелограмм болот, ошондуктан $AB=CB_1$ экендиги келип чыгат. Ошентип, жактарынын барабардыгы боюнча

$\Delta ABB_1=\Delta BB_1C$ болот. Мындан изделүүчү үч бурчтукту түзүүнүн төмөнкүдөй планын белгилөөгө болот. Берилген үч жагы боюнча $ABB_1$ үч бурчтугуна барабар болгон үч бурчтук түзөбүз.

Эркибизче алынган түз сызыкка берилген медианадан эки эсе чоң болгон кесиндини ($MN=2m$) ченеп коёбуз (210ᵃ-сүрөт). $M$ чекитин борбору кылып алып $a$ радиустуу, $N$ чекитин борбор кылып алып $b$ радиустуу айланалар жүргүзүп, алардын кесилишкен чекитин $E$ деп белгилейбиз. $E$ чекити менен $MN$ дин тең ортосу болгон $O$ чекити аркылуу түз сызык жүргүзүп, $EO$нун $O$дон аркы уландысына $OE_1=OE$ кесиндисин ченеп коёбуз да $MENE_1$ параллелограммына ээ болобуз. Мындагы $MEE_1$ же $NEE_1$ үч бурчтуктарынын каалаганы изделүүчү үч бурчтукту берет.




210ᵃ-сүрөт.




211-сүрөт.

**32.** *Конструктивдүү маселе*. Тең капталдуу $ABC$ үч бурчтугу берилген, анын $AB$ жана $AC$ жактары барабар. Мындан тышкары төмөнкү үч маалымат белгилүү:

1) $BC$ кесиндисинин тең ортоңку чекити $D$, $AD$ түз сызыгынан $OB$ жана $AB$ түз сызыктары өз ара перпендикулярдуу болгондой $O$ чекити тандалып алынган;

2) $BC$ кесиндисинен эркибизче алынган $K$ чекит $B$ жана $C$ чекиттеринен айырмалуу;

3) $E$ чекити $AB$ түз сызыгында, $F$ чекити $AC$ түз сызыгында жатат, мындагы $E$, $K$ жана $F$ чекиттери бир түз сызыкта жатышкан ар башка чекиттер.

$KE=KF$ болгондо жана ошол учурда гана $OK$ жана $EF$ түз сызыктары өз ара перпендикулярдуу боло тургандыгын далилдегиле.

Ч ы г а р у у. Маселенин шартына ылайык келе тургандай чиймени чиели (211-сүрөт).

Мында $AB=AC$, $BD=DC$, $\angle ABD=\angle ACD=\angle 7$, $OB\perp AB$.

1) $OK \perp EF$ болсун дейли да $EK=KF$ экендигин далилдейбиз. Маселенин шартынан ошондой эле $OC=OB$ жана $OC \perp AC$ экендиги келип чыгат. $OKE$ жана $OBE$ тик бурчтуу үч бурчтуктарын карап көрөлү, $OE$ — алардын жалпы гипотенузасы. Алардын ар бирине диаметри $OE$ болгон сырттан айлана сызууга болот. Демек $OKBE$ төрт бурчтугуна жалпы бир айлананы сырттан сызууга болот, анда $\angle OEK=\angle OBK$; Ошол эле сыяктуу $OCFK$ төрт бурчтугуна да ошондой эле бир айлананы сырттан сызууга болот (башкача айтканда жалпы гипотенузасы $OF$ болгон $OKF$ жана $OCF$ тик бурчтуу эки үч бурчтукка жалпы сырттан айлана сызабыз). Анда $\angle OFK=\angle OCK$ болот. Натыйжада айланага ичтен сызылган жана бир эле $OK$ хордасына таянган бурчтар катары төмөнкү төрт бурч өз ара барабар болушат:

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$. Мына ошентип $OEK$ жана $OFK$ тик бурчтуу үч бурчтуктары барабар болушат, анткени $OK$ кесиндиси алардын жалпы катети жана $\angle 1=\angle 3$. Мындан $EK=KF$ экендиги келип чыгат, башкача айтканда талап кылынган далилденди.

2. Эми, тескерисинче, $EK=KF$ болсо, анда $OK$ $KF$ боло тургандыгын далилдейли. Вертикалдык бурчтар болгондуктан $\angle 5=\angle 6$.

$BKE$ жана $CKF$ үч бурчтуктарын карап көрөлү. Синустардын теоремасы боюнча $BKE$ үч бурчтугунан $\frac{EK}{\sin}=\frac{EB}{\sin}$ ке жана $CKF$ үч бурчтугунан $\frac{KF}{\sin}=\frac{FC}{\sin}$ га ээ болобуз, бирок $\angle 5=\angle 6$ жана $\angle ЕВД=180^\circ-\angle 7$ болгондуктан акыркы эки пропорцияны төмөндөгүчө жаза алабыз:

$$\frac{EK}{\sin}=\frac{EB}{\sin};\quad \frac{KF}{\sin}=\frac{FC}{\sin}\quad \text{же}\quad \frac{EK}{\sin}=\frac{EB}{\sin}$$

жана

$$\angle 5=\angle 6;\ \sin(180^\circ-\angle 7)=\sin\angle 7$$

болгондуктан

$$\frac{EK}{\sin}=\frac{EB}{\sin},\quad \frac{KF}{\sin}=\frac{FC}{\sin}$$

эгерде $EK=KF$ болсун деген шартты эске алсак анда бул эки барабардыктан $\frac{EB}{\sin}=\frac{FC}{\sin}$, мындан $EB=FC$ экендиги келип чыгат.

Эми $EBO$ жана $FCO$ тик бурчтуу үч бурчтуктарын алып карай турган болсок, анда алардын катеттери барабар: $EB=FC$; $OB=OC$ жана $\angle OBE=\angle OCF=90^\circ$. Бул үч бурчтуктардын барабардыгынан алардын гипотенузаларынын $OE=OF$ экендиги келип чыгат.

Мына ошентип тең капталдуу $OEF$ үч бурчтугундагы $OK \perp EF$ болот. Талап кылынган далилденди.

# Ж О О П Т О Р

## 7-КЛАСС

### *I глава*

**§ 1.**

**13.** б) 6; в) $B \in ND$, $B \in AC$; г) жатпайт. **14.** а) үч; б) үч. $M \notin NP$. **16.** Төрт. **17.** Төрт. **18.** *CA* жана *CE*; *DB* жана *DA*. **19.** *OA* менен *CD* кесилишет. *OA* менен *EF* жана *CD* менен *EF* кесилишпейт. **20.** а) 10; б) *E, C, A* бир жагында, *B* экинчи жагында жатат. *E* менен *B*, *C* менен *B*, *A* менен *B* чекиттери *D* нын ар түрдүү жактарында жатышат. **21.** а) 3; б) 12. 25. а) кесилишет; б) кесилишпейт. **26.** 7 бөлүккө.

**§ 2.**

**2.** Чекит. **4.** Тик бурчтуктун жана үч бурчтуктун. **5.** Болот. **6.** Болот. **10.** Чекит. **11.** *AB* шооласы. **13.** Болот. **16.** Болот. **17.** Болот. **18.** Чекит. **19.** 7 см. **20.** 4 см. **22.** Эки чекитте кесилишет. **23.** Бир. **24.** Жок. **26.** *Көрсөтмө. O* жана $O_1$ борборлору дал келгендей кылып беттештирүү керек.

