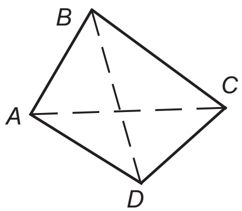
V глава ТӨРТ БУРЧТУКТАР

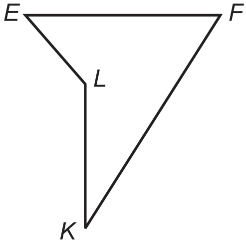
§ 21. ТӨРТ БУРЧТУКТАР ЖӨНҮНДӨ ТҮШҮНҮК

Аныктама: **Ар бир үч чекити бир түз сызыкта жатпаган төрт чекиттен жана аларды эки-экиден туташтыруучу төрт кесиндиден турган фигура төрт бурчтук деп аталат.**

Чынында эле ар бир үч чекити бир түз сызыкта жатпаган төрт чекитти удаалаш, бири-бири менен кесилишпей турган кесиндилер аркылуу туташтырсак төрт бурчтукту алабыз. Тагыраак айтканда, A, B, C, D төрт чекит берилсе, аларды удаалаш түрдө кесиндилер аркылуу туташтырып төрт бурчтукка ээ болобуз, аны $ABCD$ аркылуу белгилейли (102[а]-сүрөт). A, B, C, D — анын чокулары, AB, BC, CD, DA — жактары, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ анын бурчтары болуп эсептелишет. A жана C, B жана D карама-каршы чокулар болушат.



102[а]-сүрөт.

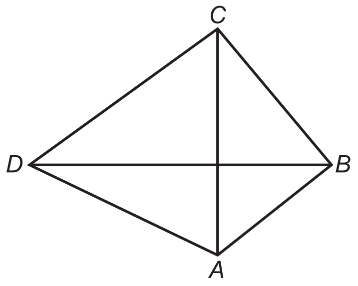


102[б]-сүрөт.

Карама-каршы чокуларын туташтыруучу кесиндилер (AC, BD) диагоналдар деп аталышат. Бир жагына жанаша жатпаган бурчтар төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтары ($\angle ABC$ жана $\angle CDA$, $\angle BCD$ жана $\angle DAB$) болуп эсептелишет. Ошондой эле, жалпы учу болбогон жактар карама-каршы жактар (AB менен CD, BC менен AD) деп аталышат. Демек, төрт бурчтуктун төрт чокусу, төрт жагы жана төрт бурчу болот, бирок төрт бурчтуктар ар кандай болушу мүмкүн: томпок жана томпок эмес. Эгерде төрт бурчтуктун каалаган жагы аркылуу түз сызык жүргүзгөндө төрт бурчтук ошол түз сызык аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде жатса, анда төрт бурчтук томпок, андай болбогон учурда ал томпок эмес болот. Жогорудагы $ABCD$ төрт бурчтугу томпок, ал эми $EFKL$ төрт бурчтугу (102[б]-сүрөт) томпок эмес, анткени ал төрт бурчтук KL же EL түз сызыктары аркылуу бөлүнгөн жарым тегиздиктердин биринде эле жатпайт.

Биз мындан ары томпок төрт бурчтуктарга токтолобуз, ошондуктан аларды оңтойлуу болсун үчүн, жөн эле төрт бурчтук деп атайбыз. Төрт бурчтуктун жактарынын суммасы анын **периметри** деп аталат.

34-теорема. **Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.**



103-сүрөт.

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ төрт бурчтугу берилсин (103-сүрөт). AC диагоналы аны эки үч бурчтукка бөлөт: ΔABC жана ΔACD. Бул үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы берилген төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасына барабар. Ар бир үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180°. Ошондуктан төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360° болот. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. а) $ABCD$ томпок; б) $KLMN$ томпок эмес төрт бурчтуктарын сызгыла. Томпок жана томпок эмес төрт бурчтуктардын айырмасын түшүндүрүп бергиле; в) чокуларын, жактарын, бурчтарын жана карама-каршы чокуларын белгилеп көрсөткүлө; г) диагоналдарын атагыла.

2. Томпок төрт бурчтуктун жактары 8 см, 12 см, 6 см, 11 см болсо, периметрин эсептегиле.

3. Төрт бурчтуктун бир жагынын узундугу калган үч жагынын узундуктарынын суммасынан кичине болоорун далилдегиле.

4. Төрт бурчтуктун жактары 2 см, 6 см, 9 см, 17 см болушу мүмкүнбү?

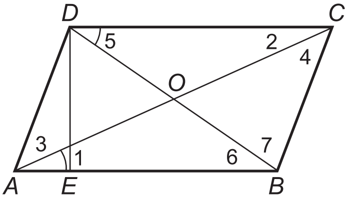
5. Төрт бурчтук диагоналы аркылуу эки үч бурчтукка бөлүнгөн. Эгерде үч бурчтуктардын, төрт бурчтуктун периметрлери тиешелүү түрдө 30 м, 34 м жана 36 м болсо, төрт бурчтуктун диагоналын тапкыла.

6. Жактары a, бир диагоналы d болсо, төрт бурчтукту түзгүлө.

7. Төрт бурчтуктун жактарынын катышы 4:5:8:2 катышына барабар, ал эми периметри 57 дм. Жактарын тапкыла.

8. Төрт бурчтуктун жактарынын катышы 3:1:5:11 катышына барабар болушу мүмкүнбү?
9. Төрт бурчтуктун бир бурчу 112° болсо, калган бурчтарынын суммасын тапкыла.
10. Эгерде төрт бурчтуктун 3 бурчунун ар бири тик болсо, анда төртүнчү бурчу да тик болоорун далилдегиле.
11. Эгерде төрт бурчтуктун бурчтарынын катышы 3:5:6:1 катышына барабар болсо, анын ар бир бурчун тапкыла.
12. $ABCD$ төрт бурчтугунда $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=6:7:8:9$. Бул төрт бурчтуктун параллель жактары барбы?
13. Эгерде төрт бурчтуктун эки бурчунун катышы 5:7 катышына барабар, үчүнчү бурчу алардын айырмасына, ал эми төртүнчү бурчу үчүнчү бурчунан 24° ка кичине болсо, төрт бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

§ 22. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



104-сүрөт.

Карама-каршы жаткан жактары параллель болгон төрт бурчтук **параллелограмм**[1] деп аталат.

104-сүрөттө $ABCD$ параллелограммы көрсөтүлгөн: $AB\parallel CD$, $BC\parallel AD$. Томпок төрт бурчтуктун чокулары, жактары, бурчтары, карама-каршы чокулары, ошондой эле диагоналдары, периметри кандай аныкталса, параллелограммда да алар ошондой эле аныкталышат. Анткени параллелограмм томпок төрт бурчтук. Чындыгында эле, параллелограмм ар бир жагы аркылуу жүргүзүлгөн түз сызык аркылуу түзүлгөн жарым тегиздиктеринин биринде гана жатат.

Параллелограммдын бир чокусунан каршысында жаткан жакка түшүрүлгөн перпендикуляр анын бийиктиги деп аталат. $DE\perp AB$, анда DE кесиндиси параллелограммдын D чокусунан AB жагына түшүрүлгөн бийиктиги болот.

35-теорема. **Параллелограммдын карама-каршы жактары барабар.**

Ал ABC жана ACD үч бурчтуктарынын барабардыгынан келип чыгат (AC — жалпы жак, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle$=4). Демек, $AB=DC$, $BC=AD$ болот.

---

[1] Грек сөзү, карама-каршы жактары параллель болгон төрт бурчтук дегенди түшүндүрөт.

Н а т ы й ж а л а р.

1. Параллелограммдын карама-каршы бурчтары барабар.
2. Параллелограммдын диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнүшөт. Бул $\Delta ABO=\Delta CDO$ ($AB=DC$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 6=\angle 5$,) дегенден келип чыгат. $AO=OC$, $BO=OD$ болот.
3. Параллелограммдын бир жагына жанаша жаткан бурчтардын суммасы 180° ка барабар.

Бул эки түз сызыктын параллелдик белгисинен келип чыгат.

35-теорема жана андан келип чыгуучу 1, 2, 3-натыйжалардын ар бирине карата айтылган тескери сүйлөмдөр да туура болот. Алар төмөндөгүдөй сүйлөмдөр.

36-теорема. **Эгерде томпок төрт бурчтуктун:**

а) карама-каршы жактары барабар болсо, анда ал параллелограмм болот;

б) карама-каршы бурчтары барабар болсо, анда ал параллелограмм болот;

в) диагоналдары кесилишкен чекитте тең экиге бөлүнсө, анда ал параллелограмм болот;

г) бир жагына жанаша жаткан бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болсо, анда ал параллелограмм болот.

Бул тескери теореманын ар бир учурун өз алдынча далилдөөгө болот.

Көрсөтмө. 36-теореманын а) учурун далилдөөдө үч бурчтуктардын барабардыгынын 3-белгисин; б) учурунда төрт бурчтуктун бурчтарынын суммасы 360° болоорун; в) учурду далилдөөдө үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгисин; г) учурун далилдөөдө түз сызыктардын параллелдигинин белгисин колдонуу сунуш кылынат.

Жогорудагы теоремалардын негизинде параллелограммдын белгиси катары төмөндөгү теореманы баяндоого болот.

37-теорема. **Эгерде томпок төрт бурчтуктун карама-каршы эки жагы барабар жана параллель болсо, анда ал параллелограмм болот.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ томпок төрт бурчтугу берилип, $AB=DC$ $AB\parallel DC$ болсун (104-сүрөт). $AD\parallel BC$ болоорун далилдейбиз. $\angle 1=\angle 2$ ($AB\parallel DC$), $AB=DC$, AC — жалпы жак болгондуктан, ал үч бурчтуктардын барабардыгынын 1-белгиси боюнча $\Delta ABC=\Delta ACD$ болот. Мындан $\angle 4=\angle 3$ экендиги келип чыгат. Демек, $AD\parallel BC$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $a \| b$ түз сызыктары берилген. Аларды тиешелүү түрдө A, B, C, D чекиттеринде кесип өтүүчү $c \| d$ эки түз сызыгын сызгыла. Натыйжада $ABCD$ төрт бурчтугу алынат. Ал төрт бурчтуктун параллелограмм болорун түшүндүрүп бергиле. Чиймеде сызып көрсөткүлө.

2. Параллелограммдын жактары: 1) 6 см жана 4 см; 2) 11,5 м жана 7 м болсо, анын периметрин эсептегиле.

3. Параллелограммдын бир жагы 12,4 дм. Экинчи жагы ал жагынан: а) 0,8 дм ге кыска; б) 1,6 дм ге узун; в) 4 эсе кичине болсо, параллелограммдын периметрин эсептегиле.

4. Параллелограммдын периметри 18,4 дм. Бир жагы а) 3 дм; б) 7 дм болсо, экинчи жагын тапкыла.

5. Параллелограммдын периметри 24 см. Эгерде бир жагы экинчи жагынан: 1) 4 см ге узун; 2) 6 см ге кыска; 3) 2 эсе узун болсо, параллелограммдын жактарын тапкыла.

6. Эгерде параллелограммдын жактарынын суммасы 12 см, ал эми жактарынын катышы: а) 1:2; б) 3:2 катышына барабар болсо, анда анын жактарын тапкыла.

7. Параллелограммдын бир бурчу 42°. Калган бурчтарын эсептегиле.

8. Параллелограммдын бир бурчу экинчи бурчунан: а) 15° ка чоң; б) $7^\circ 30'$ ка кичине; в) 2 эсе чоң болсо, анда анын бурчтарын тапкыла.

9. Параллелограммдын диагоналдарынын кесилишкен чекити аркылуу жүргүзүлгөн түз сызыктын параллель жактарынын арасындагы кесиндиси ошол чекитте тең экиге бөлүнөрүн далилдегиле.

10. а) Эки жагы жана алардын арасындагы бурчу; б) эки жагы жана бир диагоналы; в) эки диагоналы жана бир жагы; г) эки диагоналы жана алардын арасындагы бурчу; д) негизи, бийиктиги жана диагоналы боюнча параллелограммды түзгүлө.

11. Параллелограммдын диагоналы аны барабар эки үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.

12. Параллелограммдын бир жагында жаткан чокулары карама-каршы жагынан бирдей алыстыкта болоорун далилдегиле.

13. Параллелограммдын карама-каршы бурчтарынын биссектрисалары параллель болоорун далилдегиле.

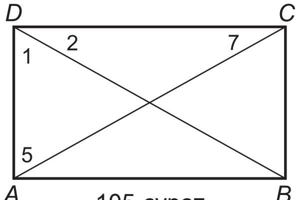
14. Параллелограммдын жактары 9 см жана 5 см. Диагоналдары: а) 4 см; б) 7 см; в) 14 см; г) 3 см болушу мүмкүнбү?

15. $ABCD$ параллелограммында A бурчунун биссектрисасы BC жагын E чекитинде кесет. Эгерде AB=12 дм жана AD=17 дм болсо, BE жана EC кесиндилеринин узундуктарын эсептегиле.

16. Параллелограммдын бир бурчунун биссектрисасы жагын 12 см жана 7 см узундуктагы кесиндилерге бөлөт. Параллелограммдын периметрин тапкыла.

17. Параллелограммдын бурчунун биссектрисасы анын жагын кесип өткөндө бурчтун жагы менен 32° бурчту түзөт. Параллелограммдын бурчтарын эсептегиле.

22.1. ТИК БУРЧТУК



105-сүрөт.

А н ы к т а м а. **Бардык бурчтары тик болгон параллелограмм тик бурчтук деп аталат.**

Тик бурчтук параллелограммдын айрым учуру болгондуктан, параллелограммдын бардык касиеттери жана ал жөнүндөгү теоремалар тик бурчтук үчүн да туура болот.

$ABCD$ тик бурчтугунда бардык жактары ирээти боюнча өз ара перпендикулярдуу болушат (105-сүрөт).

38-теорема. **Тик бурчтуктун диагоналдары барабар.**

Тик бурчтуу үч бурчтуктардын барабардыгынан пайдаланып, бул теореманы оңой эле далилдөөгө болот.

39-теорема. (38-теоремага тескери теорема). **Эгерде параллелограммдын диагоналдары барабар болушса, анда ал тик бурчтук болот.**

Муну тең капталдуу үч бурчтуктун касиетин жана үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасынын 180° боло тургандыгын пайдаланып далилдөөгө болот. Мисалы, $ABCD$ параллелограммында (105-сүрөт) $AC=BD$ болсо, анда $AO=OC=OD$ болот. Мындан ΔAOD да $\angle 5=\angle 1$, ΔODC да $\angle 2=\angle 7$ болот. Бирок, ΔACD да $\angle 5+\angle 7+\angle 2+\angle 1=180^\circ$. Анда $\angle 1+\angle 2=90^\circ$. Параллелограммдын касиети боюнча калган бурчтары да тик бурч болот. $ABCD$ — тик бурчтук. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тик бурчтук жалпы параллелограммдан кандай айырмаланат?

2. Параллелограммдын жанаша жаткан бурчтары барабар болсо, ал тик бурчтук болот. Далилдегиле.

3. Тик бурчтуктун жактары а) 8,5 см жана 4,5 см; б) 17 дм жана 8 дм. Ар бир учурдагы тик бурчтуктун периметрин эсептегиле.

4. Тик бурчтуктун бир жагы 15 м. Экинчи жагы ал жагынан: а) 2,5 м ге кыска; б) 3 м ге узун; в) 1,5 эсе чоң болсо, анда тик бурчтуктун периметрин эсептегиле.
5. Тик бурчтуктун периметри 24 м. Эгерде бир жагы экинчи жагынан: а) 3 м ге узун; б) 2 м ге кыска; в) 2 эсе кичине болсо, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.
6. Тик бурчтуктун жактарынын: а) суммасы 16 дм, катышы 3:7 ге; б) айырмасы 3 дм, катышы 5:3 кө барабар болсо, анын жактарын тапкыла.
7. Тик бурчтуктун периметри 18 м. Эгерде: а) бир жагын 1,5 м ге чоңойтсок (кичирейтсек); б) эки жагын тең 2 м ге чоңойтсок (кичирейтсек); в) эки жагын тең 2 эсе чоңойтсок (кичирейтсек), анда тик бурчтуктун периметри кандай өзгөрөт?
8. Тик бурчтуктун диагоналы жагы менен 36° бурч түзөт. Диагоналдардын арасындагы бурчтардын кичине жагы тарабындагы бурчун тапкыла.
9. Тик бурчтукта диагоналдарынын арасындагы бурчтардын кичине жактын каршысында жаткан бурчу ал кичине жак менен диагоналдын арасындагы бурчтан 30° ка чоң болсо, кичине жак менен диагоналдын арасындагы бурчту тапкыла.
10. Тик бурчтукта диагоналдары 60° бурч менен кесилишет. Эки диагоналдын жана эки кичине жактын суммасы 3,6 м. Диагоналдын узундугун тапкыла.
11. а) Бир жагы жана диагоналы; б) эки жагы; в) диагоналы жана алардын арасындагы бурчу; г) негизи жана анын диагоналы менен түзгөн бурчу боюнча тик бурчтукту түзгүлө.
12. Тик бурчтуктун бир бурчунун биссектрисасы жактарынын бирин 12 см жана 8 см кесиндилерге бөлөт. Тик бурчтуктун жактарын эсептегиле.
13. Тик бурчтукка сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
14. Тик бурчтуктун периметри 22 дм. Тик бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен жактарына чейинки аралыктардын суммасын тапкыла.

22.2. РОМБ

А н ы к т а м а. **Бардык жактары барабар болгон параллелограмм ромб[1] деп аталат.**

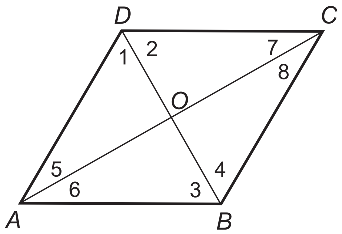
ABCD ромб болсун (106-сүрөт). Ал параллелограммдын бир түрү болгондуктан, параллелограммдын бардык касиеттери жана ал жөнүндөгү теоремалар ромб үчүн да туура болот. Мында $AB=BC=CD=DA$ болоору түшүнүктүү.

[1] Грек сөзү. Параллелограммдын бир түрү дегенди түшүндүрөт.

40-теорема. **Ромбдун диагоналдары өз ара перпендикулярдуу жана алар бурчтарын тең экиге бөлөт.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ ромб, AC, BD — диагоналдар (106-сүрөт). $AC \perp BD$, $\angle 1 = \angle 2$ болорун далилдейбиз.

$AO = OC$ (35-теорема, 2-натыйжа). ΔACD — тең капталдуу, анда DO медианасы анын бийиктиги да, биссектрисасы да болот: $DO \perp AC$ же $AC \perp BD$, ошондой эле $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 7 = \angle 8$ боло тургандыгы түшүнүктүү.



106-сүрөт.

41-теорема (40-теоремага тескери теорема). **Эгерде параллелограммдын диагоналдары перпендикулярдуу болушса, анда ал ромб болот.**

Теореманы өз алдыңарча далилдегиле.