**§ 3.**

**1.** Үч. **2.** а) үч; в) *MD*; г) *MN*. **3.** Алар барабар болушат. **4.** Беттештирүү аркылуу. **6.** *KL* жана *EF*. **7.** $AB=4$ дм; 8,8 см; 4 см. **9.** $EQ=5$ см 5 мм, $EQ>PE$. **12.** 1 дм. **13.** а) 7,5 см. **14.** 1,8 м. **15.** 7 м. **16.** 1,5 м. **17.** Жатпайт. **18.** $AB=1{,}1$; $AC=5{,}6$. **21.** $ABD>ACD$. **23.** 1345 км. 405 км ге азаят. **24.** а) Жатпайт; б) жатат; в) жатат. **25.** Болбойт. **26.** Берилген түз сызыктарды кошуп эсептегенде, бардыгы – 6.

**§ 4.**

**2.** Үч. **3.** а) *A, B*; б) *M. C, L*; в) *D, K*. **4.** а) *DK, AB*; б) *CM*; в) *BC, AL*. **5.** Жайылган бурчту түзөт. **6.** *Көрсөтмө. CO* шооласына толуктоочу шооланы сызгыла. **7.** Жайылган бурчту түзөт. Маселенин эки чыгарылышы бар, ал *OC* шооласынын кайсы жарым тегиздикте алынышына байланыштуу. **8.** а) Төрт; б) $\angle AOB$, $\angle BOA_1$, $\angle A_1OB_1$, $\angle B_1OA$; в) $\angle A_1OA_1$ жана $\angle BOB_1$. **9.** Тар. **10.** Тик. **11.** Тар. **12.** Тик. **13.** $\angle ABE=\angle ABC+\angle CBE$, $\angle ABE>\angle ABC$. **14.** $\angle CBE=\angle ABE-\angle ABC$, $\angle ABE>\angle CBE$. **18.** $\angle AOB$ – тар, $\angle CDE$ – тик, $\angle FKL$ – кең, $\angle MNP$ – жайылган бурч. **20.** 1) Тар; 2) Кең; 3) Кең; 4) Тик; 5) Жайылган бурч. **21.** 70°. **22.** 24°. **24.** 1) 135°; 2) 60°; 3) 162°. **26.** $\angle AOC=\angle COB=35°$. **28.** 130°, 130°, 50°. **31.** а) Каалаган жарым тегиздикте жатат, андай шоолалар чексиз көп; б) Учтары *OA*, *OB* шоолаларында жаткан кесиндини кесип өтөт, андай *OL* шоолалары чексиз көп жана алар *OB* шооласы жаткан жарым тегиздикте жатышат. **32.** 5) 45°; 6) 30°45′. **33.** б) 4°; 0,5°; 6°. **34.** а) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}$. **35.** а) 31°, 105°; б) 72°; 210°. **36.** 132°. **37.** 1) 58°, 122°; 2) 118°, 62°; 3) 45°, 135°; 4) 120°, 60°. **38.** а) 35°, 35°; б) 45°, 135°; в) 72°30′, 107°30′. **39.** а) 70°; б) 25°. **40.** 144° жана 36°. **43.** 30°; 40°; 50°; 60°. **44.** $1\frac{5}{8}d$ (мында $d=90°$). **47.** а) 180°; б) 60°. **48.** $\breve{AB}=45°$, $\breve{BC}=60°$; $\breve{AC}=150°$. **50.** а) 60°; б) 45°; в) 30°; г) 10°.

## *I главага карата маселердин жооптору*

**1.** 1) $B$; 2) $C$; 3) $B$ жана $C$. **2.** 1) 6; 2) $AB+BC+CD$; 3) $BC+CD$. **3.** 1) 4; 2) 4. **4.** Эки жолу жана бир жолу. **5.** 75° жана 15°. **6.** 20° жана 160°. **7.** 70° жана 110°. **8.** а) 50°; б) 90°. **10.** 140° жана 80°. **11.** 140°.

## *II глава*

**§ 5.**

**1.** а) $AB \parallel CD, AB \parallel ED$; б) $ON \parallel EM, OF \parallel EM$. **6.** Параллель. **7.** Болот. **8.** Болот, чексиз көп.

**§ 6.**

**1.** а) 85° жана 70°; б) 200° ; в) 15°. **3.** 65° жана 115°. **4.** 61°30′. **5.** 60°. **6.** а) Болот; б) Болот. **7.** $\angle B$ ту 58° ка чоңойтуу керек. **9.** 110° жана 70°.

**§ 7.**

**4.** $a$ жана $l$ түз сызыктары $B$ чекитинде кесилишсе, $AB$ кесиндисинин узундугу изделүүчү аралык болот. **8.** а) $AD \parallel BE \parallel CF$; б) $AD \perp AB$; $AD \perp AC$; $AD \perp BC$; ж. б. **10.** 43° жана 62°.

**§ 8.**

**1.** Параллель болбойт. **2.** а) $\angle BKL$ жана $\angle DLF$; $\angle EKA$ жана $\angle KLC$ ж. б. б) $\angle BKL$ жана $\angle AKE$; $\angle CLF$ жана $\angle BKE$ ж. б. **6.** 180°. **7.** 52°, 128° жана 128°. **8.** 135° жана 45°. **9.** 36° жана 144°. **10.** 43° жана 133°.

## *III глава*

**§ 9.**

**2.** 3 үч бурчтук. **3.** $KL<LF+FK$, $LF<FK+KL$, $FK<KL+LF$. **4.** а) мүмкүн; б) мүмкүн эмес; в) мүмкүн; г) мүмкүн эмес. **5.** 18 см; 28 м. **6.** а) 268 м; б) 308 м. **10.** мүмкүн эмес. **11.** 126 дм.

**§ 10.**

**1.** а) мүмкүн эмес; б) мүмкүн; в) мүмкүн эмес. **2.** а) 100°; б) 90°; в) 9°. **3. 72**°; 80°; 28°. **4.** 35°; 80°; 65°. **5.** 60°; 50°; 70°. **6.** 80°; 40°; 60°. **7.** 84°. **8.** 15°. **9.** 60°. **10.** 70°; 20°; 90°. **11.** 80°. **12.** 70°. **13.** 95° жана 35°. **15.** $\angle A=40°$; $\angle B=60°$; $\angle C=80°$. **16. 60**°. **18.** 60°.

**§ 11.**

**9.** 20 см. **10.** 12 см.

**§ 12.**

**1.** а) 2), 4) учурлар; б) 3) учур; в) 1) учур. **2.** 1) 17см; 2) 21 см; 3) 15 см; 4) 31 дм. **3.** а) 26 см; б) 17 м. **4.** а) 7,3 дм; б) 10 дм; в) 6 дм; 6 дм; 8,6 дм; г) 9,5 дм; 9,5 дм; 1,6 дм. **5.** 18,6 см. **6.** 10,8 дм. **7.** 12 дм, 12 дм, 2 дм. **9.** 16 дм. **10.** 16 дм; 16 дм. **11.** 52°30′ жана 52°30′. **12.** 81°. **14.** 40°. **15.** 10°. **16.** 52°30′; 52°30′ жана 75°. **19.** 44°; 68°; 68° же 52°; 52°; 76°. **20.** а) 20°; 80°; 80°; б) 30°; 30°; 120°. **21.** а) $\angle B$; б) $\angle A=\angle C$. **24.** 1) 64°; 58°; 58° же 64°; 64°; 52°; 2) 80°; 50°; 50° же 80°; 80°; 20°.

**§13.**

**1.** 90°. **2.** 45°; 45°. **3.** 1) 72°; 2) 34°. **4.** а) 8 дм; б) 14 дм; в) 14 дм жана 7 дм. **5.** 9 м. **6.** а) 13 см; б) 2,4 дм жана 1,2 дм. **8.** 1) 7°; 2) 90°; 45°; 45°. **9.** $\angle B=90°$. **17.** 60°. **18.** 85°. **20.** 6,2 дм жана 6,2 дм. **21.** Тең капталдуу. **22.** 1) 12,4 дм; 2) 12,4 дм. **23.** 1) 8,2 дм; 2) 8,2 дм. **24.** 8,8 дм. **25.** 10,5 дм.

**§14.**

**1.** а) 90°; б) 45°. **2.** а) 180°; б) 90°. **3.** а) 120° жана 60°; б) 72°жана 36°. **4.** 19°. **5.** 140°. **6.** 40° жана 80°. **7.** а) 70° же 110°; б) 18° же 162°. **8.** 36°. **9.** 7,5 дм. **10.** 30° жана 150°. **11.** 100°. **12.** 30°. **13.** 110° жана 70°. **14.** 101°15′. **15.** 56°15′. **16.** 144°. **17.** 20°. **18.** 10°30′. **19.** 30°. **20.** 120° жана 60°. **21.** 33°20′. **22.** 108°; 60°; 12°.

**§15.**

**1.** 1) 2; 2) 1; 3) $OD<r$ болсо, кесилишпейт; $OD>r$ болсо, бир чекитте кесилишет. **2.** 1) 2; 2) 1; 3) болбойт. **4.** Эки жалпы чекитке ээ болот. **5.** 60° жана 120°. **6.** 9 дм жана 1 дм. **7.** 1,5 дм. **8.** 20 дм. **9.** 1) Сырттан жанышат; 2) ичтен жанышат; 3) бири экинчисинин сыртында жатат. **10.** $2(r+r_1+r_2)$ же $2r$ (эгерде $r$ радиустардын чоңу болсо).

## *III главага карата маселелердин жооптору*

**1.** Мүмкүн эмес. **2.** 116 дм. **3.** 30°; 60°; 90°. Тик бурчтуу үч бурчтук. **4.** 150°; 120°; 90°. **7.** 60°. **18.** а) 9 см; б) 9 см; в) 4,5 см жана 13,5 см. **19.** 60°. **20.** 67°30′ жана 112°30′. **21.** Үч бурчтуктун эки жагы 4, жарым айлана 3 барабар бөлүккө бөлүнөт. **24.** Эки жалпы чекитке ээ болушат. **25.** Тең жактуу.

## *IV глава*

**§16.**

**8.** Айлана. **9.** $AB$ кесиндисинин ортосу аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон түз сызык. **10.** Бурчтун биссектрисасы. **13.** а) Перпендикулярдуу эки түз сызык; б) Берилген түз сызыктарга параллель түз сызык.

**§18.**

**1.** $M$ чекитинен $l$ түз сызыгына чейинки аралык $d$ болсун. $a>d$ болсо, маселенин эки чыгарылышы, $a=d$ болсо, бир чыгарылышы болот. $a<d$ болсо, маселенин чыгарылышы болбойт. **2.** а) $a+b\geq AB$ болгондо; б) $a+b<AB$ болгондо. **4.** Айлана.

**§ 19.**

**4.** Берилген параллель эки түз сызыкка параллель түз сызык болот. **5.** Берилген түз сызыкка параллель эки түз сызык болот. **6.** Берилген бурчтун биссектрисасы болот.

**§ 20.**

**5.** Борбору гипотенузанын ортосунда жатат. **10.** Ичтен (сырттан) сызылган айланалардын борборлору дал келишет.

## **8-КЛАСС**

## *V глава*

**§ 21.**

**2.** 37 см. **4.** Мүмкүн эмес. **5.** 16 м. **7.** 12 дм, 15 дм, 24 дм, 6 дм. **8.** Мүмкүн эмес. **9.** 248°. **11.** 72°; 120°; 144°; 24°. **12.** $\angle A=72°$; $\angle B=84°$; $\angle C=94°$; $\angle D=108°$ болуп, $\angle A+\angle D=180°$ же $\angle B+\angle C=180°$, ошондуктан $AB\parallel DC$. **13.** 120°; 168°; 48°; 24°.

**§ 22.**

**2.** 1) 20 см; 2) 37 м. **3.** 1) 48 дм; 2) 52,8 дм; 3) 31 дм. **4.** а) 6,2 дм; б) 2,2 дм.

**5.** 1) 8 см жана 4 см; 2) 3 см жана 9 см; 3) 8 см жана 4 см. **6.** 1) 4 см жана 8 см; 2) 7,2 см жана 4,8 см. **7.** $42^\circ$; $138^\circ$; $42^\circ$; $138^\circ$. **8.** а) $97^\circ30'$ жана $82^\circ30'$; б) $86^\circ15'$ жана $93^\circ45'$; в) $120^\circ$ жана $60^\circ$. **14.** а) Мүмкүн эмес; б) мүмкүн эмес; в) мүмкүн; г) мүмкүн эмес. **15.** 12 дм жана 5 дм. **16.** 62 см. **17.** $64^\circ$ жана $116^\circ$.

**§ 22.1.**

**3.** а) 26 см; б) 50 дм. **4.** а) 55 м; б) 66 м; в) 75 м. **5.** а) 7,5 м жана 4,5 м; б) 5 м жана 7 м; в) 4 м жана 8 м. **6.** а) 4,8 дм жана 11,2 дм; б) 10 дм жана 6 дм. **7.** а) 3 м ге чоңоёт (кичиреет); б) 8 м ге чоңоёт (кичиреет); в) 2 эсе чоңоёт (кичиреет). **8.** $72^\circ$. **9.** $50^\circ$. **10.** 1,2 м. **12.** 20 см жана 12 см. **14.** 11 дм.

**§ 22.2.**

**2.** 26 дм. **3.** 9,1 м. **4.** $60^\circ$ жана $120^\circ$. **5.** $42^\circ$; $138^\circ$; $138^\circ$. **8.** $75^\circ$ жана $105^\circ$. **9.** $40^\circ$ жана $140^\circ$. **10.** $60^\circ$ жана $120^\circ$. **11.** $150^\circ$.

**§ 22.3.**

**3.** 30 см. **4.** 0,8 см. **7.** а) 18 см ге чоңоет; б) 12 см ге кичиреет; в) 3 эсе чоңоёт; г) 2 эсе кичиреет. **8.** 8 дм. **9.** 4 дм. **11.** а) Борбору диагоналдардын кесилишинде, радиусу диагоналдын жарымына барабар болот; б) Борбору диагоналдардын кесилишинде, радиусу диагоналдын жарымына барабар болот.