1. Ромб жалпы параллелограммдан кандай айырмаланат?
2. Ромбдун жагы 6,5 дм. Периметрин эсептегиле.
3. Ромбдун периметри 36,4 м. Жагын тапкыла.
4. Ромбдун бир диагоналы жагына барабар болсо, анын бурчтарын эсептегиле.
5. Ромбдун тар бурчу 42°. Калган бурчтарын тапкыла.
6. Эгерде параллелограммдын:
а) диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болсо;
б) диагоналы бурчун тең экиге бөлсө, анда ал ромб болорун далилдегиле.
7. Тик бурчтуктун жактарынын ортолору ромбдун чокулары болоорун далилдегиле.
8. Ромбдун жагы анын диагоналдары менен айырмасы 15° ка барабар бурчтарды түзөт. Ромбдун бурчтарын тапкыла.
9. Ромбдун жагынын диагоналдары менен түзгөн бурчтарынын катышы 2 : 7 ге барабар. Ромбдун бурчтарын эсептегиле.
10. Эгерде ромбдун кең бурчунун чокусунан жагына түшүрүлгөн бийиктик ал жакты тең экиге бөлсө, ромбдун бурчтарын эсептегиле.
11. Ромбдун периметри 16 дм, ал эми бийиктиги 2 дм. Ромбдун кең бурчун тапкыла.
12. а) Жагы жана диагоналы; б) эки диагоналы; в) бурчу жана диагоналы боюнча ромб түзгүлө.

22.3. КВАДРАТ

Бардык жактары барабар болгон тик бурчтук **квадрат** деп аталат. Квадрат тик бурчтуктун айрым учуру болгондуктан тик бурчтуктун бардык касиеттери квадрат үчүн да туура болот.

Квадратты бардык бурчтары тик болгон ромб катарында да кароого болот. Ошондуктан квадраттын диагоналдары өз ара барабар жана перпендикулярдуу болушат.

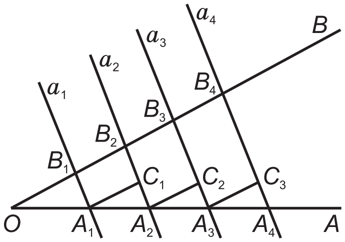
1. Квадрат жалпы ромбдон кандай айырмаланат?
2. Квадрат жалпы тик бурчтуктан кандай айырмаланат?
3. Квадраттын бир жагы 7,5 см ге барабар. Анын периметрин эсептегиле.
4. Квадраттын периметри 3,2 см. Жагын тапкыла.
5. Ромбдун диагоналдары барабар болсо, анда ал квадрат болоорун далилдегиле.
6. а) Жагы; б) диагоналы боюнча квадратты түзгүлө.
7. Эгерде квадраттын жагы: а) 4,5 см ге чоңойсо; б) 3 см ге кичирейсе; в) 3 см ге чоңойсо; г) 2 эсе кичирейсе, анда берилген квадраттын периметри кандай өзгөрөт?
8. Ар бир катети 4 дм болгон тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтукка бир жалпы бурчка ээ болгондой кылып, квадрат ичтен сызылган. Квадраттын периметрин тапкыла.
9. Квадраттын диагоналы 8 дм. Анын жагы экинчи квадраттын диагоналы болуп эсептелет. Экинчи квадраттын жагын тапкыла.
10. Бир бурчу тик болгон ромб квадрат болоорун далилдегиле.
11. Квадрат берилген. Ал квадратка сырттан сызылган жана ичтен сызылган айланаларды түзгүлө. Ар бир учурда айлананын борборун жана радиусун аныктагыла.

§ 23. ФАЛЕСТИН ТЕОРЕМАСЫ

42-теорема (*Фалестин*[1] *теоремасы*). **Бурчтун жактарын кесип өтүүчү параллель түз сызыктар бурчтун бир жагын барабар кесиндилерге кесип өтсө, анда алар бурчтун экинчи жагын да барабар кесиндилерге кесип өтөт.**

Д а л и л д ө ө. $\angle AOB$ берилсин (107-сүрөт). $a_1 \| a_2 \| a_3 \| a_4$ түз сызыктары бурчтун OA жагын тиешелүү түрдө A_1, A_2, A_3, A_4 чекиттеринде, OB жагын B_1, B_2, B_3, B_4 чекиттеринде кесип өтсүн

[1] Фалес Милетский — биздин эрага чейинки VI кылымда жашаган байыркы грек окумуштуусу.



107-сүрөт.

жана $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$ болсун. Анда $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4$ боло тургандыгын далилдейбиз.

A_1, A_2, A_3 чекиттери аркылуу OB шооласына параллель болгон A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 кесиндилерин жүргүзөбүз. $\Delta A_1C_1A_2=\Delta A_2C_2A_3$, анткени $\angle 1=3$, $\angle 2=4$ – туура келүүчү бурчтар, $A_1A_2=$ $=A_2A_3$ (үч бурчтуктардын барабардыгынын 2-белгиси). Мындан $A_1C_1=A_2C_2$ болот. Натыйжада $A_1B_1B_2C_1$, $A_2B_2B_3C_2$ параллелограммдарына ээ болобуз. Анда $A_1C_1=B_1B_2$, $A_2C_2=B_2B_3$ же $B_1B_2=B_2B_3$ болот. Калган кесиндилердин барабардыгы (OB шооласындагы) ушуга окшош далилденет. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Фалестин теоремасын пайдаланып, берилген кесиндини тең экиге бөлгүлө.
2. Берилген кесиндини: а) 3; б) 5; в) 7 барабар бөлүктөргө бөлгүлө.
3. Берилген кесиндини катыштары: а) 1:3; б) 2:5 ке барабар болгондой кылып эки кесиндиге бөлгүлө.
4. AOB бурчунун OA жагына $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$ см жана OB жагына $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=3$ см кесиндилери өлчөнүп коюлган. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ болоорун далилдегиле.
5. KOM бурчунун OK жагына $OC=1{,}5$ дм жана $CD=1{,}5$ дм кесиндилери, OM жагына $OE=2$ дм кесиндиси өлчөнүп коюлган. Эгерде $CE \parallel DF$ (F чекити OM жагында жатат) болсо, OF кесиндисин тапкыла.
6. Үч бурчтуктун бир жагы 6 барабар бөлүккө бөлүнгөн. Ал үч бурчтуктун калган эки жагын: а) тең экиге; б) 3 барабар бөлүккө кантип бөлүүгө болот?

§ 24. ТРАПЕЦИЯ

А н ы к т а м а. **Эки гана жагы параллель болгон томпок төрт бурчтук трапеция[1] деп аталат.**

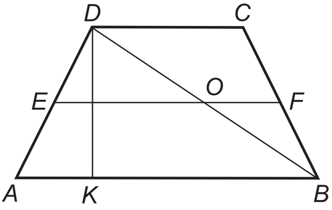
Трапеция томпок төрт бурчтуктардын бир түрү болгондуктан, анын элементтеринин аныкталышы, белгилениши жалпы томпок төрт бурчтуктарга окшош болот.

[1] Грек сөзү, «*тактайча*» дегенди түшүндүрөт.

$ABCD$ трапеция болсун (108-сүрөт). Трапециянын параллель жактары негиздери, параллель эмес жактары каптал жактары деп аталышат. $AB \| DC$ болгондуктан, AB, DC – негиздери, AD, BC – каптал жактары болушат.

Эгерде трапециянын бир бурчу 90° ка барабар болсо, анда ал **тик бурчтуу** трапеция болот. Каптал жактары барабар трапеция **тең капталдуу** трапеция деп аталат.

Трапециянын чокусунан негизине түшүрүлгөн перпендикуляр анын **бийиктиги** деп аталат. $DK \perp AB$, DK – кесиндиси D чокусунан AB негизине түшүрүлгөн бийиктик болот.



108-сүрөт.

Каптал жактарынын тең ортолорун туташтыруучу кесинди трапециянын **орто сызыгы** деп аталат. EF – трапециянын орто сызыгы.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Трапециянын параллелограммдан кандай айырмасы бар?
2. $ABCD$ трапециясы берилген. B чокусунан CD каптал жагына жүргүзүлгөн параллель түз сызык AD чоң негизин E чекитинде кесип өтөт. ΔABE нун периметри 18 дм, ал эми $ED=5$ дм болсо, берилген трапециянын периметрин тапкыла.
3. Трапециянын каптал жагы 4 барабар бөлүккө бөлүнүп, бөлүү чекиттери аркылуу экинчи каптал жагына чейин, негизине параллель болгон кесиндилер жүргүзүлгөн. Эгерде берилген трапециянын негиздери 12 дм жана 32 дм болсо, параллель кесиндилердин узундуктарын тапкыла.
4. Трапециянын эки бурчу 112° жана 65° ка барабар. Анын калган бурчтарын эсептегиле.
5. Трапециянын диагоналы анын тиешелүү бурчтарынын биссектрисасында жатат. Бул трапециянын эки жагы барабар болоорун далилдегиле. Ал трапецияны тең капталдуу деп айтууга мүмкүнбү?
6. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги бурчтары барабар болоорун далилдегиле.
7. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары барабар. Далилдегиле.
8. Тең капталдуу трапециянын кичине негизи 8 см, каптал жагы 10 см, ал эми негизиндеги тар бурчу 45° болсо, анда берилген тең капталдуу трапециянын периметрин эсептегиле.

9. Эгерде тең капталдуу трапециянын карама-каршы бурчтарынын айырмасы 56° болсо, трапециянын бурчтарын тапкыла.
10. а) Төрт жагы; б) эки негизи жана эки диагоналы боюнча трапецияны түзгүлө. Маселенин дайыма эле чыгарылышы болобу?
11. Тең капталдуу трапециянын кичине негизи каптал жагына барабар, ал эми диагоналы каптал жагына перпендикуляр. Трапециянын бурчтарын аныктагыла.
12. Тең капталдуу трапециянын диагоналы тар бурчун тең экиге бөлөт. Трапециянын периметри 15 м, ал эми чоң негизи 6 м болсо, кичине негизин тапкыла.
13. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи 10,5 дм, каптал жагы 4 дм, ал эми алардын арасындагы бурчу 60° болсо, кичине негизинин узундугун эсептегиле.
14. Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан түшүрүлгөн бийиктик анын чоң негизин 8 см жана 26 см узундуктагы эки кесиндиге бөлөт. Берилген трапециянын негиздерин эсептегиле.

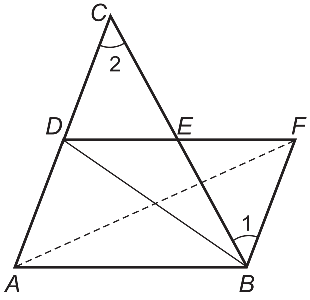
§ 25. ҮЧ БУРЧТУКТУН, ТРАПЕЦИЯНЫН ОРТО СЫЗЫКТАРЫ

Адегенде үч бурчтуктун орто сызыгы жөнүндөгү түшүнүккө жана анын касиетине токтолобуз.

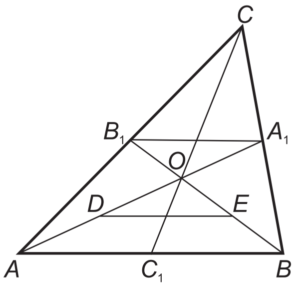
Аныктама. Үч бурчтуктун эки жагынын тең ортолорун туташтыруучу кесинди анын **орто сызыгы** деп аталат. Мисалы, ABC үч бурчтугунун (109-сүрөт) AC жагынын тең ортосу D чекити, BC нын ортосу E чекити болсо, анда DE кесиндиси берилген үч бурчтуктун орто сызыгы болот. Ар кандай үч бурчтуктун орто сызыгы дайыма болоору түшүнүктүү.

43-теорема. **Үч бурчтуктун эки жагынын ортолорун туташтыруучу орто сызыгы үчүнчү жагына параллель жана анын жарымына барабар болот.**

Далилдөө. ABC үч бурчтугу берилсин (109-сүрөт). DE орто сызыгын жүргүзөбүз. Мында $DE \parallel AB$ жана $DE=\frac{1}{2}AB$ болоорун далилдейбиз. DE шооласына E ден баштап $EF=DE$ кесиндисин өлчөп коебуз. Анда $\Delta DEC=\Delta BEF$ (1-белгиси боюнча) болот. Мындан $DC=BF$ (1) жана $\angle 1=\angle 2$ (2) боло тургандыгы түшүнүктүү. Натыйжада $AD=DC=BF$ (3) болот. (2) ден $DC \parallel BF$ же $AD \parallel BF$ (4) экендиги келип чыгат (параллель түз сызыктардын касиети). Анда (3), (4) дан $ABFD$ төрт бурчтугу параллело-



109-сүрөт.



110-сүрөт.

грамм болот (37-теорема). Ошентип, $DF \| AB$ жана $DF=AB$ же тиешелүү түрдө $DE \| AB$ жана $DE=\frac{1}{2}AB$ болот, мында $DF=2DE$ экендиги эске алынды. Теорема далилденди.

Үч бурчтуктун чокусун, ал чокунун каршысында жаткан жактын тең ортосу менен туташтыруучу кесинди ал үч бурчтуктун медианасы боло тургандыгы белгилүү. Мисалы, ABC үч бурчтугунун (110-сүрөт) A чокусун BC жагынын тең ортосунда жаткан A_1 чекити менен туташтырсак, AA_1 медианасына ээ болобуз, мында A_1 чекити медиананын негизи деп аталат.

44-теорема. **Үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет да, ал чекит ар бир медиананы тиешелүү негизинен баштап эсептегенде $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлөт.**

Д а л и л д ө ө. ABC үч бурчтугу берилсин (110-сүрөт). AA_1 жана BB_1 медианаларын жүргүзөбүз. Алар O чекитинде кесилишсин. B_1A_1 кесиндиси ABC үч бурчтугунун орто сызыгы болот. Анда 43-теореманын негизинде $B_1A_1 \| AB$ жана $B_1A_1=\frac{AB}{2}$. AO кесиндисинин ортосу D чекити, ал эми BO кесиндисинин ортосу E чекити болсун. Анда DE кесиндиси AOB үч бурчтугунун орто сызыгы болот. Ошол эле, 43-теореманын негизинде $DE \| AB$ жана $DE=\frac{1}{2}AB$ экендигин байкайбыз. Демек, $B_1A_1=DE$ жана $B_1A_1 \| DE$. Мындан, 43-теоремадагыга окшош талкуулап, $\Delta OA_1B_1=\Delta ODE$ экендигине ээ болобуз. Демек, $A_1O=OD$ жана $B_1O=OE$ болот. $OD=DA$, $OE=EB$ экендиги белгилүү. Натыйжада $A_1O=OD=DA$, $B_1O=OE=EB$ экендигин алабыз, б. а. AA_1 жана BB_1 медианаларынын ар бири үч барабар бөлүккө бөлүндү.

Ошентип, AA_1 медианасы BB_1 медианасын негизинен баштап эсептегенде үчтөн бир бөлүккө бөлөт. Ушундай эле талкуулоонун негизинде CC_1 медианасы да BB_1 медианасын $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлөт, б. а. O чекити аркылуу өтөт. Демек, үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет жана ал чекитте ар бир медиана негизинен баштап эсептегенде $\frac{1}{3}$ бөлүккө бөлүнөт, б. а. $OA_1 = \frac{AA_1}{3}$, $OB_1 = \frac{BB_1}{3}$, $OC_1 = \frac{CC_1}{3}$. Теорема далилденди.

Мындан $AO = \frac{2}{3}AA_1$, $BO = \frac{2}{3}BB_1$, $CO = \frac{2}{3}CC_1$ экендиги келип чыгат.

Э с к е р т ү ү. Үч бурчтуктун медианаларынын кесилишкен чекитин анын оордук борбору деп аташат.

45-теорема. **Трапециянын орто сызыгы негиздерине параллель жана негиздеринин суммасынын жарымына барабар.**

Д а л и л д ө ө. 108-сүрөттөгү чиймеден пайдаланабыз. $EF \parallel AB$, $EF \parallel DC$ жана $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ болорун далилдейбиз.

AD жагынын тең ортосу болгон E чекити аркылуу AB жана DC негиздерине параллель болгон түз сызык жүргүзсөк, BC каптал жагын F чекитинде кесип өтөт. Фалестин теоремасы (42-теорема) боюнча $AE=ED$ болгондуктан, $BF=FC$ болот. Анда EF — трапециянын орто сызыгы болот. Жогорудагы түзүү боюнча $EF \parallel AB$, $EF \parallel DC$. Демек, теореманын биринчи бөлүгү далилденди.

Фалестин теоремасынын негизинде O чекити да BD кесиндисинин ортосунда жатат. Анда EO жана OF кесиндилери тиешелүү түрдө ABD, BCD үч бурчтуктарынын орто сызыктары болушат: $EO = \frac{1}{2}AB$, $OF = \frac{1}{2}DC$ (43-теорема).

$EF = EO + OF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ — теорема толук далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. ΔABC берилген. E — AC жагынын ортосу, F — BC жагынын ортосу. Эгерде: а) $AB=12$ дм болсо, EF орто сызыгын; б) $EF=4{,}5$ см болсо, AB жагын тапкыла.
2. Үч бурчтуктун жактары 6 м, 9 м, 13 м. Анын орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун жактарын тапкыла.
3. Үч бурчтук берилген. Анын орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун жактары 5 дм, 7 дм, 10 дм. Берилген үч бурчтуктун жактарын аныктагыла.
4. Үч бурчтуктун периметри 24 м. Ал үч бурчтуктун орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.
5. Үч бурчтуктун орто сызыктарынан түзүлгөн үч бурчтуктун периметри 15 дм. Берилген үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.
6. Ар кандай томпок төрт бурчтуктун жактарынын ортолору параллелограммдын чокулары болот. Далилдегиле.

7. Үч бурчтуктун жактарынын катышы 4:3:5 катышына барабар. Бардык жактарынын ортолорун туташтыруудан пайда болгон үч бурчтуктун периметри 3,6 дм. Берилген үч бурчтуктун жактарын тапкыла.

8. a түз сызыгынын ар түрдүү жагында болуп, андан 12 дм жана 5 дм аралыкта жаткан A жана B чекиттери берилген. AB кесиндисинин ортосундагы O чекитинен a түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Көрсөтмө. B чекити аркылуу a га параллель түз сызык жүргүзүп, ага A дан жана O дон перпендикуляр түшүрүү керек.

9. Үч бурчтуктун жактарынын ортолору берилсе, ал үч бурчтукту түзгүлө.

10. Үч бурчтуктун чокулары анын орто сызыгы аркылуу өтүүчү түз сызыктан бирдей алыстыкта болушат. Далилдегиле.

11. Үч бурчтуктун орто сызыктары аны төрт барабар үч бурчтуктарга бөлөөрүн далилдегиле.

12. Үч бурчтуктун бир медианасы 6 м ге барабар. Медианалары кесилишкен чекитте бул медиана кандай бөлүктөргө бөлүнөт?

Көрсөтмө. Ар кандай үч бурчтуктун эки медианасы, кесилишкен чекитте, чокуларынан баштап эсептегенде, 2 : 1 катышында бөлүнө тургандыгынан пайдалангыла.

13. Ромбдун жактарынын ортолору тик бурчтуктун чокулары болоорун далилдегиле.

14. Тик бурчтуктун карама-каршы жактарынын ортолорун туташтыруучу кесиндилер ромбдун диагоналдары болоорун далилдегиле.