**§ 23.**

**2.** *Көрсөтмө*. Фалестин теоремасын пайдалангыла. **3.** а) Берилген кесиндинин бир учунан кошумча шоола жүргүзүп, ага бири-бирине барабар 4 кесиндини өлчөп коюп, андан кийин Фалестин теоремасын колдонуу зарыл; б) а) учуруна окшош. **5.** 4 дм. **6.** 3-маселенин чыгарылышына окшош.

**§ 24.**

**2.** 28 дм. **3.** 17 дм; 22 дм; 27 дм. **4.** $68^\circ$ жана $115^\circ$. **5.** Мүмкүн эмес. **8.** 46 см. **9.** $62^\circ$ жана $112^\circ$. **10.** а) Эки негизинин айырмасы каптал жактарынын суммасынан кичине болгондо чыгарылышы болот. **11.** б) Диагоналдарынын суммасы негиздеринин суммасынан чоң болгондо чыгарылышы болот, $60^\circ$ жана $120^\circ$. **12.** 3 м. **13.** 6,5 дм. **14.** 34 см жана 18 см.

**§ 25.**

**1.** а) 6 дм; б) 9 см. **2.** 3 м; 4,5 м; 6,5 м. **3.** 10 дм, 14 дм жана 20 дм. **4.** 12 м. 5. 30 дм. **7.** 2,4 дм; 1,8 дм; 3 дм. **8.** 3,5 дм. **12.** 4 м жана 2 м. **15.** 7,5 дм. **16.** 13 дм же 5 дм. **17.** 28,8 дм жана 19,2 дм. **19.** 14 м жана 6 м. **20.** 1:2. **21.** $\frac{3}{4}a$ . **22.** $d-h(d>h)$ жана $d+m$. **23.** 8,5 дм. **24.** 1,2 м жана 2,8 м. **25.** 4,6 дм. **26.** Диагоналдарынын ар бири бийиктигинен кичине же ага барабар болгондо маселенин чыгарылышы болбойт.

## *V главага карата маселелердин жооптору*

**1.** $18^\circ$, $162^\circ$, $54^\circ$ жана $126^\circ$. **3.** 5 см жана 1 см. **4.** $60^\circ$ жана $120^\circ$. **6.** $\frac{a-b}{2}$, $(a>b)$. **7.** 6 дм жана 8 дм. **8.** $145^\circ$ жана $135^\circ$. **9.** 9 см жана 5 см.

## *VI глава*

**§ 26.**

**7.** а) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; в) $tg\alpha=\frac{4}{3}$; г) $ctg\alpha=\frac{3}{4}$. **8.** а) $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{4}{5}$; б) $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{3}{5}$; в) $tg\frac{\beta}{2}=\frac{3}{4}$; г) $ctg\frac{\beta}{2}=\frac{4}{3}$.

**§ 27.**

**1.** а) 5 см; б) 1 м; в) 10,9 дм. **2.** 4 м. **3.** 10 дм. **4.** 60 см. **5.** а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. **6.** а) 5 м; б) 10 см; в) 1,3 дм. **7.** 12 дм. **9.** а) 6 см, 10 см жана 3,6 см; б) 8 дм, 10 дм жана 6,4 дм; в) $\sqrt{42}$ м, $\sqrt{58}$ м жана 10 м. **12.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. **13.** 16 см жана 12 см. **14.** 12 м. **15.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3}m}{3}$. **16.** 8 дм. 17. $\sqrt{ab+c^2}$.

**§ 28.**

**1.** а) 3; б) $\sin\alpha$; в) $\cos^2\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **2.** а) $\sin\alpha$; б) 2; в) 1; г) $2\sin\alpha$. **6.** 1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; 2) $\sin\alpha=\frac{11}{61}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{11}{60}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{60}{11}$; 3) $\sin\alpha=0{,}6$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **7.** 1) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$, 3) $\cos\alpha=0{,}8$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

**§ 29.**

**1.** $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$. **2.** $\cos 30^\circ=\sqrt{3}:2$; $\mathrm{tg}30^\circ=\sqrt{3}:3$; $\mathrm{ctg}30^\circ=\sqrt{3}$. **3.** $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$; $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{tg}60^\circ=\sqrt{3}$; $\mathrm{ctg}60^\circ=\sqrt{3}:3$. **4.** $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}45^\circ=1$; $\mathrm{ctg}45^\circ=1$. **5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}:2$. **6.** 3:2. **7.** 1) $\sqrt{3}:4$; 2) 1.

**§ 30.1.**

**1.** а) Бурчтун синусунун маанилери: 1) 0,5736; 2) 0,3120; 3) 0,6554; 4) 0,9659; 5) 0,9964; б) Бурчтун косинусунун маанилери: 1) 0,8192; 2) 0,9477; 3) 0,7555; 4) 0,2588; 5) 0,0837. **2.** а) Бурчтун тангенсинин маанилери: 1) 0,3739; 2) 0,7002; 3) 0,8466; 4) 1,6003; 5) 6,140; б) Бурчтун котангенсинин маанилери: 1) 2,675; 2) 1,4282; 3) 1,1813; 4) 0,6249; 5) 0,1599. **3.** Маанилери бирдей. **4.** а) Бирдей; б) Бирдей. Ар бир учурдагы бурчтардын суммасы $90^\circ$. **5.** а) $\sin 40^\circ<\sin 70^\circ$; б) $\cos 20^\circ>\cos 60^\circ$; в) $\mathrm{tg}30^\circ<\mathrm{tg}45^\circ$. **6.** а) $70^\circ$; б) $24^\circ36'$; в) $16^\circ$; г) $30^\circ2'$; д) $10^\circ$; е) $50^\circ30'$.

**§ 30. 2.**

**1.** 1) 0,2588; 2) 0,5; 3) 0,6494; 4) 0,8729; 5) 0,9678. **2.** 1) 0,9272; 2) 0,7986; 3) 0,6756; 4) 0,3827; 5) 0,1708. **3.** а) 5,2017; 4,6837; б) 36,4702; 19,8038; в) 2,1867; 10,5145.

**§ 30. 3.**

**1.** а) 10; $53^\circ7'$; $36^\circ53'$ б) 50; $36^\circ52'$; $53^\circ8'$ $53^\circ8'$; в) 4,5853; $71^\circ26'$; $18^\circ34'$; г) 62,7; $11^\circ19'$; $78^\circ41'$. **2.** а) 8; $36^\circ53'$; $53^\circ7'$. б) 16; $75^\circ45'$; $14^\circ15'$; в) 4,55; $49^\circ15'$; $40^\circ45'$; г) 14,989; $61^\circ16'$; $28^\circ44'$. **3.** а) 25,22; $53^\circ30'$; 20,27; б) 5,65; $47^\circ45'$; 4,182; в) 11,445; $34^\circ$; 9,49; г) 37,62; $71^\circ24'$; 35,65. **4.** а) 64,568; $54^\circ24'$; 37,585; б) 462,7; $65^\circ12'$; 194,1; в) 119,8; $38^\circ45'$; 93,43; г) 12,16; $28^\circ45'$; 10,66. **5.** а) 5,948; 8,039; $53^\circ30'$; б) 33,75; 25,99; $37^\circ36'$; в) 0,5117; 1,6735; $17^\circ$; г) 0,5335; 0,5969; $41^\circ45'$. **6.** 7,6 м; $63^\circ28'$; $63^\circ28'$; $53^\circ4'$. **7.** а) $67^\circ20'$ жана $112^\circ40'$; б) $29^\circ50'$ жана $150^\circ10'$. **8.** 7 м жана 4,3 м.

## *VI главага карата карата маселелердин жооптору*

**2.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1. **4.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 60°. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 3,9 м. **9.** а) 15 дм; 7,2 дм; 5,4 дм; 9,6 дм; б) 0,5 дм; 0,46 дм; 0,1 дм; 0,2 дм. **10.** а) 9,2 м; б) 6 м.

## *VII глава*

**§ 31.**

**2.** 15 см. **4.** I-томпок беш бурчтук; II-томпок эмес алты бурчтук. **5.** 6 чокусу, 6 жагы, 6 бурчу жана 3 диагоналы бар. **6.** а) 2; б) 5; в) $n-3$. **7.** а) 4; б) 7; в) 18. **8.** а) 5; б) 20; в) $\frac{1}{2}n(n-3)$.

**§ 32.**

**1.** а) 540°; б) 1080°; в) 3240°. **2.** 140°, 80°, 120°, 160°, 100°, 120°. **3.** 540° ка чоңоёт. **4.** а) 5; б) мүмкүн эмес; в) 22. **5.** $2r+2$.

**§ 33.**

**1.** Үч бурчтук. 60°. **2.** а) $7a$; б) $12a$; в) $na$. **3.** 1) 720°; 2) 120°; 3) 60°; 4) 360°; 5) 3; 6) 9; 7) 4,1 дм. **4.** 1) 9; 2) 12; 3) 30. **5.** 1) 20; 2) 30; 3) 12. **6.** 1) 360°; 2) 540°; 3) 1440°; 4) 1800°. **7.** 1) 90°; 2) 108°; 3) 144°; 4) 150°. **8.** 1) 2; 2) 5; 3) 35; 4) 60.

**§ 34.1.**

**1.** а) Ичтен сызылган төрт бурчтук; б) сырттан сызылган төрт бурчтук. **3.** $2a$. **5.** 2,5 м. **9.** а) Болот; б) Болбойт. **10.** 8 м, 10 м, 14 м, 12 м.

**§ 34.2.**

**2.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a}{2}$. **3.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **6.** а) 72°; б) 45°; в) 24°; г) 7°30′; д) $360°:n$. **7.** 1) 12; 2) 90. **13.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{2}$; 3) $a$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **14.** 4,08 дм жана 3,3 дм. **16.** 1) $R\sqrt{3}$; 2) $R\sqrt{2}$; $2R$; 3) $R$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. **17.** 5,56 м жана 5,85 м. **18.** $r = R\cos\frac{180°}{n}$ ($r$ ичтен, $R$ сырттан сызылган айланалардын радиустары). **19.** ≈12,11 см. **20.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. 21. $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$.

**§ 35.**

**1.** 1) 125,6 см; 2) 34,54 дм; 3) 75,36 м. **2.** 1) 56,5 см; 2) 8,79 м. **3.** 1) 10 дм; 2) 4 см; 3) 0,24 м. **4.** 1) 1,14 м; 2) 4,7 дм. **5.** ≈12 700 км. **6.** ≈10 915 км. **7.** ≈4 371 000 км. **8.** *Көрсөтмө.* Радиусун таап, каалаган чекитти борбор кылып айлана сызгыла. **9.** 1) $k$ эсе чоңоёт; 2) $2\pi a$ см ге чоңоёт. **10.** ≈188 м. **11.** 1) 12,6 см; 2) 8,4 см; 3) 31,4 см; 4) 9,5 см; 5) 15,8 см. **12.** 1) $0{,}48l$; 2) $2{,}3l$. **13.** 2,5 см, **14.** 25°48′. **15.** 9,5 м.

**§ 36.**

**1.** $2\pi$. **2.** 114°34′. **3.** а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) 360°. **4.** а) 28°39′; б) 11°27′; в) 180°; г) 572°50′. **5.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\pi$. **6.** $\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{4\pi}{3}$.

## *VII главага маселелердин жооптору*

**1.** $d+(R+R')$ жана $d-(R+R')$. **3.** Болот. $n=42$. **5.** Болбойт. **8.** Болот 12. **11.** 30°. **12.** 15. **14.** а) $3a$; б) $\pi a$. **15.** ≈44 м. **16.** 23,55 м. **17.** а) $\pi(2R+a)$ жана $\pi(2R-a)$; б) $Rk$ жана $\frac{R}{k}$. **18.** 23,55 см. **19.** $2\pi a$.

## *VIII глава*

**§ 37.**

**1.** а) 0,1 кв. км; б) 100 000 кв. м; в) 1000 а. **2.** 1) 16 дм$^2$; 2) 8 м$^2$; 3) 396 м$^2$; 4) 11 га. **3.** 400 см$^2$. **4.** 20,25 дм$^2$. **5.** 100м. **6.** $d^2$:2. **7.** а) $2R^2$; б) $4R^2$. **8.** 2. **9.** 1) 16 эсе чоңоёт; 2) 6,25 эсе кичиреет. **10.** 1) $\sqrt{2}$ эсе чоңойтуу керек; 2) 3 эсе кичирейтүү керек. **11.** 12 см; 45 см$^2$. **12.** 19788 м$^2$ же 1,9988 га же 197,88 а. **13.** 4800 м. **14.** 10 дм жана 14 дм. **15.** 30 м жана 18 м.

**§ 38.**

**1.** 11,7 дм$^2$. **2.** 7,5 см же 4,8 см. **3.** Болот. **4.** а) 1,6 м; б) 4 м. **5.** а) 216 дм$^2$; б) $216\sqrt{2}$ дм$^2$; в) $216\sqrt{3}$ дм$^2$. **6.** $\frac{h_1h_2\cdot P}{2(h_1+h_2)}$; $P$ – периметр, $h_1$, $h_2$ – бийиктиктери. **7.** $ad\cdot\sin\alpha$. **8.** 30°. **9.** 20. **10.** 84 см$^2$. **11.** 4,24 дм. **13.** $72\sqrt{3}$ см$^2$. **14.** . **15.** а) $\frac{S}{2a}$; б) $2ra$. **16.** 3244,8 м$^2$. **17.** 4 см жана 6 см.

**§ 39.**

**1.** 217,35 дм$^2$. **2.** а) 6 м; б) 18 м. **4.** а) $8\sqrt{5}$ см$^2$; б) ≈3,9 м$^2$. **5.** а) ≈35,5 см$^2$; б) 81,9 см$^2$; в) 70,9 см$^2$; г) ≈80,4 см$^2$. **6.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **7.** $2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$. **9.** а) 3,6 м$^2$; б) 19 см$^2$. **11.** Бирдей түзүлгөн. **13.** 1) 60; 2) $10\sqrt{2}$; 3) 5,28; 4) 8 кв. бирдик. **14.** 20 м. **15.** $12\frac{12}{13}$ см. **16.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **17.** $3r^2\sqrt{3}$. **19.** 1) 25,2; 2) 44,8; 3) 8; 4) 0,23 кв. бирдик. **21.** 1) 221,7; 2) 96,2; 3) 17,4; 4) 0,406 кв. бирдик. **22.** 2) ≈8,35 кв. бирдик. **24.** 1) 18,125; 2) 4,77; 3) 3,125; 4) 2,58 бирдик. **28.** а) 6 кв. бирдик; б) 24 кв. бирдик.