15. Трапециянын негиздери 6,4 дм жана 8,6 дм. Орто сызыгын тапкыла.

16. Кесиндинин учтары түз сызыктан 18 дм жана 8 дм аралыкта. Кесиндинин ортосу түз сызыктан кандай аралыкта болот? Эки учурду карагыла.

17. Трапециянын негиздеринин катышы 2 : 3 кө барабар, орто сызыгы 24 дм. Негиздерин тапкыла.

18. Трапециянын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесинди анын негиздерине параллель жана негиздеринин айырмасынын жарымына барабар болоорун далилдегиле.

19. Трапециянын орто сызыгы 10 м болуп, диагоналы аркылуу айырмасы 4 м болгон эки кесиндиге бөлүнөт. Трапециянын негиздерин тапкыла.

20. Эгерде трапециянын диагоналдары анын орто сызыгын үч барабар кесиндилерге бөлсө, анда трапециянын негиздеринин катышын эсептегиле.

21. Тик бурчтуу трапеция диагоналы аркылуу эки үч бурчтукка бөлүнгөн. Алардын бирөө жагы a га барабар болгон тең жактуу үч бурчтук, ал эми экинчиси тик бурчтуу үч бурчтук. Трапециянын орто сызыгын тапкыла.
22. Тең капталдуу трапециянын негизиндеги тар бурчу 45°, бийиктиги h, ал эми орто сызыгы d. Трапециянын негиздерин аныктагыла.
23. Тең капталдуу трапециянын кең бурчунун чокусунан түшүрүлгөн бийиктиги чоң негизин 3,5 дм жана 8,5 дм узундуктагы кесиндилерге бөлөт. Трапециянын орто сызыгын эсептегиле.
24. Трапециянын негиздери 5,6 м жана 2,4 м. Бул трапециянын орто сызыгын диагоналдардын бири кандай кесиндилерге бөлөт?
25. Айлананын диаметринин учтары жанымасынан 3,4 дм жана 1,2 дм аралыкта. Диаметрдин узундугун тапкыла.
26. Бир негизи, бийиктиги жана эки диагоналы боюнча трапецияны түзгүлө. Кайсы учурда чыгарылышы болбойт?

V ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Төрт бурчтукка аныктама бергиле.
2. Томпок жана томпок эмес төрт бурчтуктар кандай айырмаланышат?
3. Төрт бурчтуктун канча диагоналы бар?
4. Төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы канчага барабар?
5. Параллелограммга аныктама бергиле.
6. Параллелограммдын кандай касиеттерин билесиңер?
7. Томпок төрт бурчтуктун параллелограмм боло турган белгилерин атагыла, канча белгиси бар?
8. Фалестин теоремасы кандай баяндалат?
9. Ромбду параллелограммдан айырмалап туруучу кандай касиеттерин билесиңер?
10. Тик бурчтукту параллелограммдан айырмалап туруучу кандай касиеттери бар?
11. Квадрат тик бурчтук (ромб) боло алабы?
12. Үч бурчтуктун орто сызыгын аныктагыла.
13. Үч бурчтуктун орто сызыгы жөнүндөгү теореманы баяндагыла.
14. Үч бурчтуктун медианаларынын кандай касиеттери бар?
15. Трапециянын кандай түрлөрүн билесиңер?
16. Трапециянын орто сызыгы эмнеге барабар? Анын кандай касиети бар?

V ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Томпок төрт бурчтуктун бир бурчу α. Анын каршысындагы бурчу 9 эсе чоң, ал эми калган бурчтары андан 3; 7 эсе чоң. Томпок төрт бурчтуктун бурчтарын тапкыла.

2. Эгерде томпок төрт бурчтуктун бардык бурчтары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.

3. Параллелограммдын бир бурчуна биссектриса жүргүзүлгөн. Эгерде параллелограммдын жактары 5 см жана 6 см болсо, ал биссектриса параллелограммдын чоң жагын кандай кесиндилерге бөлөт?

4. Эгерде ромбдун диагоналдарынын бири жагына барабар болсо, анын бурчтарын тапкыла.

5. Трапециянын диагоналдарынын ортолору жана каптал жактарынын ортолору бир түз сызыкта жатаарын далилдегиле.

6. Трапециянын негиздери a жана b берилген. Анын диагоналдарынын ортолорун туташтыруучу кесиндинин узундугун тапкыла.

7. Трапециянын каптал жагы үч барабар бөлүккө бөлүнгөн. Бөлүү чекиттеринен негиздерине параллель кесиндилер жүргүзүлгөн. Эгерде трапециянын негиздери 4 дм жана 10 дм болсо, ал кесиндилердин узундуктарын тапкыла.

Көрсөтмө. Бөлүү чекиттери аркылуу экинчи каптал жагына параллель кесиндилер жүргүзгүлө.

8. Параллелограммдын эки бурчунун айырмасы 110° болсо, анын бардык бурчтарын тапкыла.

9. Трапециянын орто сызыгы 7 см, негиздеринин бири экинчисинен 4 см ге чоң. Негиздерин тапкыла.

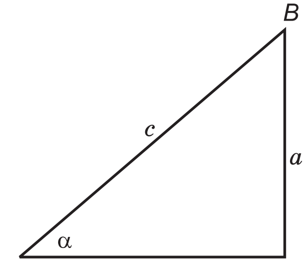
10. Тең капталдуу трапецияда: а) диагоналдары; б) негизиндеги бурчтары барабар болоорун далилдегиле.

VI глава ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН ЖАКТАРЫ МЕНЕН БУРЧТАРЫНЫН АРАСЫНДАГЫ БАЙЛАНЫШТАР

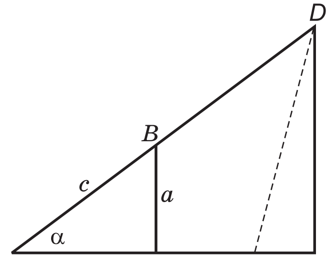
§ 26. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТУН ЖАКТАРЫНЫН КАТЫШЫ

Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланыштар геометриялык көп суроолорду окуп-үйрөнүүдө маанилүү ролду ойнойт.

ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (111-сүрөт). Анын катеттерин a, b гипотенузасын c, бир тар бурчун, мисалы A бурчун, α (альфа) аркылуу белгилейли. $\angle C = 90^\circ$ болсун. Бул үч бурчтуктун жактарынын катышын карайбыз. Адегенде α тар бурчунун косинусу[1] деген түшүнүккө көңүл буруп көрөлү.



111-сүрөт.



112-сүрөт.

А н ы к т а м а. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчуна жанаша жаткан катеттин гипотенузага болгон катышы ал бурчтун косинусу деп аталат.** Ал кыскача

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

түрүндө жазылат.

Бул катыштын маанилүү бир өзгөчөлүгүн белгилей кетели. (1) катыш α бурчунун чоңдугунан гана көз каранды болот, ал тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын узундуктарынан көз

---

[1] Латын сөзү, «*синусту толуктагыч*» же «*синус менен бирге*» деген мааниде. Кыскача «*cos*» түрүндө белгиленет.

каранды эмес. Демек, берилген тар бурчтун косинусу бир гана мааниге ээ болот.

46-теорема . **Берилген бурчтун косинусу ал бурчтун чоңдугунан гана көз каранды болот.**

Д а л и л д ө ө. ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин, ага карата (1) барабардык аткарылат деп эсептейли (112-сүрөт).

AB шооласына $AD=k\cdot c$ кесиндисин, ал эми AC шооласына $AE=k\cdot b$ кесиндисин (k – оң сан) өлчөп коебуз. Мында ΔADE тик бурчтуу үч бурчтук жана $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ болоорун далилдейбиз.

Чындыгында эле, $DE\perp AE$ болот. Тескерисинче, DE кесиндиси AE түз сызыгына перпендикуляр эмес деп эсептейли. Анда D чекитинен AE түз сызыгына DF перпендикулярын түшүрүүгө болот. Натыйжада ADF тик бурчтуу үч бурчтугу үчүн $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ катышын жаза алабыз. Ал эми (1) барабардыктын негизинде $\frac{b}{c}=\frac{AF}{AD}$ болот.

Бирок, $\frac{AE}{AD}=\frac{k\cdot b}{k\cdot c}=\frac{b}{c}$ же $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AD}$ болуп калат. Акыркы барабардыктан $AE=AF$ экендиги келип чыгат, б. а. E жана F чекиттери дал келишет да, $DE\perp A\ E$ жана $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ болот. Теорема далилденди.

Ошентип, (1) катышты каалагандай тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун косинусу үчүн жазууга болот.

Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын дагы төмөндөгүдөй эки катышын аныктоого болот.

А н ы к т а м а. **Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчунун каршысында жаткан катеттин гипотенузга болгон катышы ал бурчтун синусу[1] деп аталат.** Ал

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \qquad (2)$$

түрүндө жазылат.

А н ы к т а м а. Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчунун каршысындагы катеттин жанаша жаткан катетке болгон катышы ал бурчтун **тангенси**[2] деп аталат. Аны

$$tg\alpha=\frac{a}{b} \qquad (3)$$

түрүндө жазабыз.

---

[1] Латын сөзү, «*ийрилик, ийцу*» деген маанини аныктайт. Кыскача «*sin*» түрүндө белгиленип жазылат.

[2] Латын сөзү, «*жанышуучу*» деген маанини аныктайт. Кыскача «*tg*» түрүндө белгиленип жазылат.

α тар бурчунун косинусу сыяктуу эле, α бурчунун синусу да, тангенси да ал бурчтун чоңдугунан гана көз каранды болот. Демек, ар бир α тар бурчуна $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $\operatorname{tg}\alpha$ нын бирден гана маанилери туура келет.

Кээде α бурчунун котангенсин (латын сөзү, тангенсти толуктоочу дегенди түшүндүрөт) аныктоочу катышты да колдонушат.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \tag{4}$$

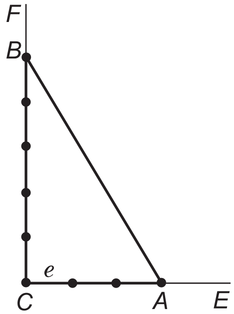
Котангенсти кыскача «ctg» түрүндө жазышат.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ жана $\operatorname{ctg}\alpha$ ларды жалпысынан тар бурчтун тригонометриялык функциялары дейбиз.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тар бурчунун косинусу 3:5 ке барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

Чыгаруу. Изделүүчү тик бурчтуу үч бурчтук ABC болсун: $AB=c$ — гипотенузасы, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=\alpha$, $BC=a$, $CA=b$ — катеттери. Мында $\cos\alpha=\frac{CA}{AB}=\frac{b}{c}=\frac{3}{5}$ болушу талап кылынат. e бирдик кесиндисин тандап алабыз. $CE\perp CF$ (113-сүрөт) шоолаларын жүргүзөбүз. CE шооласына $CA=3e$ кесиндисин өлчөп коебуз. A чекитин борбор, $AB=5e$ кесиндисин радиус кылып алып айлана сызсак, ал CF шооласын B чекитинде кесип өтөт. Натыйжада ABC тик бурчтуу үч бурчтугу түзүлөт. Ал тик бурчтуу үч бурчтукта $\cos\alpha=\frac{CA}{AB}=\frac{3e}{5e}=\frac{3}{5}$ болот. Демек, түзүлгөн үч бурчтук маселенин шартын канааттандырат.



113-сүрөт.

2. Тар бурчунун косинусу: 1) $\frac{3}{4}$ кө; 2) $\frac{5}{8}$ ке; 3) 0,7ге; 4) 0,5ке барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

3. Тар бурчунун синусу: 1) $\frac{1}{2}$ ге; 2) 2 : 5ке; 3) 0,6га барабар. Ар бир учурга туура келүүчү тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

4. Тар бурчунун тангенси: 1) $\frac{2}{3}$ ге; 2) $\frac{5}{3}$ ке; 3) 1ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

5. Тар бурчунун котангенси: 1) $\frac{1}{2}$ ге; 2) 1,5 ке; 3) 0,8 ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.

6. Тар бурчунун косинусу $\frac{2}{3}$ ге, ал эми ошол бурчтун чокусунан жүргүзүлгөн биссектрисасы m ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтук түзгүлө.

7. Эгерде тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 5 дм, негизи 6 дм, бийиктиги 4 дм болсо, негизиндеги бурчунун: а) косинусун; б) синусун; в) тангенсин; г) котангенсин тапкыла.

8. 7-маселеде берилген тең капталдуу үч бурчтуктун чокусундагы бурчунун жарымынын: а) косинусун; б) синусун; в) тангенсин; г) котангенсин эсептегиле.

§ 27. ПИФАГОРДУН ТЕОРЕМАСЫ

Пифагор[1] тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын арасындагы байланышты туюндуруучу өтө маанилүү теореманы ачкан.

47-теорема (Пифагордун теоремасы). **Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты катеттеринин квадраттарынын суммасына барабар.**

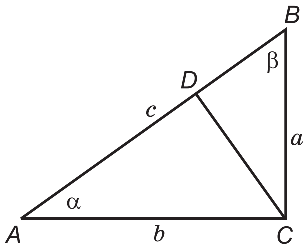
Д а л и л д ө ө. ABC тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин (114-сүрөт). Жогорудагы белгилөөлөрдү пайдаланабыз да, боло тургандыгын далилдейбиз.

$$c^2=a^2+b^2 \tag{1}$$

Берилген үч бурчтуктун C тик бурчунун чокусунан AB гипотенузасына CD перпендикулярын түшүрсөк, эки тик бурчтуу үч бурчтук пайда болот: ΔACD жана ΔBCD.

ABC жана ACD тик бурчтуу үч бурчтуктарынан α тар бурчунун косинусун жазабыз (46-теорема):

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \text{ жана } \cos\alpha=\frac{AD}{b}.$$



114-сүрөт.

Натыйжада $\frac{b}{c}=\frac{AD}{b}$ болот. Мындан

$$b^2=c\cdot AD \tag{x}$$

болот.

Эми ABC жана BCD тик бурчтуу үч бурчтуктарынан β (бета) тар бурчунун косинустарын жазабыз (46-теорема):

$$\cos\beta=\frac{a}{c} \quad \text{жана} \quad \cos\beta=\frac{DB}{a}$$

[1] Байыркы грек математиги, б.э.ч.580—500-жж.

Натыйжада $\frac{a}{c}=\frac{DB}{a}$ болот. Жогорудагыдай эле

$$a^2=c\cdot DB \qquad (y)$$

болот.

(x) жана (y) барабардыктарын мүчөлөп кошуп, $AD+DB=$ $=AB=c$ экендигин эске алсак,

$$c^2=a^2+b^2 \qquad (1)$$

келип чыгат. Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери: а) 4 см жана 3 см; б) 0,8 м жана 0,6 м; в) 6 дм жана 9,1 дм болсо, гипотенузасын тапкыла.
2. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 5 м, ал эми бир катети 3 м. Анын экинчи катетин эсептегиле.
3. Тик бурчтуктун жактары 8 дм жана 6 дм. Диагоналын тапкыла.
4. Тик бурчтуктун бир жагы 91 см, диагоналы 109 см болсо, анын экинчи жагын эсептегиле.
5. Квадраттын: а) жагы a берилген, диагоналын; б) диагоналы d берилген, жагын тапкыла.
6. Ромбдун диагоналдары: а) 6 м жана 8 м; б) 12 см жана 16 см; в) 1 дм жана 2,4 дм. Жактарын эсептегиле.
7. Ромбдун жагы 13 дм, ал эми диагоналдарынын бири 10 дм. Экинчи диагоналын тапкыла.
8. ABC — тик бурчтуу үч бурчтук, $\angle C=90^\circ$, a, b — катеттер, c — гипотенуза, a_1, b_1 — тиешелүү катеттердин гипотенузага түшүрүлгөн проекциялары. а) $a=\sqrt{a_1c}$; б) $b=\sqrt{b_1c}$ формулалары туура болоорун далилдегиле.

   Көрсөтмө. § 27, (x), (y) барабардыктарынан пайдалангыла.
9. 8-маселеде: а) $a=8$ см; $a_1=6{,}4$ см болсо, b, c, b_1 ди; б) $b=6$ дм; $b_1=3{,}6$ дм болсо, a , c, a_1 ди; в) $a_1=4{,}2$ м, $b_1=5{,}8$ м болсо, a, b, c ны тапкыла.
10. p жана q кесиндилери берилген. $z=\sqrt{pq}$ кесиндисин түзгүлө.

    Көрсөтмө. 8-маселеде чыгарылган формулалардан пайдалангыла.
11. а) Катеттери; б) катети жана гипотенузасы боюнча тик бурчтуу үч бурчтукту түзгүлө.
12. Тик бурчтуктун жактары a жана b берилген. Ага сырттан сызылган айлананы түзгүлө жана анын радиусун тапкыла.

13. Тик бурчтуктун жактарынын катышы 4:3 кө барабар. Ага сырттан сызылган айлананын радиусу 10 см болсо, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.
14. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 13 м, негизи 10 м. Бийиктигин эсептегиле.
15. Тең жактуу үч бурчтуктун: а) a жагы берилген, m медианасын; б) m медианасы берилген, жагын тапкыла.
16. Тең капталдуу трапециянын негиздери 11 дм жана 23 дм, каптал жагы 10 дм. Трапециянын бийиктигин эсептегиле.
17. Тең капталдуу трапециянын негиздери a жана b, каптал жагы c. Диагоналын тапкыла.

§ 28. НЕГИЗГИ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ТЕҢДЕШТИКТЕР

α тар бурчунун ар бир мааниси боюнча $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $\mathrm{tg}\alpha$ нын тиешелүү маанилерин аныктоого болот. Ошондуктан аларды жогоруда тригонометриялык[1] функциялар деп атадык.

Биз төмөндө бир эле α тар бурчунун тригонометриялык функцияларынын байланышын туюндуруучу теңдештиктерди далилдейбиз.

1. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугу берилсин. Пифагордун теоремасын жазабыз:

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (1)$$

§ 26, (1) жана (2) формулалардан

$$b=c\cdot\cos\alpha\ ,\quad a=c\cdot\sin\alpha$$

болоору белгилүү.

Бул маанилерди (5) ке койсок,

$$(c\cdot\sin\alpha)^2+(c\cdot\cos\alpha)^2=c^2,$$

же

$$\sin\alpha^{\,2}+\cos\alpha^{\,2}=1 \qquad (2)$$

келип чыгат. Бул α бурчунун синусу менен косинусунун арасындагы байланышты берүүчү теңдештик.

2. Берилген тик бурчтуу үч бурчтук үчүн

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}$$

болоору белгилүү. Бул барабардыкка 1-учурдагы a менен b нын маанилерин койсок,

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (4)$$

[1] Грек сөзү, «*үч бурчту+өлчөө*» деген эки сөздүн биригүүсүн мүнөздөйт.

келип чыгат. Бул да каалагандай α тар бурчу үчүн теңдештик болуп эсептелет. (3)

3. (2) теңдештиктин ар бир мүчөсүн адегенде $\cos^2\alpha$ га, экинчи жолу $\sin^2\alpha$ га бөлүп, натыйжада төмөндөгүдөй эки теңдештикти алууга болот:

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (5)$$

$$1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (6)$$

4. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha+\beta=90^\circ$ боло тургандыгы белгилүү. Мындан $\beta=90^\circ-\alpha$ болот. § 26, (2) формулада $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, ал эми § 27 да $\cos\beta=\frac{a}{c}$ же $\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{c}$ экендиги белгилүү. Натыйжада

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha \quad (7)$$

теңдештигине ээ болобуз (α тар бурчу үчүн).