**§ 40.**

**1.** 306 см$^2$. **2.** 0,8 дм. **3.** 2,5 см. **4.** 8 см жана 10 см. **5.** 405 м$^2$. **6.** 24 дм$^2$. **8.** 1) $(88-16\sqrt{3})\approx 60{,}3$ см$^2$; $(88\sqrt{2}-32)\approx 92{,}45$ см$^2$; 3) 144,8 см$^2$; 4) 34,8 см$^2$. **9.** $\frac{k\cdot a}{6}$. **10.** 4,8 дм$^2$. **11.** 135 м$^2$. **12.** 1024 см$^2$. **13.** $h^2$. **14.** 0,8316 м$^2$. **15.** $\frac{R^2}{2}$. **16.** 1) 4; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$. **17.** 1,56 дм$^2$. **18.** 49 кв. бирдик.

**§ 41.**

**2.** 186 см$^2$. **4.** ≈12 м$^2$. **7.** 0,8 дм. **8.** 40 дм. **9.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. **11.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; 2) $a^2$; 3) ≈$1{,}72a^2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$; 5) ≈$11{,}2a^2$. **12.** 1) $4\sqrt{3}$ м$^2$; 2) 16 м$^2$; 3) ≈27,52 м$^2$; 4) ≈41,57 м$^2$; 5) 179,2 м$^2$. **14.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$; 2) $2R^2$; 3) ≈$2{,}38R^2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$; 5) $3R^2$. **15.** 1) $3\sqrt{3}$ дм$^2$; 2) 8 дм$^2$; 3) ≈9,52 дм$^2$; 4) $6\sqrt{3}$ дм$^2$; 5) 12 дм$^2$. **17.** 1) $3\sqrt{3}\,r^2$; 2) $4r^2$; 3) $\approx 3{,}63\,r^2$; 4) $2\sqrt{3}\,r^2$; 5) $\approx 3{,}36\,r^2$; 6) $\approx 3{,}31\,r^2$; 7) $3{,}25r^2$; 8) $3{,}21r^2$. **18.** 1) 519,6 см$^2$; 2) 400 см$^2$; 3) ≈ 363 см$^2$; 4) ≈ 346 см$^2$; 5) ≈ 336 см$^2$; 6) 331 см$^2$; 7) 325 см$^2$; 8) 321 см$^2$.

**§ 42.**

**1.** 1) 706,5 см$^2$; 2) 78,5 дм$^2$; 3) ≈66,4 м$^2$. **2.** 1) ≈132,7 м$^2$; 2) 314 см$^2$; 3) 120,7 дм$^2$. **3.** 1) 8 дм; 2) 1,5 м. **4.** 0,785 м$^2$. **5.** 0,2 м$^2$. **6.** 250,83 см$^2$. **7.** 37,68 дм$^2$. **10.** 1) 1:4; 2) 1:2; 3) 3:4; 4) ≈0,93. **11.** 565,2 см$^2$. **12.** 1) 13,4 см$^2$; 2) 20,1 см$^2$; 3) 67 см$^2$. **13.** 1) ≈$1{,}2\sqrt{Q}$; 2) ≈$6{,}77\sqrt{Q}$; 3) ≈$0{,}87\sqrt{Q}$. **14.** 80°.

**15.** 1) $\approx 0,275R^2$; 2) $\approx 0,09R^2$; 3) $\approx 0,04R^2$; 4) $\approx 0,01R^2$. **16.** 1) $\approx 0,20a^2$; 2) $\approx 0,14a^2$; 3) $\approx 0,09a^2$.

## *VIII главага карата маселелердин жооптору*

**1.** 7 м; 8 м. **2.** 156 см$^2$. **3.** 480 дм$^2$. **6.** $\sqrt{2}-1$. **9.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\cdot(3\sqrt{3}R^2)$ кв. бирдик. **10.** $\frac{mn}{2}$. **12.** 37,5 мм$^2$. **13.** 2. **14.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **15.** 4:1. **16.** $432\pi$ см$^2$. **17.** $\frac{r^2}{2}(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$. **18.** 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})R^2$; 3) $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2})R^2$.

## 9-КЛАСС

## *IX глава*

**§ 43.**

**2.** а) (3; 0), (3; 6), (−3; 6), (−3; 0); б) (3; 0), (3; −6), (−3; −6), (−3; 0). **3.** (3; 0) жана (0; −2). **4.** 10. 5. $(-\frac{1}{2}; 1)$. **6.** (−2; 4), (−2; 2,5), (2; −0,5). **7.** $C(5; -3)$; $D(1; -5)$.

**§ 44.**

**1.** а) 10 бирдик; б) 5 бирдик. **2.** 5 бирдик. **3.** $3\sqrt{5}$ бирдик. **5.** а) $(13+\sqrt{145})$ бирдик; б) $2\sqrt{13}$; 2,5; $\sqrt{120,25}$. **6.** 10; $\sqrt{145}$; 3; $2\sqrt{13}$; 2,5; $\sqrt{120,25}$. **7.** (0; −3); (0; −2).

**§ 45.**

**1.** $x^2+y^2=25$. **2.** 4 бирдик. **3.** $x^2+y^2=2,25$. **4.** $A$ жана $D$ чекиттери. **5.** 4. **6.** $(x+4)^2+y^2=9$. **7.** $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Жатат. **8.** $(x-3)^2+(y\pm 2,5)^2=6,25$.

**§ 46.**

**1.** $5x-7y-18=0$. **2.** $y=x$ жана $y=-x$. **3.** $4x+15y+9=0$. **4.** а) $2x-3y+10=0$, $x+y=0$, $4x-y=0$, б) $6x+y=0$, $3x-2y+5=0$, $y=2$. **5.** $5x-4y-20=0$, $5x-12y+20=0$. **6.** −3 жана 2. **7.** $A$, $C$ жана $E$ чекиттери.

**§ 47.**

**3.** б) Барабар эмес, карама-каршы векторлор. **4.** $\overrightarrow{AF}=\vec{m}$; $\overrightarrow{EF}=\vec{q}$; $\overrightarrow{ED}=\vec{p}$. **5.** $|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{m}|=3$ см.

**§ 48.**

**1.** б) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. **3.** $\vec{p}+\vec{q}$; $\vec{q}$; $-\vec{p}$; $-\vec{p}-\vec{q}$; $2\vec{p}+\vec{q}$; $2\vec{p}+2\vec{q}$. **4.** $\overrightarrow{AB}$=(−3; 7). **5.** а) (−6; 15); б) (5; −12,5). **6.** а) (2; 7); б) (−1; 6); в) (0; 0); г) (13; −4). **7.** $B(5; -3)$. **8.** а) 5; б) (3; −4). **9.** а) $\vec{C}$=(−1; −2); б) $\vec{C}$=(11; −6). **10.** а) $|\vec{c}|=\sqrt{5}$; $|\vec{c}|=\sqrt{157}$.