Ушундай эле жол менен

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha \quad (8)$$

теңдештигин алууга болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Негизги тригонометриялык теңдештиктерди пайдаланып төмөнкү туюнтмаларды жөнөкөйлөнткүлө:

а) $2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; б) $\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^3\alpha$;

в) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$; г) $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\sin\alpha$.

2. Туюнтманы жөнөкөйлөнткүлө.

а) $(1+tg^2\alpha)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha$; б) $(1+ctg^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha+1$;

в) $(tg\alpha\cdot ctg\alpha-\cos^2\alpha)\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha+\sin\alpha$.

3. Ар кандай α тар бурчу үчүн теңдештикти далилдегиле:

а) $(2tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha)\sin\alpha+3\sin\alpha=5\sin\alpha$;

б) $(1+tg^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

4. α жана β тар бурчтары үчүн теңдештикти далилдегиле:

$$(1+tg^2\alpha)^2-\frac{1}{\cos^4\alpha}+3\cos^2\beta+2\sin^2\beta=2+\cos^2\beta.$$

5. α тар бурчу үчүн:
а) $tg(90^\circ-\alpha)=ctg\alpha$; б) $ctg(90^\circ-\alpha)=tg\alpha$ болорун далилдегиле.
Көрсөтмө. $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ теңдештиктеринен пайдалангыла.

6. Эгерде α тар бурчу үчүн: 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{60}{61}$; 3) $\cos\alpha=0,8$ болсо, $\sin\alpha$ ны, $tg\alpha$ ны, $ctg\alpha$ ны тапкыла.

7. Эгерде α тар бурчу үчүн: 1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; 3) $\sin\alpha=0,6$ болсо, $\cos\alpha$ ны, $tg\alpha$ ны, $ctg\alpha$ ны тапкыла.

§ 29. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН АЙРЫМ МААНИЛЕРИН ЭСЕПТӨӨ

Таблицаларды же эсептөөчү жөнөкөй аспаптарды колдонбой туруп эле тар бурчтун синусун, косинусун жана тангенсин эсептөөгө да болот. Биз төмөндө ошондой эсептөөлөрдүн айрым учурларын көрсөтөбүз. Ал үчүн бурчтун синусунун, косинусунун, тангенсинин аныктамаларын, геометриянын белгилүү теоремаларын жана §28 гы айрым теңдештиктерди пайдаланабыз.

1. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугу берилип, $\alpha=30^\circ$ болсун деп, $\sin30^\circ$, $\cos30^\circ$, $tg30^\circ$ маанилерин эсептейбиз.

Тик бурчтуу үч бурчтукта 30° бурчтун каршысында жаткан катет гипотенузанын жарымына барабар боло тургандыгы белгилүү. Анда $a=\frac{c}{2}$ болот. Бирок, § 26, (2) формуладагы $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ экендигин пайдалансак, анда $\sin30^\circ=\frac{1}{2}$ болот.

Пифагордун теоремасын пайдалансак, $a^2+b^2=c^2$ (5) болору белгилүү. $\alpha=30^\circ$ болгондо, (5) формуладан $(\frac{c}{2})^2+b^2=c^2$ же $(\frac{b}{c})^2=\frac{3}{4}$, мындан $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болот.

Демек, $\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болот. Эми $tg=30^\circ$ маанисин эсептөө оңой. § 28 та (7) теңдештикти пайдалансак, $tg30^\circ=\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ болот.

2. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha=60^\circ$ болсун. $\sin60^\circ$, $\cos60^\circ$, $tg60^\circ$ маанилерин эсептейбиз.

Ал үчүн § 28 гы (10), (11) теңдештиктерди жана 1-учурда табылган маанилерди пайдаланабыз.

$\sin60^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ушуга окшош эсептегенде, $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ болот. Анда $tg60^\circ=$ $=\frac{\sin60^\circ}{\cos60^\circ}=\sqrt{3}$ же $tg60^\circ=\sqrt{3}$ болот.

3. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугунда $\alpha=45^\circ$ болгон учурду карайлы. $\sin45^\circ$, $\cos45^\circ$, $tg45^\circ$ маанилерин эсептөөгө токтолобуз. Мында $a=b$ боло тургандыгы түшүнүктүү. Пифагордун теоремасын колдонсок, $a^2+b^2=c^2$ же $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ болот. Анда $\sin45^\circ=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ маанисине ээ болобуз. Анда $tg45^\circ=1$ болот.

Жогорудагыдай талкуулоолорду жүргүзүп, $\sin0^\circ$, $\cos0^\circ$, $tg0^\circ$, $\sin90^\circ$, $\cos90^\circ$ маанилерин өз алдыңарча эсептегиле. Эмне үчүн $tg90^\circ$ мааниге ээ болбойт? Түшүндүрүп бергиле.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Белгилүү математикалык таблицаны жана микрокалькуляторду пайдаланбай туруп, тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчу 0° болгондо $\sin0^\circ=0$, $\cos0^\circ=1$, $tg0^\circ=0$ болоорун далилдегиле.

2. $\sin90^\circ=1$ жана $\cos90^\circ=0$ боло тургандыгын кантип түшүндүрүүгө болот?

3. Тик бурчтуу үч бурчтуктун 60° бурчунун косинусун, синусун, тангенсин жана котангенсин эки түрдүү жол менен эсептегиле: 1) жактарынын байланышынан пайдалангыла; 2) 30° бурчунун белгилүү маанилеринен пайдаланып, $(90^\circ-30^\circ)$ айырмасынын маанилерин синусун, косинусун, тангенсин жана котангенсин аныктоочу теңдештиктерди колдонгула.

4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун касиетинен пайдаланып, 45° бурчунун косинусун, синусун, тангенсин жана котангенсин эсептегиле.

5. Эгерде: а) $\alpha=30^\circ$; б) $\alpha=60^\circ$ болсо, $(1-\cos^2\alpha)\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\sin\alpha$ туюнтмасынын маанисин тапкыла.

6. Эгерде $\alpha=45^\circ$ болсо, $\frac{(tg^2\alpha+1)\cdot\cos^2\alpha}{1+tg\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ туюнмасынын маанисин эсептегиле.

7. Туюнтманын маанисин тапкыла:

а) $tg30^\circ\cdot\cos30^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot tg45^\circ\cdot tg60^\circ$;

б) $\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ-\cos^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ+\cos^2 45^\circ+\sin^2 45^\circ$.

§ 30. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

30.1. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН МААНИЛЕРИН ТАБЛИЦАНЫ КОЛДОНУП ЭСЕПТӨӨ

Жогоруда 30°, 45°, 60° бурчтарынын тригонометриялык функцияларынын маанилерин так эсептеп алуу мүмкүн экендигин көрдүк.

Бирок, бардык эле тар бурчтардын тригонометриялык функцияларынын маанилерин андай жол менен эсептеп чыгарууга мүмкүн эмес. Ошондуктан айрым учурларда таблицаларды да пайдаланышат.

Мисалы, В. М. Брадистин «Төрт орундуу математикалык таблицаларында» тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилери берилген. $\sin 38^\circ 30'$ маанисин таблицадан табуу үчүн синустар таблицасынын сол жагындагы «градустар» мамычасынан 38 санын, ал эми жогору жагындагы «минуталардын» сабынан 30 санын табабыз. Алардын кесилишинде 0,6225 саны жазылган. Демек, $\sin 38^\circ 30' = 0{,}6225$ болот. Калган тригонометриялык функциялардын маанилери да ушуга окшош табылат. Айрым учурларда минуталарга карата түзөтүүлөрдү колдонууга туура келет. Ал түшүнүктөр таблицада баяндалган.

Айрым учурда $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}4663$ мааниси боюнча α бурчун табуу талап кылынат. Тангенстер таблицасынан 0,4663 санын издейбиз. Ал сандын сол жагындагы мамычадан 25 саны табылат. Демек, $\alpha = 25^\circ$ болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төрт орундуу математикалык таблицаларды колдонуп, төмөндөгү бурчтардын синустарынын жана косинустарынын маанилерин тапкыла: 1) 35°; 2) $18^\circ 36'$; 3) $40^\circ 56'$; 4) 75°; 5) $85^\circ 12'$.
2. Төрт орундуу математикалык таблицаларды колдонуп, төмөндөгү бурчтардын тангенстеринин жана котангенстеринин маанилерин тапкыла: 1) $20^\circ 30'$; 2) 35°; 3) $40^\circ 15'$; 4) 58°; 5) $80^\circ 45'$.
3. $\alpha = 30^\circ$; 45°; 60° болгондо табылган три гонометриялык функциялардын жогорудагы маанилерин (§ 29) алардын таблицалык маанилери менен салыштыргыла.
4. а) $\sin 37^\circ$ жана $\cos 53^\circ$; б) $\mathrm{tg}\,48^\circ 36'$ жана $\mathrm{ctg}\,41^\circ 24'$ маанилерин салыштырып көргүлө. Өзгөчөлүгүн көрсөткүлө.

5. Таблицаны колдонуп: а) $\sin 40^\circ$ жана $\sin 70^\circ$; б) $\cos 20^\circ$ жана $\cos 60^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 30^\circ$ жана $\mathrm{tg}\, 45^\circ$ маанилеринин кайсынысы чоң экендигин аныктагыла. Кандай корутунду жасоого болот?

6. Таблицаны пайдаланып α тар бурчунун маанисин тапкыла:
а) $\sin\alpha = 0{,}9397$; б) $\sin\alpha = 0{,}4163$; в) $\cos\alpha = 0{,}9613$;
г) $\cos\alpha = 0{,}3333$; д) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}1763$; е) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}213$.

30.2. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРДУ КОЛДОНУП ЭСЕПТӨӨ

Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилерин эсептөөдө, тик бурчтуу үч бурчтуктарды чыгарууда микрокалькуляторду да колдонуу ыңгайлуу. Ал эсептөөнү кыйла жеңилдетет. Микрокалькуляторлорду эсептөөлөрдө кандай колдонуу керек экендиги атайын методикалык колдонмолордо толук баяндалган.

Төмөндөгү маселелерди чыгарууда микрокалькуляторду колдонуу сунуш кылынат.

1. Маанилерин эсептегиле: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 30^\circ$; 3) $\sin 40^\circ 30'$; 4) $\sin 60{,}8^\circ$; 5) $\sin 75{,}25^\circ$.

2. Маанилерин тапкыла: 1) $\cos 22^\circ$; 2) $\cos 37^\circ$; 3) $\cos 47^\circ 30'$; 4) $\cos 67{,}5^\circ$; 5) $\cos 80{,}16^\circ$.

3. Гипотенузасы c, тар бурчу α болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун a жана b катеттери $a = c\cdot\sin\alpha$ жана $b = c\cdot\cos\alpha$ формулалары аркылуу аныкталаары белгилүү. Эгерде: а) $c=7$; $\alpha=48^\circ$; б) $c=41{,}5$; $\alpha=61{,}5^\circ$; в) $c=10{,}74$; $\alpha=11^\circ 45'$ болсо, анда анын ар бир катетин тапкыла.

30.3. ТИК БУРЧТУУ ҮЧ БУРЧТУКТАРДЫ ЧЫГАРУУ

Тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун тригонометриялык функцияларынын аныкталышы, алардын арасындагы теңдештиктер, Пифагордун теоремасы үч бурчтуктарды чыгарууну кыйла жеңилдетет. Атап айтканда, тик бурчтуу үч бурчтуктун эки элементи берилген учурда, анын калган элементтерин оңой аныктоого болот. Мында төрт учур болушу мүмкүн.

1. a жана b катеттери берилген. c гипотенузасын, α, β тар бурчтарын табуу талап кылынат. Аларды $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin a = \frac{a}{c}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$ формулаларын пайдаланып эсептөөгө болот.

2. c гипотенузасы, a катети берилген. Белгисиз элементтери $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $b = c\cdot\cos\alpha$ формулалары аркылуу табылат.

3. a катети жана α тар бурчу берилген. Белгисиз элементтер төмөндөгү формулалар менен эсептелет: $c=\frac{a}{\sin\alpha}$, $b=90^\circ-\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$

4. c гипотенузасы жана α тар бурчу берилген. Калган элементтерин төмөндөгү формулалар аркылуу эсептөөгө болот: $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$, $\beta=90^\circ-\alpha$.

Төмөндө тик бурчтуу үч бурчтуктардын берилген эки элементи боюнча калган элементтерин табууга карата маселелер сунуш кылынган.

1. a жана b катеттери берилген: а) a=8, b=6; б) a=30, b=40; в) a=4,35, b=1,45; г) a=12,3, b=61,5. Гипотенузасын жана тар бурчтарын тапкыла.

2. c гипотенузасы жана a (же b) катети берилген: а) c=10, a=6; б) c=65, b=63; в) c=6,97, a=5,28; г) c=17,1, b=8,23. Белгисиз катетин жана бурчтарын тапкыла.

3. a (же b) катети жана анын каршысында жаткан α (же β) бурчу берилген: а) a=15, $\alpha=36,5^\circ$; б) a=3,8, $\alpha=42^\circ15'$; в) b=6,4, $\alpha=56^\circ$; г) b=12, $\alpha=18,6^\circ$. Гипотенузасын, берилген катетке жанаша жаткан тар бурчун жана экинчи катетин эсептегиле.

4. a (же b) катети жана ага жанаша жаткан β (же α) тар бурчу берилген: а) a=52,5; $\beta=35^\circ36'$; б) a=420; $\beta=24,8^\circ$; в) b=75; $\alpha=51^\circ15'$; г) b=5,85; $\alpha=61,25^\circ$. Гипотенузасын, берилген катетке каршы жаткан тар бурчун жана экинчи катетин тапкыла.

5. c гипотенузасы жана α (же β) бурчу берилген: а) c=10, $\alpha=36,5^\circ$; б) c=42,6, $\alpha=52^\circ24'$; в) c=1,75, $\beta=73^\circ$; г) c=0,8, $\beta=48^\circ15'$. Катеттерин жана белгисиз тар бурчун тапкыла.

6. Тең капталдуу үч бурчтуктун бийиктиги 6,8 м, ал эми негизи 20,4 м. Үч бурчтуктун каптал жагын жана бурчтарын тапкыла.

7. Ромбдун а) диагоналдары 12 см жана 8 см; б) жагы 24,1 м, бийиктиги 12 м. Бурчтарын эсептегиле.

8. Тик бурчтуктун диагоналы 8,2 м болуп, жактарынын бири менен $58,5^\circ$ бурчту түзөт. Анын жактарын тапкыла.

VI ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Тар бурчтун косинусуна, синусуна, тангенсине аныктама бергиле.
2. Пифагордун теоремасы кандай айтылат? Далилдөө жолу кандай?
3. Тар бурчтун тригонометриялык функцияларынын маанилери эмнеден көз каранды болот?
4. Кандай негизги тригонометриялык тендештиктерди билесиңер?
5. $\alpha=30^\circ$, 45°, 60° болгондо, ар бир учур үчүн $\sin\alpha$ нын, $\cos\alpha$ нын, $\mathrm{tg}\,\alpha$ нын маанилери эмнеге барабар?
6. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун: 1) катеттери; 2) гипотенузасы жана бир катети; 3) катети жана бир тар бурчу; 4) гипотенузасы жана бир тар бурчу берилсе, калган элементтерин кантип табууга болот?

VI ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Тик бурчтуу үч бурчтукта: 1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha=1$ болсо, α бурчун түзгүлө.
2. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ болсо, $\sin\alpha$ нын маанисин тапкыла.
3. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

   1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$; 2) $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$; 3) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.
4. Эгерде: 1) $\cos\alpha=1$; 2) $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$ болсо, α бурчун тапкыла.
5. Таблицаны колдонбой туруп, $\sin30^\circ+\cos60^\circ$ туюнтмасынын маанисин эсептегиле.
6. $\cos70^\circ=\sin20^\circ$ болоорун далилдегиле.
7. Таблицаны колдонбой туруп, $\mathrm{tg}\,45^\circ+\sin^2 17^\circ+\cos^2 17^\circ$ туюнтмасын эсептегиле.
8. Эгерде ромбдун диагоналдары 4,6 м жана 64,4 м болсо, анын жагын тапкыла.
9. Тик бурчтуу үч бурчтукта: а) a=9 дм, b=12 дм берилген, c, h, a_1, b_1 ди (мындагы a_1 жана b_1 — катеттердин гипотенузага түшүрүлгөн проекциялары) тапкыла; б) a=1,2 дм, c=1,3 дм берилген, b, h, a_1, b_1 ди тапкыла.
10. Радиустары 6 м жана 2 м болгон эки айлананын борборлорунун арасындагы аралык 10 м. а) Сырткы жалпы жаныманын; б) ички жалпы жаныманын кесиндисинин узундугун тапкыла.

VII глава. КӨП БУРЧТУКТАР

§ 31. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТАР

31.1. СЫНЫК СЫЗЫКТАР

A_1, A_2, ..., A_n ($n > 2$) чекиттеринен жана аларды удаалаш туташтырган A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесиндилеринен түзүлгөн фигураны $A_1A_2 \dots A_n$ **сынык сызыгы** деп аташат. A_1, A_2, ..., A_n чекиттери сынык сызыктын чокулары, A_1A_2, A_2,A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесиндилери сынык сызыктын бөлүктөрү (түзүүчүлөрү) болуп эсептелишет.

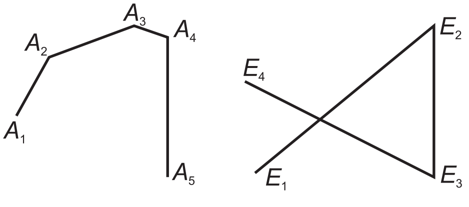
Удаалаш, жанаша жаткан ар бир эки түзүүчүсүнүн жалпы чекиттери сынык сызыктын чокулары болушат.

Сынык сызыктар ар кандай болуп берилиши мүмкүн.

Эгерде сынык сызыктын бөлүктөрү кесилишпесе жана анын жанаша жаткан эки бөлүгү бир түз сызыкта жатпаса, анда ал жөнөкөй сынык сызык деп аталат. Мисалы, 115-сүрөттө $A_1A_2A_3A_4A_5$ жөнөкөй сынык сызык, ал эми $E_1E_2E_3E_4$ жөнөкөй эмес сынык сызык болот.

Сынык сызыктын бардык түзүүчүлөрүнүн узундуктарынын суммасы **сынык сызыктын узундугу** деп аталат.

Эгерде сынык сызыктын учтарын кесинди аркылуу туташтырсак, туюк сынык сызыкка ээ болобуз.



115-сүрөт.

31. 2. КӨП БУРЧТУКТАР

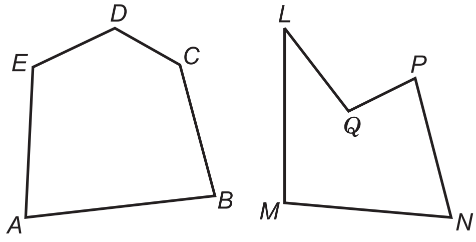
$A_1A_2 \dots A_n$ ($n > 2$) туюк сынык сызыгы менен чектелген тегиздиктин бөлүгү **көп бурчтук** деп аталат. A_1, A_2, ..., A_n чекиттери көп бурчтуктун чокулары, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесиндилери көп бурчтуктун жактары болушат. Көп бурчтуктун бир жагына тиешелүү чокулары жанаша жаткан чокулар, жалпы чокуга ээ болуучу эки жагы жанаша жаткан жактары деп эсептелет.

Көп бурчтуктар чокуларынын же жактарынын санына карата мүнөздөлүп айтылат. Мисалы, үч бурчтук, төрт бурчтук, беш бурчтук жана башкалар.

Көп бурчтуктун жактарынын узундуктарынын суммасы анын **периметри** деп аталат.

Жөнөкөй туюк сынык сызык менен чектелген көп бурчтукту жөнөкөй көп бурчтук деп аташат. Ал эми жөнөкөй көп бурчтуктар өз кезегинде, чектеп турган туюк сынык сызыктарга карата эки түргө бөлүнөт: томпок жана томпок эмес. Көп бурчтуктун каалагандай жагы аркылуу түз сызык жүргүзгөндө көп бурчтук ал түз сызык аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде гана жатса, анда ал томпок көп бурчтук болот, жарым тегиздиктердин экөөндө тең жатса, анда ал томпок эмес көп бурчтук болот.

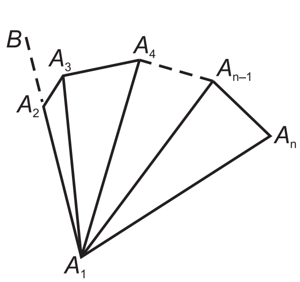
Мисалы, 116-сүрөттөгү $ABCDE$ — томпок, $MNPQL$ — томпок эмес көп бурчтук.



116-сүрөт.

31.3. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТАР

Томпок көп бурчтук тегиздикти эки бөлүккө бөлөт: ички жана тышкы.



117-сүрөт.

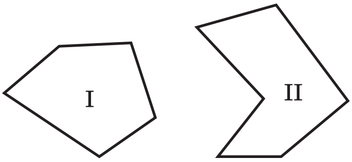
Жактарынын саны эң аз болгон томпок көп бурчтук — үч бурчтук. Чокуларынын (жактарынын) саны n ге барабар болгон томпок көп бурчтукту n бурчтук деп атайбыз (117-сүрөт). Томпок көп бурчтукту мындан ары жөн эле көп бурчтук деп атайбыз.

Жанаша жатпаган эки чокусун туташтыруучу кесиндини көп бурчтуктун диагоналы дейбиз. A_1 чокусунан чыгуучу диагоналдар A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, ..., A_1A_{n-1} болот (башка чокулар аркылуу да ушундай диагоналдар жүргүзүүгө мүмкүн). Демек, n бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу диагоналдардын саны $n-3$ болот. Анда n бурчтукта бардыгы $n(n-3)$ диагональ болушу керек, бирок ар бир диагоналда эки чоку жаткандыктан, жалпы диагоналдардын саны $\frac{1}{2}n(n-3)$ болот.

Көп бурчтуктун бир чокусунан чыгуучу эки жагынын арасындагы бурчу анын ички бурчу деп аталат. Алар: $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$, ...,$\angle A_nA_1A_2$. Көп бурчтуктун ички бурчуна жандаш болгон бурч анын тышкы бурчу болот. Анда $\angle A_1A_2A_3$ бурчуна карата тышкы бурч $\angle A_3A_2B$ болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Түзүүчүлөрүнүн саны бешке барабар болгон жөнөкөй жана жөнөкөй эмес сынык сызыктарды сызгыла.
2. Эгерде $ABCDE$ жөнөкөй сынык сызыгынын ар бир түзүүчүсү 3 см болсо, анда сынык сызыктын узундугун тапкыла.
3. $KLMN$ жөнөкөй сынык сызыгы берилген. Анын узундугу KN кесиндисинин узундугунан чоң болоорун далилдегиле.
4. 118-сүрөттө эки көп бурчтук сызылган (I жана II). Ар бири канча бурчтук? Кайсынысы томпок, кайсынысы томпок эмес? Эмне үчүн?



118-сүрөт.

5. $ABCDEF$ томпок алты бурчтугун сызгыла. Анын бардык чокуларын, жактарын, бурчтарын жана диагоналдарын атагыла. Белгилеп жазгыла. Канча чокусу, жагы, бурчу жана диагоналы бар?
6. а) Беш бурчтукка; б) сегиз бурчтукка; в) n бурчтукка бир чокудан чыгуучу канча диагоналды сызууга болот?
7. а) Алты бурчтукка; б) тогуз бурчтукка; в) жыйырма бурчтукка бир чокудан чыгуучу диагоналдар аркылуу канча үч бурчтук түзүлөт?
8. а) Беш бурчтуктун; б) сегиз бурчтуктун; в) n бурчтуктун ар бирине бардыгы канча диагональ жүргүзүүгө болот?

§ 32. ТОМПОК КӨП БУРЧТУКТУН ИЧКИ БУРЧТАРЫНЫН СУММАСЫ

$A_1A_2 \ldots A_n$ томпок көп бурчтугу берилсин (117-сүрөт).

48-теорема. **Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180^\circ(n-2)$ ге барабар.**

Д а л и л д ө ө. Берилген n бурчтукту 117-сүрөттө көрсөтүлгөндөй кылып, диагоналдар аркылуу үч бурчтуктарга бөлөбүз. Андай үч бурчтуктардын саны $n-2$ болот. Бөлүнгөн үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасына барабар. Ар бир үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар. Анда көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы

$$180^\circ(n-2)$$

ге барабар. Теорема далилденди.

Н а т ы й ж а. **Томпок көп бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы 360° ка барабар.**

n бурчтуктун ар бир чокусундагы ички бурчу менен тышкы бурчунун суммасы 180° ту түзөт. Демек, n бурчтуктун бардык ички бурчтарынын жана тышкы бурчтарынын суммасы $180^\circ \cdot n$ ге барабар. Анда

$$180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$$

тышкы бурчтардын суммасына барабар. Демек, n бурчтуктун тышкы бурчтарынын суммасы n санынан көз каранды болбойт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. а) Беш бурчтуктун; б) сегиз бурчтуктун; в) жыйырма бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын эсептегиле.

2. Эгерде алты бурчтуктун бурчтарынын чоңдуктарынын катышы 3,5:2:3:4:2,5:3 катышына барабар болсо, анын ар бир бурчун тапкыла.

3. Эгерде көп бурчтуктун жактарынын санын үчкө чоңойтсок, анда көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы канчага өзгөрөөрүн эсептегиле.

4. Эгерде көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы: а) 540° ка; б) 906° ка; в) 3600° ка барабар болсо, анын жактарынын санын тапкыла.

5. Эгерде көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы анын тышкы бурчтарынын суммасынан k эсе чоң болсо, көп бурчтуктун жактарынын санын тапкыла.

§ 33. ТУУРА КӨП БУРЧТУКТАР

А н ы к т а м а. **Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык жактары барабар жана бардык бурчтары барабар болушса, анда ал туура көп бурчтук деп аталат.**

Жалпы учурда томпок көп бурчтуктун элементтери кандай аныкталса, туура көп бурчтукта да ал түшүнүктөр, белгилөөлөр сакталат. Туура көп бурчтуктардын жөнөкөйлөрү болуп тең жактуу үч бурчтук, квадрат эсептелет.

$A_1A_2 \ldots A_n$ туура көп бурчтук болсо, анда n жактуу туура көп бурчтук берилген деп айтышат. Демек, туура көп бурчтук жактарынын санына же чокуларынын санына карата аталат.

Туура n бурчтукта n=3 болгондо — туура (тең жактуу) үч бурчтук, n=4 болгондо — туура төрт бурчтук (квадрат), n=5 болгондо — туура беш бурчтук ж. б. деп алынат.

Туура n бурчтуктун бир жагын a_n аркылуу белгилесек, анда анын бардык жактары барабар болгондуктан, периметри

$$P_n=n \cdot a_n$$

болот (P_n — туура n бурчтуктун периметри).

Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180^\circ(n-2)$ болоору белгилүү. Туура n бурчтуктун бардык бурчтары барабар болгондуктан анын ар бир бурчу

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

болот, ал эми тышкы бурчу

$$\frac{360^\circ}{n}$$

ге барабар боло тургандыгы түшүнүктүү (§ 32).

Кээде жылдызча түрүндөгү туура көп бурчтуктар да учурайт. Бирок алар томпок көп бурчтук боло алышпайт. Биз мында аларга токтолгон жокпуз.

Эки туура n бурчтуктун жактары барабар болсо, анда аларды **барабар** деп айтышат.

$A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ туура n бурчтуктарын тиешелүү түрдө Q_1 жана Q_2 аркылуу белгилейли. Эгерде $A_1A_2=B_1B_2$ болсо, анда $Q_1=Q_2$ болот. Чындыгында алардын бирин экинчисине дал келгендей кылып беттештирүүгө болот.

Q_2 көп бурчтугу A_1A_2 түз сызыгы аркылуу аныкталган жарым тегиздиктердин биринде жатат. A_1A_2 түз сызыгында A_1 чекитинен баштап $B_1B_2=A_1A_2$ болгондой кесиндини түзүүгө болот. Анда B_1 чекити A_1 чекитине, B_2 чекити A_2 чекитине дал келет. Андан кийин Q_1 көп бурчтугу жаткан жарым тегиздикте

$\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$ болгондой A_2A_3 шооласын сызабыз да, ага A_2 чекитинен баштап B_2B_3 кесиндисин өлчөп коебуз. Туура көп бурчтуктардын бурчтары барабар болгондуктан, $A_2A_3=B_2B_3$ болот, б. а. A_3 жана B_3 чокулары дал келет. Ушундай жол менен Q_2 көп бурчтугунун калган чокуларын да дал келтирүүгө мүмкүн. Демек, $Q_1=Q_2$ болот.

Эгерде ар кандай эки туура n бурчтуктун жактарынын саны бирдей, бирок барабар болбосо, аларды бир аттуу туура көп бурчтуктар деп атайбыз. Аларга көп эле мисалдар келтирүүгө болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Жактарынын саны эң аз болгон туура көп бурчтукту атагыла. Анын бир бурчу канчага барабар?

2. Жагы a га барабар болгон туура: а) 7; б) 12; в) n бурчтуктун периметрин тапкыла.

3. Туура 6 бурчтук берилген. Анын: 1) ички бурчтарынын суммасын; 2) ар бир бурчун; 3) ар бир чокудагы тышкы бурчун; 4) тышкы бурчтарынын суммасын; 5) бир чокудан чыгуучу диагоналдарынын санын; 6) бардык диагоналдарынын санын; 7) периметри 24,6 дм болсо, ар бир жагын эсептегиле.

4. Эгерде көп бурчтуктун ар бир ички бурчу: 1) 140°; 2) 150°; 3) 168° болсо, анын жактарынын санын тапкыла.

5. Эгерде туура көп бурчтуктун тышкы бурчтарынын бири: 1) 18°; 2) 12°; 3) 30° ка барабар болсо, анын жактарынын санын эсептегиле.

6. Туура: 1) 4; 2) 5; 3) 10; 4) 12 бурчтуктун ички бурчтарынын суммасын эсептегиле.

7. 6-маселеде берилген көп бурчтуктардын ар биринин бурчун эсептегиле.

8. 6-маселеде берилген көп бурчтуктардын ар бирине канча диагональ жүргүзүүгө болот?

§ 34. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН КӨП БУРЧТУКТАР

Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык чокулары бир айланада жатса, анда көп бурчтук ал айланага **ичтен сызылган** деп аталат. Эгерде томпок көп бурчтуктун бардык жактары айлананы жанып өтсө, анда көп бурчтук айланага **сырттан сызылган** же айлана көп бурчтукка ичтен сызылган деп аталат. Демек, көп бурчтук айланага ичтен сызылганда же айлана көп бурчтукка сырттан сызылганда көп бурчтуктун бардык чокулары айлананын борборунан бирдей алыстыкта болот, ал эми айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун бардык жактары айлананын борборунан бирдей алыстыкта жатат.

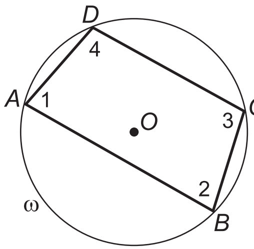
34.1. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН ТӨРТ БУРЧТУКТАР

Ар кандай үч бурчтуктун сыртынан (ичинен) сызылган айланалар боло тургандыгы белгилүү (§ 20). Эми ар кандай томпок төрт бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айланалар дайыма эле болобу деген суроо туулат. Көрсө, бардык томпок төрт бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айланалар табыла бербейт экен. Бул суроолорго төмөнкү теоремалар жооп берет.

49-теорема. **Эгерде айлана томпок төрт бурчтукка сырттан сызылган болсо, анда төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болот.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ төрт бурчтугу жана ага сырттан сызылган $w(O, R)$ айланасы берилген (119-сүрөт). $\angle 1+\angle 3=180^{\circ}$, $\angle 2+\angle 4=180^{\circ}$ болоорун далилдейбиз. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ бурчтары айланага ичтен сызылган бурчтар $\angle 1$ бурчу $B\breve{C}D$ жаасынын $\angle 3$ бурчу $D\breve{A}B$ жаасынын жарымы менен өлчөнөт.

$$\angle 1+\angle 3=\frac{B\breve{C}D}{2}+\frac{D\breve{A}B}{2}=\frac{B\breve{C}D+D\breve{A}B}{2}=\frac{360^{\circ}}{2}=180^{\circ}$$



119-сүрөт.

$\angle 2+\angle 4=180^{\circ}$ боло тургандыгы да ушуга окшош далилденет. Теорема далилденди.

50-теорема. (49-теоремага тескери теорема). **Эгерде төрт бурчтуктун карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° болсо, анда ага сырттан айлана сызууга болот.**

Бул теореманын далилдөөсүнө токтолбойбуз.

51-теорема. **Айланага сырттан сызылган томпок төрт бурчтуктун карама-каршы жактарынын суммалары барабар болот.**

Айланадан тышкары жаткан чекиттен айланага жүргүзүлгөн жанымалардын кесиндилеринин барабардыгын колдонуп теореманы оңой эле далилдөөгө болот.

52-теорема. (51-теоремага тескери теорема). **Эгерде томпок төрт бурчтуктун карама-каршы жактарынын суммалары барабар болсо, анда ага ичтен айлана сызууга болот.**

Бул теореманы өз алдыңарча далилдегиле.

Томпок төрт бурчтукка сырттан сызылган айланалар жөнүндөгү теоремалардын (49—52-теоремалар) негизинде төмөндөгүлөрдү айтууга болот:

а) Параллелограммга (тик бурчтан айырмалуу) сырттан да, ичтен да айлана сызууга болбойт. Анткени анын карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар эмес. Бирок, ромбго дайыма ичтен айлана сызууга мүмкүн. Анткени — анын карама-каршы жактарынын суммалары барабар.

б) Ромбго (квадраттан айырмаланып) сырттан айлана сызууга болбойт, себеби карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар эмес.

в) Тик бурчтукка (квадраттан айырмаланып) сырттан айлана сызууга болот, анткени карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар, ал эми ага ичтен айлана сызууга болбойт, себеби карама-каршы жактарынын суммалары барабар эмес.

г) Квадратка сырттан да, ичтен да айлана сызууга болот. Анткени жогорудагы талаптар аткарылат.

Бардык учурда ичтен (сырттан) сызылган айланалардын борборлору тиешелүү төрт бурчтуктардын диагоналдарынын кесилишинде жатат.

1. Берилген айланада AC жана BD диаметрлери бири-бирине перпендикулярдуу. Эгерде: 1) A, B, C, D чекиттерин удаалаш туташтырсак, анда берилген айланага карата кандай төрт бурчтук пайда болот? 2) A, B, C, D чекиттери аркылуу берилген айланага жанымалар жүргүзсөк, алардын кесилиштеринен пайда болуучу $A'B'C'D'$ төрт бурчтугу берилген айланага карата кандай төрт бурчтук болот?
2. Тик бурчтук берилген. Ага сырттан сызылган айлананы түзгүлө.
3. Тик бурчтуктун кичине жагы a га, диагоналдарынын арасындагы тар бурчу 60° ка барабар. Тик бурчтукка сырттан сызылган айлананын диаметрин тапкыла.
4. Берилген ромбго ичтен сызылган айлананы түзгүлө.
5. Ромбдун жагы 10 м, тар бурчу 30°. Ромбго ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.
6. Эгерде төрт бурчтук айланага: а) ичтен сызылса, анын карама-каршы бурчтарынын суммасы 180° ка барабар болорун; б) сырттан сызылса, анын карама-каршы жактарынын суммалары барабар болоорун далилдегиле.
7. 6-маселенин ар бир учурунда тескери маселени баяндагыла. Аларды далилдегиле.
8. Эгерде трапеция айланага ичтен сызылса, анда ал тең капталдуу болот. Далилдегиле.

9. Төрт бурчтуктун бурчтарынын катышы ирети боюнча: 1) 4:2:5:7 ге; 2) 3:4:5:11 ге барабар болсо, анда ага сырттан айлана сызууга болобу?

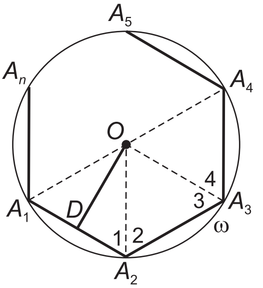
10. Айланага сырттан сызылган төрт бурчтуктун үч жагынын катышы ирети боюнча 4:5:7 катышына барабар. Эгерде төрт бурчтуктун периметри 44 м болсо, анын жактарын тапкыла.

34.2. АЙЛАНАГА ИЧТЕН (СЫРТТАН) СЫЗЫЛГАН ТУУРА КӨП БУРЧТУКТАР

Эми айланага сырттан (ичтен) сызылган туура көп бурчтуктарга токтолобуз.

53-теорема. **Ар кандай туура көп бурчтукка сырттан жана ичтен айлана сызууга болот.**

Д а л и л д ө ө. $A_1A_2 \ldots A_n$ туура көп бурчтугу берилсин (120-сүрөт). Адегенде бул туура көп бурчтукка сырттан айлана сызууга болоорун, б. а. көп бурчтуктун ар бир чокусунан бирдей алыстыкта жаткан чекитти табууга мүмкүн экендигин далилдейбиз. $A_1A_2A_3$ жана $A_2A_3A_4$ бурчтарына биссектрисалар жүргүзөбүз. Алар O чекитинде кесилишет, анткени $\angle 2+\angle 3<180^\circ$. Туура көп бурчтуктун бурчтары барабар болгондуктан, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ экендиги түшүнүктүү. Анда ΔA_2OA_3 — тең капталдуу болот, б. а.