**§ 49.**

**1.** 1) 0; 1; 2) 1; 0; 3) 0; −1. **2.** а) 0; 0; б) мааниге ээ болбойт. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $3\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; −1; −1; 3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\sqrt{3}$. **7.** а) 0,6428; −0,7660; б) 0,9890; −0,1478; в) 0,3156; −0,9488. **8.** а) −5,671; −0,1679. **9.** а) 143°8′; б) 153°26′. **10.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$.

**§ 50.**

**1.** 12. **3.** 2. **4.** 7. **10.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{50}$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{8}$; б) $\overrightarrow{AB}=(5;\,-5)$; $\overrightarrow{BC}=(-2;\,-2)$; $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. **11.** а) $\overrightarrow{AC}=(2;\,8)$; $\overrightarrow{BD}=(-8;\,2)$; $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ жана $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}=(5;\,3)$; $\overrightarrow{BC}=(-3;\,5)$; $\overrightarrow{DC}=(-5;\,-3)$; $\overrightarrow{AD}=(-3;\,5)$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

**§ 51.**

**1.** $b^2=a^2+c^2-ac$. **2.** 1) Тар бурч; 2) тик бурч; 3) кең бурч. **3.** 1) ≈11,6; 2) ≈7,3; 3) ≈1,58. **4.** ≈93°42′. **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+p^2\pm 2dp\cos\beta}$. **6.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$. **7.** 36°53′. **8.** $6\sqrt{2}$ см. **9.** 1) 14°29′; 2) 14°23′. **10.** 1) $a$≈144,7; 2) $b$≈21,3. **11.** 7,8 см жана 16,3 см. **12.** 47,4 дм жана 78,85 дм. **13.** ≈3,8 см жана 10,7 см. **14.** 45°44′; 134°16′; 110°3′; 69°57′.

**§ 52.**

**1.** 1) 409; 58′; 59°2′; 2) 17,1; 65°33′; 37°47′; 3) 215,5; 43°21′; 56°9′; 4) 11,4; 11°54′; 27°54′. **2.** 1) 75°; 22; 26,9; 2) 39°14′; 22; 12.; 3) 41°; 4,1; 8; 4) 102°11′; 0,5; 1,6. **3.** 1) 32°6′; 52°56′; 94°58′; 2) 95°; 76°30′; 8°30′; 3) 25°12′; 96°30′; 58°18′; 4) 71°10′; 37°40′; 71°10′. **4.** 1) $\gamma$=62°; $\alpha$=72°53′; $\alpha$=10,8; 2) $\beta$=47°43′; $\alpha$=31°10′; $\alpha$=3,43; 3) $\beta$=43°51′; $\gamma$=16°9′; $c$=32,1; 4) $\alpha$=26°17′; $\gamma$=73°26′; $c$=24,9; 5) $\gamma$=14°44′; $\beta$=154°16′; $\beta$=27,3; 6) $\alpha$=4°3′; $\beta$=168°27′; $\beta$=3,68. **5.** $\alpha$ —эң чоң, $\beta$ — эң кичине. **6.** $\beta$ эң чоң, $\gamma$ эң кичине.

**§ 53.**

**2.** 10 дм. **7.** $m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$. **8.** 1) $AD$=8 м; $DC$=12 м; 2) 10 м; 3) 1,8 м. **9.** 8 см. **12.** cos$\alpha$=0,6; cos$\beta$=0; cos$\gamma$=0,8.

## *IX главага карата маселелердин жооптору*

**1.** а) (6; 0), (0; 4), (−6; 0), (0; −4); б) $\sqrt{52}$. **2.** 1) **2.** 1) (0; 0), (4; 0), (4; 3), (0; 3); 2) 5 бирдик, 4 учур. **3.** $B$(−3; −2). **4.** (−2; 3). **5.** б) $(2\sqrt{2};\,2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\,-2\sqrt{2})$. **6.** а) Карама-каршы; б) барабар; в) $\vec{0}$; г) $6\vec{a}$. **7.** а) =(−1; −7); б) $\vec{U}=(3;\,-7)$; в) $\overrightarrow{M}=(-1;\,4)$. **8.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; −1; 3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $h_a=-\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, $p$ — жарым периметр, $l_a=\frac{2\sqrt{bcp\cdot(p-a)}}{b+c}$. **12.** $h_a=-\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, $p$ — жарым периметр. Калган бийиктиктери ушуга окшош табылат. **13.** $R=\frac{a}{2\sin\angle A}$; $\angle A=a$ же $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$ — жарым периметр. **14.** *Көрсөтмө*. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнөн пайдалангыла.

## *X глава*

**§ 54.1.**

**3.** а) 4; б) 1. **7.** $y=x+1$. **8.** $A'(1;\,-3)$; $B'(-1;\,-2)$; $C'(-3;\,-5)$ периметрлери: $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{20}$. **16.** а) Чексиз көп; б) чексиз көп. **23.** $O(1;\,-1)$. **24.** $M'(2;\,-3)$.

**§ 54.2.**

**5.** а) $O'(3;\ -5)$; $M'(7;\ 1)$; б) $y+5=0$; в) $x-3=0$. **8.** Периметрлери барабар.

**§ 54.3.**

**9.** а) $A_1(0;\ 2)$; $B_1(3;\ 0)$; б) $A_2(0;\ -2)$; $B_2(-3;\ 0)$.

**§ 55.**

**2.** Болот. **7.** а) Параллелограммга; б) трапецияга; в) ромбго өзгөрөт. **8.** $A_1(3;\ 0)$; $B_1(0;\ 6)$; $C_1(-6;\ 0)$; $D_1(0;\ -3)$.

**§ 56.**

**2.** 3. **3.** 10 см. **4.** 16 дм, 20 дм. **5.** 0,9 м; 1,5 м; 1,8 м. **6.** 1) $b_1=70$; $c=16$; 2) $c=60$. **7.** 6,8 дм. **8.** 1) Болот; 2) Болот; 3) Болбойт. **9.** 10 дм, 20 дм жана 25 дм. **10.** 65 дм жана 55 дм. **11.** 1) 14 см; 2) 4 см; 3) 27:28. **17.** 3 дм; 2,4 дм; 1,8 дм; 3,6 дм. **18.** 1,8 м; 0,9 м; 1,2 м; 3,6 м. **19.** 0,8 м; 1,2 м; 1,6 м; 2 м. **20.** 10 м жана 4 м.

**§ 57.**

**1.** а) 9 эсе чоңоёт; б) 16 эсе кичиреет. **2.** 1) 4 эсе чоңоёт; 2) 9 эсе кичиреет. **3.** $a^2{:}b^2$. **4.** Эки эсе. **5.** $8\sqrt{3}$ см. **6.** $9{:}1$; $9{:}4$ . **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. **8.** 64 см²; 144 см²; 256 см². **9.** $a^2{:}b^2$. **10.** $1:\cos^2\frac{180^\circ}{n}$ . **11.** 1) 4; 2) $\frac{4}{3}$.