120-сүрөт.

$$OA_2=OA_3. \qquad (1)$$

$\Delta A_2OA_3=\Delta A_3OA_4$ ($A_2A_3=A_3A_4$, OA_3 — жалпы жак, $\angle 2=\angle 4$). Мындан

$$OA_3=OA_4 \qquad (2)$$

келип чыгат. Ушундай эле жол менен $A_5, \ldots, A_n, A_1$ чокулары да O чекитинен бирдей аралыкта экендигин далилдөөгө болот. Демек, w (O, R) айланасы ($OA_1=R$) берилген туура көп бурчтукка сырттан сызылган айлана болот, R — сырттан сызылган айлананын радиусу.

Эми O борборунан туура көп бурчтуктун ар бир жагына перпендикуляр түшүрсөк, алар барабар болушат. Ошондуктан $w(O, r)$ айланасы ($OD=r$, $OD\perp A_1A_2$) берилген туура көп бурчтукка ичтен сызылган айлана болот. Теорема далилденди.

Туура көп бурчтукка сырттан (ичтен) сызылган айлананын борбору туура көп бурчтуктун борбору деп аталат. $OD=r$ кесиндисин туура көп бурчтуктун апофемасы деп атайбыз, ал ичтен сызылган айлананын радиусу болуп эсептелет.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Квадратка: а) ичтен; б) сырттан сызылган айлананы түзгүлө.

2. Квадраттын жагы a га барабар. Квадратка: а) ичтен; б) сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.

3. Туура үч бурчтуктун жагы a га барабар. Үч бурчтукка: а) ичтен сызылган; б) сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла; в) ичтен сызылган; г) сырттан сызылган айлананы түзгүлө.

4. Туура n бурчтукка сырттан айлана сызууга болоорун далилдегиле.

5. Туура n бурчтукка ичтен айлана сызууга болоорун далилдегиле.

6. Жактарынын саны: а) 5; б) 8; в) 15; г) 48; д) n болгон туура көп бурчтуктун борбордук бурчун эсептегиле.

7. Эгерде туура көп бурчтуктун борбордук бурчу: 1) 30°; 2) 4° ка барабар болсо, анын канча жагы болот?

8. Туура көп бурчтуктун борбордук бурчу менен чокусундагы бурчунун суммасы 180° болоорун далилдегиле.

9. Айлана берилген. Ага ичтен сызылган туура: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчтукту түзгүлө.

10. Айлана берилген. Ага сырттан сызылган туура: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчтукту түзгүлө.

11. Айлананын радиусунун тең ортосу аркылуу өтүп, ага перпендикулярдуу болгон хорда айланага ичтен сызылган туура үч бурчтуктун жагына барабар болот. Далилдегиле.

12. Туура n бурчтуктун жагы a га барабар. Ага 1) сырттан сызылган айлананын радиусу $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1) ге; 2) ичтен сызылган айлананын радиусу жана апофемасы $r=\dfrac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ (2) ге барабар болоорун далилдегиле.

Көрсөтмө. Туура көп бурчтуктун жагы, борбордук бурчу жана апофемасынан түзүлгөн тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланышынан пайдалангыла.

13. 1) n=3; 2) n=4; 3) n=6 болсо, туура n бурчтуктун берилген a жагы боюнча, ага: а) сырттан; б) ичтен сызылган айланалардын радиустарын тапкыла.

Көрсөтмө. 12-маселедеги (1) жана (2) формулаларды пайдалангыла.

14. Эгерде туура 5 бурчтуктун периметри 24 дм болсо, ага сырттан жана ичтен сызылган айланалардын радиустарын эсептегиле.

15. Радиусу R ге барабар болгон айлана берилген. Ага: а) ичтен; б) сырттан сызылган туура n бурчтуктун жагын тиешелүү түрдө $a=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ (3) жана $b=2Rtg\frac{180^\circ}{n}$ (4) барабардыктары аркылуу (a, b — тиешелүү түрдө ичтен жана сырттан сызылган туура n бурчтуктун жактары) туюнтууга болоорун далилдегиле.

16. Эгерде: 1) n=3; 2) n=4; 3) n=6 болсо, радиусу R ге барабар болгон айланага: а) ичтен; б) сырттан сызылган туура n бурчтуктун жактарын тапкыла.

17. Эгерде айлананын диаметри 18 м болсо, ага ичтен жана сырттан сызылган туура 10 бурчтуктун жактарын тапкыла.

18. Туура n бурчтукка ичтен жана сырттан сызылган айланалардын радиустарынын байланыштарын аныктагыла.

19. Жагы 14 см болгон туура алты бурчтуктун апофемасын эсептегиле.

20. Туура көп бурчтуктун жагы a га, ал эми ага сырттан сызылган айлананын радиусу R ге барабар. Көп бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

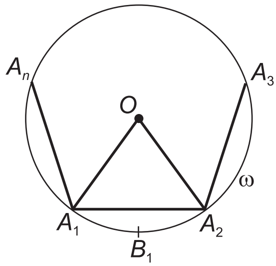
21. Туура көп бурчтуктун жагы a га, ал эми ага сырттан сызылган айлананын радиусу r ге барабар. Көп бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусун тапкыла.

§ 35. АЙЛАНАНЫН УЗУНДУГУ

Айлана-ийри сызык, ошондуктан анын узундугун кесиндиге окшоштуруп куралдар аркылуу өлчөөгө мүмкүн эмес. Ошол себептен айлананын узундугун эсептөөнү ага ичтен сызылган туура көп бурчтуктардын периметрлери менен байланыштырып эсептөө зарылдыгы келип чыгат.

Чындыгында эле, $w(O, R)$ айланасына ичтен сызылган туура n бурчтуктун жактарынын санын эки эселентсек, анда туура $2n$ бурчтукка ээ болобуз. Анын бир жагын a_{2n} аркылуу белгилейли, анда анын периметри $P_{2n}=2n\cdot a_{2n}$ болот (P_{2n} — туура $2n$ бурчтуктун периметри), мында $A_1A_2=a_n$ кесиндисин туура n бурчтуктун бир жагы деп кабыл алсак (121-сүрөт), анда $A_1B_1=B_1A_2=$ $=a_{2n}$ туура $2n$ бурчтуктун жагы болот.

$\Delta A_1B_1A_2$: $A_1A_2<A_1B_1+B_1A_2$, $a_n<2a_{2n}$ же $na_n<2na_{2n}$. Мындан $P_n<P_{2n}$ болот. Жактарынын санын мындай эки эселентүүнү чексиз улантууга мүмкүн. Бул учурда айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун периметри улам барган сайын чоңоё берет да, айлананын узундугунан ашып кетпейт. Анткени туура көп бурчтук дайыма айланага ичтен сызылган.



121-сүрөт.

Демек, айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз чоңойткондо ал туура көп бурчтуктардын периметрлеринин удаалаштыгынын предели берилген айлананын узундугуна барабар болот деп эсептөөгө мүмкүн.

Айланага сырттан сызылган туура көп бурчтукка карата да ушундай талкуулоону айтууга болот. Мында айланага сырттан сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чоңойткондо улам кийинки көп бурчтуктардын периметрлери кичирейе тургандыгын эске алуу керек.

Айлананын узундугун аныктоодогу төмөндөгү өзгөчөлүккө токтолобуз. $w(O, R)$ жана $w'(O', R')$ айланалары берилишсин. Алардын узундуктарын тиешелүү түрдө C жана C' аркылуу белгилейбиз. Бул эки айланага туура n бурчтуктарды ичтен сызабыз. Алардын жактары тиешелүү түрдө a_n жана a'_n болсо, анда көп бурчтуктардын периметрлери $P_n = na_n = 2R \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}$, $P'_n = na'_n = 2R' \cdot n \cdot \sin\frac{180°}{n}$ болот (§ 26). Натыйжада

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'} \tag{1}$$

болуп калат ($2R$ — w айланасынын, $2R'$ — w' айланасынын диаметри). (1) барабардык n дин каалагандай ($n>2$) оң бүтүн сан маанисинде туура болот. Эгерде n санын чексиз чоңойтсок, P_n жана P'_n периметрлери тиешелүү түрдө C жана C' маанилерине умтулат, ал эми $\frac{P_n}{P'_n}$ катышы $\frac{C}{C'}$ катышына умтулат. Анда (1) барабардыктан

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \text{ же } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} \tag{2}$$

болот.

Ошентип, ар кандай айлананын узундугунун ал айлананын диаметрине болгон катышы турактуу болот. Бул турактуу катышты гректин π тамгасы («пи» деп окулат) аркылуу белгилөө кабыл алынган. π саны иррационалдуу сан, анын болжолдуу мааниси $\pi = 3{,}1416...$ түрүндө жазылат. Анда (2) барабардыктан

$$\frac{C}{2R} = \pi \text{ же } C = 2\pi R \tag{3}$$

болот. Демек, радиусу R ге барабар болгон айлананын узундугу (3) формула аркылуу аныкталат.

360° борбордук бурчка радиусу R ге барабар болгон толук айлана туура келе тургандыгы белгилүү. Анда α борбордук бурчуна айлананын l жаасы туура келет. Демек, айлананын l жаасынын узундугу тиешелүү борбордук бурчка пропорциялаш болот. Натыйжада

$$\frac{2\pi R}{360^{\circ}}=\frac{l}{\alpha} \quad \text{же} \quad l=\frac{\pi R\alpha}{180^{\circ}} \qquad (4)$$

формуласына ээ болобуз. Демек, α борбордук бурчуна туура келүүчү жаанын узундугу (4) формула аркылуу аныкталат.

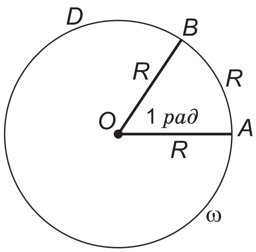
КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Радиусу: 1) 20 см; 2) 5,5 дм; 3) 12 м болгон айлананын узундугун тапкыла.
2. Диаметри: 1) 180 мм; 2) 2,8 м болгон айлананын узундугун эсептегиле.
3. Эгерде айлананын узундугу: 1) 62,8 дм; 2) 25,12 см; 3) 1,5 м болсо, анын радиусун тапкыла.
4. Устундун жоондугун (диаметрин) өлчөш үчүн аны жип менен курчап (айлана түрүндө) байлашат да, андан кийин ал жиптин узундугун өлчөп табышат. Эгерде устунду курчаган жиптин узундугу: 1) 1,6 м; 2) 14,8 дм болсо, анда устундун жоондугу канча болоорун эсептегиле.
5. Жер шарынын экваторунун узундугу болжол менен 40 000 км ге барабар. Экватордун диаметрин эсептегиле (100 км ге чейинки тактыкта).
6. Айдын диаметри 3476 км. Айдын экваторунун узундугун тапкыла (1 км ге чейинки тактыкта).
7. Күндүн диаметри 1 392 000 км ге барабар. Күндүн экваторунун узундугун тапкыла (1 000 км ге чейинки тактыкта).
8. Узундугу 12,56 см болгон айлананы түзгүлө.
9. Эгерде айлананын радиусун: 1) k эсе чоңойтсок; 2) a см ге чоңойтсок, анда айлананын узундугу кандай өзгөрөт?
10. Радиусу 0,6 м болгон дөңгөлөк 50 жолу айланганда кандай аралыкты басып өтөт?
11. Айлананын радиусу 12 см. 1) 60°; 2) 40°; 3) 150°; 4) $45^{\circ}30'$; 5) $75{,}5^{\circ}$ борбордук бурчка туура келүүчү айлананын жаасынын узундугун тапкыла.
12. Эгерде жаанын узундугу l ге барабар, ал эми ага туура келүүчү бурчу: 1) 120°; 2) $24^{\circ}45'$ болсо, анда жаанын радиусун тапкыла.
13. 150° борбордук бурчка тирелип турган жаанын радиусу 6 см ге барабар. Узундугу ушул жаанын узундугундай айлананын радиусун тапкыла.

14. Эгерде жаанын радиусу 10 см, узундугу 4,5 см болсо, анда ага туура келүүчү борбордук бурчту тапкыла.

15. 60° борбордук бурчка тирелген жаанын узундугу 10 м болсо, анын хордасын тапкыла.

§ 36. БУРЧТУН РАДИАНДЫК ЧЕНИ



122-сүрөт.

Силер бурчтун градустук чени менен таанышсыңар (4.3). Математикада бурчту өлчөөнүн дагы бир чени колдонулат. Ал бурчту өлчөөнүн радиандык («радиан» латын сөзү, шоола, радиус деген мааниде) чени деп аталат. Анын бирдиги катары радиан кабыл алынган. Радиан — жаасынын узундугу радиуска барабар болгон борбордук бурчтун чоңдугу (122-сүрөт). Ал 1 радиан же кыскача 1 *рад* деп белгиленет. Айрым учурда радиан деген сөз жазылбай эле, бурчту мүнөздөөчү сан жазылып коюлат.

Демек, бурчтун чоңдугун радиан аркылуу аныктоодо анын чоңдугу тиешелүү жаанын узундугунун радиуска карата катышы түрүндө мүнөздөлөт. Анда радиусу R ге барабар болгон айлананын l узундуктагы жаасына туура келүүчү борбордук бурчту j *рад* деп белгилесек, аны

$$\frac{l}{R}=\varphi\ рад \quad же \quad l=R\cdot j\ рад \tag{1}$$

түрүндө жазууга мүмкүн. Эми бурчтун градустук жана радиандык чендеринин арасындагы байланышты көрсөтөбүз.

Берилген айлананын жаасынын узундугу

$$l=\frac{\pi R a^\circ}{180^\circ} \tag{2}$$

формуласы аркылуу аныкталаары белгилүү (§ 35), мында a° борбордук бурчтун градустук чени. (1) жана (2) формулалардан

$$\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{a^\circ}{\varphi\ рад} \tag{3}$$

барабардыгын алабыз. Мындан

$$a^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\varphi рад \tag{4}$$

болот жана

(5)

болот.

Эгерде $a^{\circ}=180^{\circ}$ же борбордук бурч жарым айлананы түзсө, анда (5) тен j *рад*$=\pi$ болот. Демек, 180° ка барабар бурчтун радиандык чени p ге барабар. Анда $180^{\circ}=\pi$ *рад* деп жаза алабыз. Мындан $1^{\circ}=\dfrac{\pi \text{ рад}}{180}$ болот. Бул 1° болжол менен 0,017 *рад* га барабар.

Эми $180^{\circ}=\pi$ *рад* барабардыгынан $1\text{рад}=\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$ болот, ал болжол менен $57^{\circ}17'$ ка барабар.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Айлананын толук бурчу канча радианга барабар?
2. 2 *рад* канча градуска барабар?
3. Бурчтун радиандык чени: а) $\dfrac{\pi}{3}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) $\dfrac{2\pi}{3}$; г) $2p$ болсо, анын градустук ченин тапкыла.
4. Бурчтун радиандык чени: а) 0,5 *рад* же 0,5; б) 0,2; в) 3,14...s; г) 10 болсо, аны градустук чен аркылуу туюнтуп жазгыла.
5. 30°, 45°, 60°, 90°, 180° бурчтарын радиан аркылуу туюнткула.
6. Эгерде α бурчу: 10°, 18°, 240° болсо, аны радиандык чени аркылуу туюнтуп жазгыла.

VII ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Сынык сызыктын кандай түрлөрүн билесиңер?
2. Жөнөкөй сынык сызыктын касиетин баяндап бергиле.
3. Көп бурчтуктун аныктамасы кандай айтылат?
4. Томпок жана томпок эмес көп бурчтуктар кандай айырмаланышат?
5. Томпок n бурчтуктун канча диагоналы бар?
6. Томпок n бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы кантип эсептелет?
7. Кандай томпок төрт бурчтукка: а) сырттан; б) ичтен айлана сызууга болот?
8. Туура көп бурчтукту аныктагыла. Мисалдар келтиргиле.
9. Айланага ичтен (сырттан) сызылган көп бурчтуктарды аныктагыла.
10. Эмне үчүн туура көп бурчтукка ичтен да, сырттан да айлана сызууга боло тургандыгын түшүндүрүп бергиле.
11. Айлананын узундугу катары кандай чоңдукту алууга болот?
12. π (пи) санын кандай түшүнөсүңөр?
13. Айлананын жаасынын узундугу кантип аныкталат?
14. Бурчтун радиандык чени кандай аныкталат?

VII ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. $w(O,\ R)$ жана $w'(O',\ R')$ айланалары берилген. $d=OO'$ — борборлорунун арасындагы аралык, $d<R+R'$ болсо, айланалардын арасындагы эң чоң (кичине) аралыкты тапкыла. *Көрсөтмө*. Сынык сызыктын касиетинен пайдалангыла.

2. Туюк томпок сынык сызыктын каалаган эки чокусунун арасындагы аралык сынык сызыктын узундугунун жарымынан чоң болбой тургандыгын далилдегиле.
3. Ички бурчтарынын суммасы $7\,200^{\circ}$ ка барабар болгон томпок көп бурчтук болобу? Болсо анын жактарынын саны канча?
4. Томпок беш бурчтуктун диагоналдарынын суммасы анын жарым периметринен чоң болоорун далилдегиле.
5. Томпок төрт бурчтуктун бир жагы a га барабар. Каршысындагы жагы андан 6 эсе, калган жактары 2; 3 эсе чоң болсо, ал төрт бурчтукка ичтен айлана сызууга болобу?
6. Эгерде томпок төрт бурчтуктун бардык бурчтары барабар болсо, анда ал тик бурчтук болоорун далилдегиле.
7. Айланага сырттан сызылган трапециянын карама-каршы жактарынын суммалары барабар болоорун далилдегиле.
8. Ички бурчтарынын бири 150° ка барабар болгон туура көп бурчтук болобу? Анын жактарынын саны канча?
9. Туура беш бурчтуктун диагоналдары барабар. Далилдегиле.
10. Туура n бурчтуктун жактарынын ортолору экинчи туура n бурчтуктун чокулары болоорун далилдегиле.
11. Туура 12 бурчтуктун тышкы бурчун тапкыла.
12. Туура көп бурчтуктун тышкы бурчу 24° ка барабар. Анын жактарынын санын тапкыла.
13. Туура беш бурчтукта кесилишүүчү диагоналдарынын кесиндилеринин бири беш бурчтуктун жагына барабар болоорун далилдегиле.
14. Диаметри a га барабар болгон айланага туура алты бурчтук ичтен сызылган. а) Туура 6 бурчтуктун периметрин; б) айлананын узундугун тапкыла.
15. Ордо оюну тегерек аянтчада өткөрүлөт. Ордону чектеген айлананын радиусу 7 м. Айлананын узундугун тапкыла.
16. Машинанын дөңгөлөгүнүн диаметри 75 см. Машинанын дөңгөлөгү 10 жолу айланганда ал кандай аралыкты өтөт?
17. Радиусу R ге барабар болгон айлананын диаметрин: а) a га чоңойтсо (кичирейтсе); б) k эсе чоңойтсо (кичирейтсе), анда берилген айлананын узундугу кандай өзгөрөт?
18. Ромбдун жагы 15 см, ал эми бурчу 30°. Бул ромбго ичтен сызылган айлананын узундугун тапкыла.

VIII глава ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ

§ 37. ЖӨНӨКӨЙ ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ

37.1. ФИГУРАЛАРДЫН АЯНТТАРЫ ЖӨНҮНДӨГҮ ТҮШҮНҮК

Аянтты өлчөө байыркы мезгилден бери келаткан түшүнүктөрдүн бири. Биздин эрага чейинки III кылымда эле гректер жерди өлчөө дегенди геометрия деген сөз менен айкалыштырганы бекер эмес.

Аянт жөнүндөгү түшүнүк менен силер башталгыч мектептин математика курсунан эле таанышсыңар. Биз мында аны тереңирээк кароого аракет кылабыз. Аянт чоңдук катарында каралат. Ошондуктан адегенде аны өлчөөнүн бирдиги тандалып алынышы керек. Аянтты өлчөөнүн бирдиги катары жагы узундук бирдигине барабар болгон квадраттын аянты кабыл алынат. Аянт чоңдук болгондуктан, аларды өз ара кошууга, ошондой эле аны оң санга көбөйтүүгө болот. Бул амалдардын натыйжасында дайыма аянт келип чыгат.

Аянтын аныкташ керек болгон нерсени, тилкени же нерсенин бетин фигура катары кароого болот. Ал тегиздикте деп эсептелет.

F фигурасы берилсин. Анын аянтын $S\,(F)$ аркылуу белгилейбиз (S — латын алфавитинин баш тамгасы, «эс» деп окулат).

Эми жагы e бирдик кесиндисине барабар болгон бирдик квадраттын аянтын e^2 аркылуу белгилейбиз. F фигурасынын аянтын табыш үчүн аянты e^2 болгон бирдик квадрат ал фигурага ирети боюнча канча жолу батаарын билүү керек болот.

Эгерде

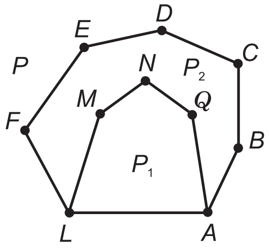
$$S(F)=k\cdot e^2 \qquad (1)$$

болсо, анда k саны берилген өлчөө бирдигинде аянттын сан маанисин туюнтат. Мында F фигурасынын ичине ирети боюнча бирдик квадрат k жолу батат деп эсептелет. Мисалы, S=9 см^2 болсо, k=9, e^2=1 см^2 деп түшүнөбүз.

F жөнөкөй фигура, мисалы тик бурчтук же параллелограмм болсо, анда k нын маанисин табуу оңой. Ал эми F ийри сызык менен чектелген фигура болсо, анда k нын маанисин табуу кыйла татаал болот. Жалпысынан алганда, жогорудагыдай жол менен аянтты аныктоо теориялык жактан да, практикалык жактан да орчундуу кыйынчылыктарга дуушар болот.

Биз төмөндө жөнөкөй көп бурчтуктардын аянттарын табууга токтолобуз.

37.2. КӨП БУРЧТУКТУН АЯНТЫ



123-сүрөт.

$ABCDEFL$ жөнөкөй көп бурчтугу берилсин (123-сүрөт). Аны P аркылуу белгилейбиз.

Ал көп бурчтукту ичинен алынган $LMNQA$ сынык сызыгы аркылуу эки көп бурчтукка ажыратууга болот: $ALMNQ$ (аны P_1 аркылуу белгилейбиз) жана $ABCDEFLMNQ$ (аны P_2 аркылуу белгилейбиз).

Ал эки көп бурчтук ички жалпы чекитке ээ болбойт, алар да жөнөкөй көп бурчтуктар болушат. Бул учурда P_1 жана P_2 көп бурчтуктарынын суммасы P көп бурчтукту түзөт. Аны $P=P_1+P_2$ деп жазабыз же P көп бурчтугу P_1 жана P_2 көп бурчтуктарына ажыратылган деп эсептейбиз.

Аянт — бул жагы узундук бирдигинен турган квадрат менен туюнтулуучу жалпак фигуранын чени болуп эсептелет.

Аянттын далилдөөсүз кабыл алынган төмөндөгүдөй касиеттери бар:

1) Барабар фигуралар барабар аянттарга ээ.

2) Эгерде фигура бөлүктөргө бөлүнгөн болсо, анда анын аянты ошол бөлүктөрдүн аянттарынын суммасына барабар.

Кыскача айтканда, каалагандай фигуранын аянтын табуу талап кылынса, анда жагы узундук бирдигинен турган канча квадратты ошол фигурага батыштырууга болоорун аныктоо зарыл.

Жогорудагы түшүнүктөрдүн негизинде дагы төмөндөгүнү айтууга болот. Аянттары барабар болгон көп бурчтуктар бирдей чоңдукта деп аталат. Эки көп бурчтук чектүү сандагы барабар бөлүктөргө бөлүнгөндө алардын тиешелүү бөлүктөрү барабар болсо, анда аларды бирдей түзүлгөн деп айтууга болот. Демек, бирдей түзүлгөн көп бурчтуктар сөзсүз бирдей чоңдукта болушат. Аларга мисалдар кийинки параграфтарда келтирилет.

37.3. ТИК БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

54-теорема. **Тик бурчтуктун аянты жанаша жаткан эки жагынын көбөйтүндүсүнө барабар.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ тик бурчтугу берилип, жанаша жаткан жактары a, b болсун. Аянтын S аркылуу белгилейли.

$$S=a\cdot b \qquad (1)$$

болоорун далилдейбиз. Бул аянтты жагы e бирдик кесиндисине барабар болгон бирдик квадраты аркылуу да

$$S=a\cdot b\cdot e^2 \qquad (2)$$

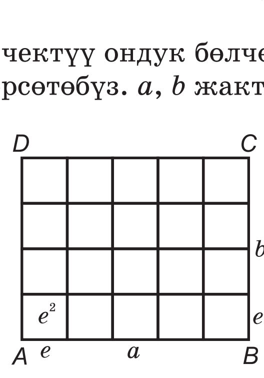
түрүндө жазууга болот, мында e^2 бирдик квадраттын аянты, аны практикада м^2 же дм^2, же см^2 ж. б. аркылуу туюнтуп жазышат.

Тик бурчтуктун a, b жактарынын узундуктарына карата үч учур каралышы мүмкүн.

1) Эгерде жактары a=5 см жана b=4 см (e=1 см) болгон тик бурчтук берилсе (124-сүрөт), анда жагы 1 см же аянты 1 см^2 болгон бирдик квадраттарды ага ирети боюнча тыгыз кылып 20 жолу жайлаштырууга болот. Мында S=20 см^2 экендигин силер билесиңер. Демек, тик бурчтуктун аянтын узундугун туурасына көбөйтүп таптык.

Жалпы учурда, $ABCD$ тик бурчтугунун жактары a жана b натуралдык сандар болсо, анда e бирдик кесиндисин AB жагына a жолу, BC жагына b жолу өлчөп коюуга болот. Анда берилген тик бурчтук $a\cdot b$ сандагы бирдик квадраттардан турат (124-сүрөт). Мында ар бир бирдик квадраттын аянты бирге барабар болгондуктан, берилген тик бурчтуктагы бардык бирдик квадраттардын аянттарынын суммасы $a\cdot b$ санына барабар болот. Демек, берилген тик бурчтуктун аянты $S=a\cdot b$ га барабар, б. а. (1) барабардык туура.

2) Тик бурчтуктун жактары a менен b чектүү ондук бөлчөк болгондо да (1) формула туура болоорун көрсөтөбүз. a, b жактары ондук белгилеринин саны n ден чоң болбогон чектүү ондук бөлчөк аркылуу туюнтулсун. Ал бирдик кесиндини барабар 10^n бөлүктөргө бөлүү аркылуу алына тургандыгы белгилүү. $e_1=\dfrac{e}{10^n}$ деп эсептейли.



124-сүрөт.

Эми $ABCD$ тик бурчтугунда e_1 бирдик кесиндисин AB жагына $a_1=a\cdot 10^n$, BC жагына $b_1=b\cdot 10^n$ жолу өлчөп коюуга болот. Мында a_1, b_1 сандары натуралдык сандар болоору түшүнүктүү. Анда аларга 1-учурду колдонууга мүмкүн:

$$S=a_1 \cdot b_1=a \cdot b \cdot 10^{2n} \tag{3}$$

саны бирдик квадраттар болот.

Демек, бул учурда да, тик бурчтуктун аянты жанаша жаткан a_1, b_1 эки жагынын көбөйтүндүсүнө барабар, башкача айтканда (1) барабардык туура.

3) a жана b сандарынын жок дегенде бири чексиз ондук бөлчөк аркылуу туюнтулган учурду карайбыз.

Анда аларды жакындаштырылган сандар аркылуу туюнтууга болот. Ошондуктан алардын көбөйтүндүсү жакындаштырылган сандарды көбөйтүү эрежелерине негизделген. a санынын ондук үлүштүк белгисине чейинки тактыктагы кеми менен алынган жакындаштырылган мааниси a_1 болсун, ашыгы менен алынган жакындаштырылган мааниси a_2 болсун: $a_1<a<a_2$. Ошондой эле тактыкта алынган b санынын жакындаштырылган маанилери b_1 (кеми менен) жана b_2 (ашыгы менен) болсун: $b_1<b<b_2$. Бул учурда a_1, a_2, b_1, b_2 сандарынын ар бири чектүү ондук бөлчөк болуп калат. Анда $S_1=a_1 \cdot b_1$ жана $S_2=a_2 \cdot b_2$ аянттарына ээ болобуз.

Жактары a_1, b_1 болгон тик бурчтук берилген тик бурчтуктун ичинде, ал эми жактары a_2, b_2 болгон тик бурчтук берилген тик бурчтуктун сыртында болуп калат. Демек, берилген тик бурчтуктун аянты $a_1 \cdot b_1$ жана $a_2 \cdot b_2$ сандарынын арасында жатат. Мында $a_1 \cdot b_1$ жана $a_2 \cdot b_2$ маанилери $a \cdot b$ санынын алдын ала каалаган тактыкта берилген жакындаштырылган маанилери. Эгерде n ди каалаганчалык чоң кылып алсак, анда алар $a \cdot b$ санына жакындайт. Демек, бул учурда да $S=a \cdot b$ болот (Бул жөнүндөгү толук маалымат алгебра курсунан силерге белгилүү).

Ошентип, тик бурчтуктун жактары a жана b каалагандай оң сандар болсо, анда анын аянты $S=a \cdot b$ (1) болот. Теорема далилденди.

Эгерде $b = a$ болсо, тик бурчтук квадрат болуп калат. Анда жагы a га барабар болгон квадраттын аянтын табуу формуласы (1) ден:

$$S=a^2 \tag{4}$$

болот.

КӨНҮГҮҮЛӨР

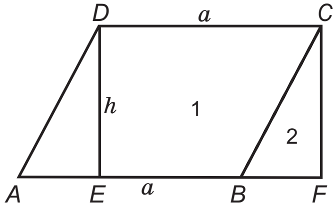
1. Жер участогунун аянты 10 га. Эгерде аянтты өлчөө бирдиги үчүн квадраттык: а) километрди; б) метрди; в) ар ды алсак, анда берилген аянттын сан мааниси канча болот?

2. Төмөндөгүлөрдү эсептегиле: 1) 8,2 дм^2+780 см^2;
   2) 1,6 м^2+640 дм^2; 3) 6 ар−204 м^2; 4) 4 га+70000 м^2
3. Жактары 16 см жана 25 см болгон тик бурчтуктун аянтын эсептегиле.
4. Квадраттын жагы 4,5 дм. Аянтын эсептегиле.
5. Квадрат формасындагы эки жер участогунун жактары 60 м жана 80 м. Ал эки участокко тең чоңдукта болгон квадрат формасындагы жер участогунун жагын тапкыла.
6. Квадраттын диагоналы d. Аянтын тапкыла.
7. Радиусу R ге барабар болгон тегерекке: а) ичтен; б) сырттан сызылган квадраттын аянтын тапкыла.
8. Бир эле тегерекке сырттан жана ичтен сызылган квадраттардын аянттарынын катышын тапкыла.
9. Эгерде квадраттын ар бир жагын: 1) 4 эсе чоңойтсок; 2) 2,5 эсе кичирейтсек, анда квадраттын аянты кандай өзгөрөт?
10. Квадраттын аянты: 1) 2 эсе чоңойсун; 2) 9 эсе кичирейсин үчүн анын ар бир жагын кандай өзгөртүү керек?
11. Туурасы 3 см болгон тик бурчтуктан аянты 9 см^2 болгон квадратты кесип алышты. Эгерде кесип алынгандан кийинки тик бурчтуктун аянты 36 см^2 болуп калса, анда ал тик бурчтуктун аянтын тапкыла.
12. Тик бурчтук формасындагы жер участогунун узуну 242,5 м жана туурасы 81,6 м. Участоктун аянтын тапкыла, маанисин *гектар* жана *ар* аркылуу туюнткула.
13. Тик бурчтуктун аянты 80 га, узуну 2 км. Периметрин эсептегиле.
14. Эгерде тик бурчтуктун жактарынын катышы 5 : 7 ге, аянты 140 дм^2 болсо, анын жактарын тапкыла.
15. Эгерде тик бурчтуктун периметри 96 м, ал эми аянты 540 дм^2 болсо, анын жактарын тапкыла.

§ 38. ПАРАЛЛЕЛОГРАММДЫН АЯНТЫ

55-теорема. **Параллелограммдын аянты негизин бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ параллелограммы берилсин (125-сүрөт). $AB=a$ — негизи, $ED=h$ — бийиктиги. Бул параллелограммды $EFCD$ тик бурчтугу менен салыштырабыз. $EBCD$ — жалпы бөлүк, $\Delta AED=\Delta BFC$.



125-сүрөт.

Ошондуктан $S(ABCD)=S(\Delta AED)+S(EBCD)=S(\Delta BFC)+S(EBCD)=$
$=S(EFCD)$.

$$S(ABCD)=S(EFCD)=EF\cdot ED=a\cdot h.$$

Демек,

$$S(ABCD)=a\cdot h.$$

Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Параллелограммдын жагы 4,5 дм, ал жакка түшүрүлгөн бийиктиги 2,6 дм. Аянтын тапкыла.

2. Параллелограммдын жактары 15 см жана 12 см, бийиктиги 6 см. Анын экинчи бийиктигин эсептегиле. Маселенин канча чыгарылышы бар?

3. Бирден жактары барабар, ал жактарына түшүрүлгөн бийиктиктери барабар болгон параллелограмм жана тик бурчтук тең чоңдукта болоорун далилдегиле. Аларды бирдей түзүлгөн деп эсептөөгө болобу?

4. Параллелограммдын аянты 2,4 $м^2$. а) Жагы 1,5 м болсо бийиктигин; б) бийиктиги 0,6 м болсо, ага тиешелүү жагын эсептегиле.

5. Параллелограммдын жактары 24 дм жана 18 дм, ал эми алардын арасындагы бурчу: а) 30°; б) 45°; в) 60° болсо, аянтын тапкыла.

6. Эки бийиктиги жана периметри боюнча параллелограммдын аянтын аныктагыла.

7. Параллелограммдын жагы a, ал эми диагоналы d га барабар болуп, аны менен α бурчун түзөт. Параллелограммдын аянтын тапкыла.

8. Параллелограммдын жактары 14 м жана 8 м, ал эми аянты 56 $м^2$ болсо, параллелограммдын тар бурчун тапкыла.

9. xOy системасындагы параллелограммдын чокулары $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(6;5)$, $C(2;5)$ чекиттеринде жатат. Анын аянтын тапкыла.

10. Ромбдун жагы 14 см, бийиктиги 6 см. Аянтын аныктагыла.

11. Ромбдун аянты 10,6 $дм^2$, жагы 2,5 дм болсо, бийиктигин аныктагыла.

12. Ромбдун аянты диагоналдарынын көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар. Далилдегиле.

13. Ромбдун жагы 12 см, бурчу 60° болсо, аянтын эсептегиле.

14. Ромбдун аянты S, бир бурчу α болсо, жагын тапкыла.

15. Ромбдун жагы a. Тапкыла: а) аянты S ке барабар болсо, ромбго ичтен сызылган айлананын радиусун; б) ичтен сызылган айлананын радиусу r болсо, ромбдун аянтын.

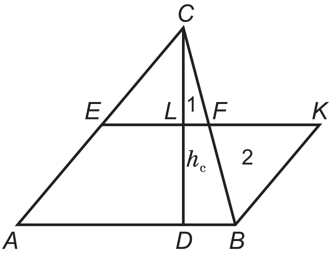
16. Ромбдун бийиктиги 48 м, ал эми кичине диагоналы 52 м болсо, анын аянтын тапкыла.

17. Ромбдун диагоналдарынын катышы 2 : 3 кө барабар, аянты 12 см^2. Анын диагоналдарын тапкыла.

§ 39. ҮЧ БУРЧТУКТУН АЯНТЫ

56-теорема. **Үч бурчтуктун аянты негизи менен ага түшүрүлгөн бийиктигинин көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар.**

Д а л и л д ө ө. ΔABC нын $AB=c$ негизи, $CD=h_c$ бийиктиги болсо, $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ боло тургандыгын далилдейбиз (126-сүрөт).



126-сүрөт.

EF орто сызыгын жүргүзүп, анын уландысына $EF=FK$ кесиндисин өлчөп коебуз. B менен K ны туташтырабыз. $ABKE$ параллелограммы келип чыгат. ($AB\|EK$ жана $AB=EK$).

Мында $\Delta EFC=\Delta BKF$ (1-белгиси боюнча, $EF=FK$, $CF=FB$, $\angle 1=\angle 2$).

$$S(\Delta ABC)=S(ABFE)+S(\Delta EFC)=S(ABFE)+S(\Delta BKF)=$$
$$=S(ABKE)=AB\cdot LD=AB\cdot\frac{CD}{2}=c\cdot\frac{h_c}{2}.$$

Мында $LD=\frac{1}{2}CD$. Ошентип, $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ болот. Теорема далилденди.

Бул теорема берилген үч бурчтуктун калган жактарына карата да туура болот: $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ же $S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}b\cdot h_b$.

КӨНҮГҮҮЛӨР

Үч бурчтуктун элементтерин белгилөөлөр жогоруда берилген.

1. Үч бурчтуктун бир жагы 34,5 дм, ага түшүрүлгөн бийиктиги 12,6 дм. Аянтын тапкыла.

2. Үч бурчтуктун аянты 36 м^2. Эгерде: а) жагы 12 м болсо, ага түшүрүлгөн бийиктигин; б) бийиктиги 4 м болсо, ага туура келүүчү жагын тапкыла.

3. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи a, каптал жагы b болсо, аянты $S=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$ (1) формуласы менен аныкталарын далилдегиле.

4. Эгерде тең капталдуу үч бурчтуктун негизи жана каптал жагы: а) a=8 см, b=6 см; б) a=4 м, b=2,8 м болсо, ал үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

Көрсөтмө. (1) формуланы пайдалангыла.

5. Тең капталдуу үч бурчтуктун каптал жагы 12,8 см. Эгерде негизиндеги бурчу: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 40° болсо, үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

6. Тең жактуу үч бурчтуктун жагы a. Аянтын тапкыла.

7. Тең жактуу үч бурчтуктун аянты S. Жагын тапкыла.

8. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери a жана b. Аянты $S=\frac{1}{2}ab$ (2) болоорун далилдегиле.

9. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери: 1) a=1,6 м, b=4,5 м; 2) a=5 см, b=7,6 см болсо, анын аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 8-маселедеги (2) формуланы пайдалангыла.