## *X главага карата маселелердин жооптору*

**1.** Өз ара бир маанилүү (гомотетиялуу). **2.** Өз ара бир маанилүү. **3.** $AB$ кесиндисинин чекиттери $MN$ ге өз ара бир маанилүү, $CD$ га өз ара бир маанилүү эмес туура келет. **4.** Бир маанилүү эмес. **5.** а) Бир; б) чексиз көп; в) чексиз көп; г) үч. **6.** а) Бир; б) чексиз көп. **11.** $k\cdot k_1$; $k\cdot k_2$ — окшоштук коэффициенттери. **13.** 4. **14.** $a{:}b$. **15.** 15 см; 12 см. **16.** 100 см жана 60 см.

## *Планиметрия боюнча тереңдетилип берилген маселелердин жооптору*

**3.** $\sqrt{0{,}5(a^2+b^2)}$ . **4.** $\frac{1}{2}(a-b)$. **6.** $S=1:\sqrt{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})\ldots(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c})}$ , $h_a$, $h_b$, $h_c$ – бийиктиктер. **7.** $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$ , $b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}$ , $c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$ , $m_a$, $m_b$, $m_c$ — үч бурчтуктун медианалары, $a$, $b$, $c$ — жактары. **8.** $AD=\pm\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}$ ; $BD=\pm\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{4S}$ ; $CD=\pm\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4S}$ , $ABC$ үч бурчтугунун аянты $S$ — ортборбору $D$, $AD$, $BD$, $CD$ — изделүүчү аралыктар. **9.** 8-маселенин чыгарылышынан пайдалансак, изделүүчү аралыктар $AD{:}2$, $BD{:}2$, $CD{:}2$ болот. **10.** $R^2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6})$ . **15.** $\frac{\sqrt{3}(d^2-c^2)}{12}$ . **16.** $a^2(1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$ .

## *XI глава*

**§ 58.**

**3.** $A_1D_1$, $B_1C_1$, $CC_1$ жана $DD_1$. **4.** 1) Параллель; 2) кесилишүүчү.

**§ 59.**

**1.** Тик бурчтук. **2.** 4 см жана 8 см. **3.** Барабар тик бурчтуу эки үч бурчтукка бөлөт. **4.** 12 см, 10 см жана 20 см, 6 см. **5.** Тең капталдуу үч бурчтук. **6.** 1) Мүмкүн эмес; 2) мүмкүн эмес. **7.** Тегерек. **8.** 1) 8 дм, 3 дм, 5 дм; 2) 6 дм, 4 дм, 5 дм. **9.** 12 см, 6 см, 8 см. **11.** Айлана. **12.** Тегерек. **13.** Радиусу 2 см болгон тегерек шардын борборуна жакын болот. 14. 62,8 см.

**§ 60.**

**2.** 1) Алты бурчтук; 2) алты. **3.** Барабар болот. **4.** 10; 7; 15. **6.** 1) $\sqrt{2}a$; 2) $a\sqrt{3}$. **8.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **10.** 1) 7 м; 2) 13,7 дм. **11.** Болот, беш бурчтуу призма. **13.** 66, 6, 10. **14.** 1) 2; 2) 5. **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(2l^2-a^2)}$. **16.** $2\sqrt{l^2-h^2)}$. **17.** 7 дм. **18.** 15 см.

**§ 61.**

**2.** 1) $F, K$; 2) $D, E$. **3.** 1) $Oz$ огунда; 2) $Oy$; 3) $Ox$. **4.** 1) $xOz$ координаталар тегиздигинде; 2) $xOy$; 3) $yOz$. **6.** $K_1(2; 0; 0)$, $K_2(0; 3; 0)$, $K_3(0; 0; -4)$, **7.** (0; 0; 0), (4; 0; 0), (4; 4; 0), (0; 4; 0), (0; 4; 4), (4; 4; 4), (4; 0; 4), (0; 0; 4).

**§ 62.**

**1.** 10 бирдик. **2.** 1) $C(-1; 0; 4)$; 2) $AC=\sqrt{21}$, $CB=\sqrt{21}$; 3) 0,5 бөлүгүн. **3.** 1) $2(\sqrt{29}+\sqrt{53}+2\sqrt{6})$; 2) $\sqrt{53}$. **4.** $B(5; 1; -2)$. **5.** 1) $(-1; -1; \frac{1}{2})$; 2) $D\left(0; -6; 0\right)$; 3) $BD=\sqrt{105}$.

**§ 63.**

**1.** 150 дм$^2$. **2.** 24 см$^2$. **3.** 3 м. **4.** 1) 112 см$^2$; 2) 61,5 дм$^2$. **5.** 1) 104 м$^2$; 2) 134 м$^2$. **6.** $2d^2$. **7.** 1) $\frac{\sqrt{6S}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{2S}}{2}$. **8.** 4 см жана 2 см. **9.** 78 м$^2$. **10.** 1) 240 дм$^2$; 2) 264 дм$^2$. **11.** 1) 160 дм$^2$; 2) 208 дм$^2$. **12.** 288 см$^2$. **13.** 13,1 дм$^2$. **14.** 1) 36 м$^2$; 2) 59,4 м$^2$. **15.** 1) 36 см$^2$; 2) 56 см$^2$. **16.** 1) үч эсе чоңоёт; 2) эки эсе чоңоёт. **17.** 1) 27,9 дм$^2$; 2) 1507,2 см$^2$. **18.** 2 см жана 5 см. **19.** $\frac{3a^2\pi}{2}$. **20.** 1) эки эсе чоңоёт; 2) үч эсе кичиреет. **21.** 1) 251 см$^2$; 2) 9,2 дм$^2$; 3) 2040 см$^2$. **22.** 3 дм$^2$. **23.** 1) 219,8 см$^2$; 2) 310,86 см$^2$. **24.** 1) 266,9 см$^2$; 2) 734,76 см$^2$. **25.** 1) 803,8 см$^2$; 2) 314 дм$^2$. **26.** 4. 27. 1) $\approx 5{,}10\cdot 10^8$ км$^2$; 2) $\approx 1{,}5\cdot 10^8$ км$^2$.

**§ 64.**

**1.** 64 см$^3$. **2.** 48 м$^3$. **3.** 216 дм$^3$. **4.** $360\sqrt{3}$ см$^3$. **5.** 4 м. **6.** 108 см$^3$. **7.** 1) $\approx$110,85 дм$^3$; 2) 665 дм$^3$. **8.** 1) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$; 2) $\frac{a^2h}{3}$; 3) $\frac{a^2h\sqrt{2}}{2}$. **9.** 5 м. **10.** 260 см$^3$. **11.** 1) үч эсе чоңоёт; 2) төрт эсе чоңоёт. **12.** 1) 251,2 см$^3$; 2) 628 дм$^3$. **13.** $\frac{c^2h}{4\pi}$. **14.** 15,7 дм$^3$. **15.** 8 см. **16.** 1) 260 см$^3$; 2) 1304 см$^3$; 3) 5,7 дм$^3$. **17.** $576p$ дм$^3$. **18.** 10 см. **19.** $182p$ см$^3$. **20.** 1) 65,65 см$^3$; 2) 2150,4 дм$^3$; 3) 4,2 м$^3$; 4) 14,2 дм$^3$. **21.** 27 эсе чоңоёт. **22.** 8.

## М А З М У Н У

## *XI глава.* СТЕРЕОМЕТРИЯ БОЮНЧА КЫСКАЧА МААЛЫМАТТАР



## ТИРКЕМЕ