10. ABC тик бурчтуу үч бурчтугунда a жана b анын катеттери, c — анын гипотенузасы, h — тик бурчтун чокусунан түшүрүлгөн бийиктик болсо, $ab=ch$ болоорун далилдегиле.

11. Эгерде тик бурчтуктун бир жагы үч бурчтуктун бир жагына дал келип, экинчи жагы үч бурчтуктун ал жагына түшүрүлгөн бийиктигинин жарымына барабар болсо, анда тик бурчтук менен үч бурчтуктун аянттары бирдей болоорун далилдегиле.

12. ABC үч бурчтугунун жактары a, b, c берилген. Анын аянты $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3) формуласы боюнча аныкталаарын далилдегиле, мында p — үч бурчтуктун жарым периметри.

Көрсөтмө. Жактары боюнча үч бурчтуктун бир бийиктигин эсептеп, андан кийин формуланы жөнөкөйлөштүрүү керек.

13. Эгерде үч бурчтуктун жактары: 1) 29; 25; 6; 2) 5; 6; 9; 3) 6; 5; 2,2; 4) 5; 4; $\sqrt{17}$ болсо, аянтын эсептегиле.

14. Үч бурчтуктун жактары 25 м, 29 м, 36 м болсо, анын эң кичине бийиктигин тапкыла.

15. Үч бурчтуктун жактары 13 см, 14 см, 15 см болсо, эң чоң бийиктигин тапкыла.

16. Радиусу R ге барабар болгон тегерекке ичтен сызылган туура үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

17. Радиусу r ге барабар болгон тегерекке сырттан сызылган туура үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

18. *ABC* үч бурчтугунун a, b жактары, алардын арасындагы γ бурчу берилсе, ал үч бурчтуктун аянты $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ (4) формуласы аркылуу табылаарын далилдегиле.

19. Эгерде үч бурчтуктун эки жагы жана алардын арасындагы бурчу: 1) a=12; b=8,4; γ=30°; 2) a=7,8; b=15; γ=50°; 3) b=3,4; c=5; α=70°; 4) a=0,8; c=0,6; β=110°; болсо, аянтын тапкыла.

Көрсөтмө. 18-маселедеги (4) формуланы пайдалангыла.

20. *ABC* үч бурчтугунун a жагы жана ага жанаша жаткан β, γ эки бурчу берилсе, анын аянтын $S=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}$ (5) формула боюнча табууга болоорун далилдегиле, мында $\alpha=180°-(\beta+\gamma)$.

Көрсөтмө. Бурчтун синусунун аныктамасын колдонуп, b жана c жагын табуу сунуш кылынат.

21. Эгерде үч бурчтуктун бир жагы, ага жанаша жаткан эки бурчу: 1) a=16; β=120°; γ=30°; 2) a=15,6; β=48°; γ=70°; 3) b=8; α=37°; γ=63°; 4) c=0,8; α=112°; β=40°; болсо, анын аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 20-маселедеги (5) формуланы пайдалануу сунуш кылынат.

22. *ABC* тик бурчтуу үч бурчтугунун бир катети жана гипотенузасы берилген. Аянтын эсептегиле.

23. *ABC* үч бурчтугунун a, b, c жактары берилген. Үч бурчтукка: а) сырттан сызылган айлананын радиусу $R=\frac{abc}{4S}$; б) ичтен сызылган айлананын радиусу $r=\frac{S}{p}$ болоорун далилдегиле. Мында S — үч бурчтуктун аянты, p — жарым периметри.

24. 13-маселеде берилген үч бурчтукка: а) сырттан; б) ичтен сызылган айлананын радиусун тапкыла.

25. Берилген *ABC* үч бурчтугуна *BC* негизи боюнча аны менен бирдей аянтка ээ болгон *A′BC* үч бурчтугун түзгүлө.

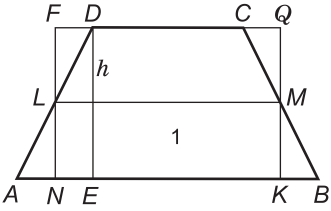
26. *ABC* үч бурчтугу берилген. Аны бирдей аянттарга ээ болгон төрт үч бурчтукка бөлгөндөй кылып *A* чокусу аркылуу түз сызыктар жүргүзгүлө.

27. Параллелограммдын диагоналдары аны бирдей аянтка ээ болгон төрт үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.

§ 40. ТРАПЕЦИЯНЫН АЯНТЫ

57-теорема. **Трапециянын аянты негиздеринин узундуктарынын суммасынын жарымын (орто сызыгын) бийиктигине көбөйткөнгө барабар.**

Д а л и л д ө ө. $ABCD$ трапециясы берилсин (127-сүрөт). $AB=a$, $DC=b$ негиздери, $DE=h$ — бийиктиги. LM — орто сызыгы,



127-сүрөт.

$LM=\frac{a+b}{2}$ боло тургандыгы белгилүү. L, M чекиттеринен трапециянын негиздерине перпендикуляр түз сызыктар жүргүзсөк, $NKQF$ тик бурчтугуна ээ болобуз: $NK=LM$, $FN=DE$.

Берилген трапеция менен тик бурчтукту салыштырабыз: $NKMCDL$ жалпы бөлүк, $\Delta ANL=\Delta LDF$, $\Delta KBM=$ $=\Delta MQC$, анткени тик бурчтуу үч бурчтуктардын тиешелүү гипотенузалары жана бирден тар бурчтары барабар.

$$S(ABCD)=S(\Delta ANL)+S(NKMCDL)+$$

$$+S(\Delta KBM)=S(\Delta LDF)+S(NKMCDL)+$$

$$S(\Delta MQC)=S(NKQF)=NK\text{Ч}FN=LM\text{Ч}DE=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

$$S(ABCD)=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Теорема далилденди.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Негиздери 15 см жана 19 см, ал эми бийиктиги 18 см болгон трапециянын аянтын тапкыла.
2. Трапециянын негиздери 3,5 дм жана 2,9 дм, ал эми аянты 2,56 дм^2. Трапециянын бийиктигин тапкыла.
3. Трапециянын бийиктиги 16 см, аянты 4 дм^2. Орто сызыгынын узундугун тапкыла.
4. Трапециянын аянты 288 см^2, негиздеринин катышы 4:5 ке барабар, бийиктиги 3,2 дм. Негиздерин эсептегиле.
5. Трапециянын чоң негизи 42 м, бийиктиги 15 м, ал эми каптал жактарынан негизине түшүрүлгөн проекциялары бийиктигине барабар. Трапециянын аянтын тапкыла.
6. Тең капталдуу трапециянын негиздери 5,1 дм жана 6,9 дм, каптал жагы 41 см. Аянтын тапкыла.
7. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи a, каптал жагы c, негизиндеги тар бурчу α болсо, анын аянты $S=(a-c\cdot\cos\alpha)\cdot c\cdot\sin\alpha$ (1) формуласы аркылуу табылаарын далилдегиле.
8. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи $a=22$ см, каптал жагы $c=8$ см жана негизиндеги тар бурчу: 1) 30°; 2) 45°; 3) 70°; 4) 20° берилген. Аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 7-маселедеги (1) формуланы пайдалангыла.

9. Тик бурчтуу трапециянын негизиндеги тар бурчу 30°, негиздеринин суммасы k жана каптал жактарынын суммасы q. Трапециянын аянтын тапкыла.

10. Трапециянын негиздери 6 дм жана 2 дм, каптал жактары 0,13 м жана 0,37 м. Аянтын тапкыла.

11. Тең капталдуу трапециянын чоң негизи 22 м, каптал жагы 8,5 м жана диагоналы 19,5 м. Трапециянын аянтын аныктагыла.

12. Тең капталдуу трапециянын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу. Негиздери 24 см жана 40 см. Анын аянтын эсептегиле.

13. Бийиктиги h, ал эми диагоналдары өз ара перпендикуляр болгон тең капталдуу трапециянын аянтын аныктагыла.

14. Трапециянын негиздери 1,42 м жана 0,89 м, ал эми диагоналдары 1,2 м жана 1,53 м. Аянтын тапкыла.

15. Радиусу R ге барабар болгон тегеректин борборунун бир жагында жатып, бири-бирине параллель болгон эки хорда жүргүзүлгөн, ал хордалар 60° жана 120° жааларга тирелген. Хордалардын учтарын туташтыргандан пайда болгон трапециянын аянтын тапкыла.

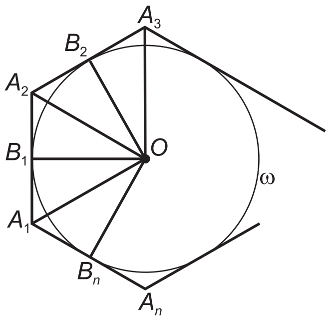
16. ABC үч бурчтугуна DE орто сызыгы ($D\in AC$, $E\in BC$) жүргүзүлгөн. 1) ABC жана DEC үч бурчтуктарынын аянттарынын катышын; 2) ABC үч бурчтугу менен $ACED$ трапециясынын аянттарынын катышын; 3) DEC үч бурчтугунун жана $ACED$ трапециясынын аянттарынын катышын тапкыла.

17. Тең капталдуу трапеция айланага сырттан сызылган. Каптал жагы жануу чекити аркылуу 0,4 дм жана 0,9 дм узундуктагы кесиндилерге бөлүнгөн. Трапециянын аянтын тапкыла.

§ 41. АЙЛАНАГА СЫРТТАН (ИЧТЕН) СЫЗЫЛГАН КӨП БУРЧТУКТАРДЫН АЯНТТАРЫ

Адегенде томпок көп бурчуктуктун аянтын аныктоо жөнүндөгү жалпы суроого кыскача токтолобуз. Ал § 37.2 тагы аныктамага негизделген.

Каалагандай P жалпак көп бурчтугу берилсин. Аны D_i (i=1, 2, ..., n) үч бурчтуктарга бөлөбүз (алар ички жалпы чекитке ээ болушпайт жана суммасы P көп бурчтукту түзөт). Ал үч бурчтуктардын ар биринин тиешелүү негизи a_i, ал эми ага тиешелүү бийиктиги h_i болсун, анда, алар аркылуу $S_i(\Delta_i)=\frac{1}{2}a_i\cdot h_i$ аянтын табууга болот. Эми P көп бурчтугунун аянты Δ_i үч бурчтуктарынын



128-сүрөт.

аянттарынын суммасынан турат деп эсептөөгө болот $S(P)=S_1(\Delta_1)+S_2(\Delta_2)+\ldots+S_n(\Delta_n)$.

Демек, көп бурчтуктун аянтын эсептөө үчүн (жалпы учурда) аны үч бурчтуктарга бөлүп, ал үч бурчтуктардын аянттарынын суммасын табуу керек.

$w(O, r)$ айланасына сырттан сызылган $A_1 A_2 \ldots A_n$ көп бурчтугу берилсин (128-сүрөт), аны Q аркылуу белгилейбиз. Анын жактарынын жануу чекиттери тиешелүү түрдө $B_1 B_2 \ldots B_n$ болушсун.

O борборун берилген көп бурчтуктун чокулары жана жануу чекиттери менен туташтырабыз. $OB_1=OB_2=\ldots OB_n=r$ болот.

58-теорема. **Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты анын периметринин жарымын берилген айлананын радиусуна көбөйткөнгө барабар:**

$$S(A_1A_2\ldots A_n)=S_1(A_1A_2O)+S_2(A_2A_3O)+\ldots+S_n(A_nA_1O)=$$

$$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OB_1+\frac{1}{2}A_2A_3\cdot OB_2+\ldots+\frac{1}{2}A_nA_1\cdot OB_n=p\cdot r$$

Мындагы S, S_1, ..., S_n көп бурчтуктун жана тиешелүү үч бурчтуктардын аянттары, $P=A_1A_2+\ldots+A_nA_1$ — көп бурчтуктун периметри, p — анын жарым периметри. Демек,

$$S(Q)=p\cdot r \qquad (1)$$

болот. Теорема далилденди.

1-натыйжа. **Айланага сырттан сызылган туура n бурчтуктун аянты**

$$S_n=\frac{n\cdot a\cdot r}{2} \qquad (2)$$

болот. Мында S_n — туура n бурчтуктун аянты, $P_n=na$ — периметри, a — анын бир жагы, r — ичтен сызылган айлананын радиусу. Бул (1) формуладан алынат.

2-натыйжа. **Жактары a, b, c болгон айланага сырттан сызылган үч бурчтуктун аянты**

$$S=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=pr \qquad (3)$$

болот.

Мында p — үч бурчтуктун жарым периметри.

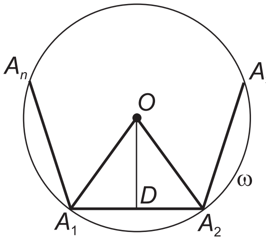
59-теорема. **Туура n бурчтуктун аянты анын жарым периметрин апофемасына көбөйткөнгө барабар.**

Далилдөө. $A_1A_2\ldots A_n$ туура n бурчтугу берилсин, аны Q_n аркылуу белгилейбиз. $A_1A_2=a$ деп эсептейли (129-сүрөт). Туура

n бурчтукка сырттан сызылган айлана $w(O, R)$ болсун. $OA_1=R$, OD — апофема болот. $\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3=...=\Delta A_nOA_1$. Бул үч бурчтуктардын аянттарынын суммасы Q_n көп бурчтугунун аянтына барабар. $S(Q_n)=$ $=n\cdot S(A_1OA_2)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot OD$. $\frac{a\cdot n}{2}=p$ — бул Q_nдин жарым периметри. Демек,

$$S(Q_n)=p\cdot OD.$$

Теорема далилденди.



129-сүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Томпок төрт бурчтуктун диагоналдары өз ара перпендикулярдуу болушса, анда анын аянты диагоналдарынын көбөйтүндүсүнүн жарымына барабар болоорун далилдегиле.

2. $ABCD$ томпок төрт бурчтугунун диагоналдары бири-бирине перпендикулярдуу жана узундуктары 12,4 см, 15 см. Анын аянтын тапкыла.

3. Аянты берилген параллелограммдын аянтына барабар болгондой үч бурчтукту түзгүлө.

4. Төрт бурчтуктун жактары 5 м, 4 м, 3 м жана 2,5 м. Анын бир диагоналы 4,5 м. Аянтын тапкыла.

Көрсөтмө. Диагоналдары аркылуу аныкталган эки үч бурчтуктун аянттарын табуу сунуш кылынат.

5. Үч бурчтуктун медианасы ал үч бурчтукту бирдей аянтка ээ болгон 2 үч бурчтукка бөлөрүн далилдегиле.

6. Айланага сырттан сызылган төрт бурчтуктун аянты анын периметринин жарымын айлананын радиусуна көбөйткөнгө барабар болоорун далилдегиле.

7. Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун периметри 6 дм, ал эми аянты 2,4 дм^2. Айлананын радиусун тапкыла.

8. Радиусу 3 дм болгон айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты 60 дм^2. Көп бурчтуктун периметрин тапкыла.

9. Туура алты бурчтуктун жагы a га барабар. Аянтын тапкыла.

10*. Жагы a га барабар болгон туура n бурчтуктун аянтын $S=\frac{na^2}{4}\cdot\frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1) формуласы аркылуу аныктоого боло тургандыгын далилдегиле, S — аянт, $n>2$.

11. Жагы a га барабар болгон туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) он эки бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 10-маселедеги (1) формуланы пайдалангыла.

12. 11-маселени a=4 м үчүн чыгаргыла.

13.*Радиусу R ге барабар болгон айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун аянтын $S = nR^2 \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$ (2) формуласы менен табууга мүмкүн экендигин далилдегиле.

14. Радиусу R ге барабар болгон айланага ичтен сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) он эки бурчтуктун аянтын эсептегиле.

Көрсөтмө. 13-маселедеги (2) формуланы пайдалануу сунуш кылынат.

15. 14-маселени R=2 дм үчүн эсептегиле.

16.*Радиусу r ге барабар болгон айланага сырттан сызылган туура n бурчтуктун аянтын $S = nr^2 \cdot \dfrac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$ (3) формуласы аркылуу эсептөөгө болоорун далидегиле.

17. Радиусу r ге барабар болгон айланага сырттан сызылган туура: 1) үч; 2) төрт; 3) беш; 4) алты; 5) жети; 6) сегиз; 7) он; 8) он эки бурчтуктун аянтын тапкыла.

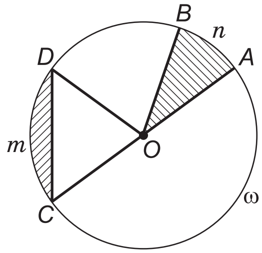
Көрсөтмө. 16*-маселедеги (3) формуланы пайдалангыла.

18. 17-маселени r=10 см үчүн эсептегиле.

§ 42. ТЕГЕРЕКТИН ЖАНА АНЫН БӨЛҮКТӨРҮНҮН АЯНТТАРЫ

Айлана менен тегерек тыгыз байланышта. Тегиздиктин айлана менен чектелген бөлүгү **тегерек** деп аталат (130-сүрөт). Демек, тегерек — бул сызык эмес, ал тегиздиктин кандайдыр айлана менен чектелген бөлүгү. Ага көп эле мисалдарды келтирүүгө болот. Мисалы, тегерек диска, тегерек медаль, тегерек жетон ж. б. (130-сүрөт).

Тегерек айлана менен чектелгендиктен, айлананын борбору (O), радиусу (OA) жана диаметри (CA) тегеректин да борбору, радиусу жана диаметри болушат. Тегеректин радиусун R аркылуу белгилесек, OA=R болот. Демек, айланада жана анын ичинде жаткан чекиттер — ал айлана чектеп турган тегеректе жаткан чекиттер да болушат. Анда O борбору да ал тегеректин чекити болуп эсептелет. Ошентип, тегеректе жатуучу ар кандай M чекити үчүн $OM \leq R$ шарты аткарылат.



130-сүрөт.

Тегеректин аянтын көп бурчтуктун аянтын табууга окшоштуруп аныктоо мүмкүн эмес, анткени ал ийри сызык (айлана) менен чектелген. Ошондуктан анын аянтын табуунун жөнөкөй ыкмасын карап көрөбүз. Ал айлананын (тегеректин) ичтен сызылган туура n бурчтуктун аянтын табууга (§ 41, 59-теорема) жана айлананын узундугун (§ 35) табууга байланыштуу.

Айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун (Q_n) аянты

$$S(Q_n) = \frac{1}{2} P \cdot OD \qquad (1)$$

формуласы менен эсептеле тургандыгы белгилүү, мында P — Q_n туура n бурчтугунун периметри, OD — анын апофемасы (129-сүрөт).

Эгерде бул Q_n көп бурчтугунун жактарынын санын чексиз эки эселенте берсек, улам кийинки периметрлер чоңоё баштайт. Демек, n дин чоңоюшу менен (1) формуланын негизинде Q_n көп бурчтуктарынын аянттары да чоңоё беришет, алар тегеректин аянтына жакындашат, ошону менен бирге тегеректин аянтынан ашып кетпейт. Анткени, жактары эки эселенген туура көп бурчтуктар дайыма айлананын ичинде болушат.

Демек, айланага ичтен сызылган туура көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселентип чоңойткондо аларга туура келүүчү көп бурчтуктардын аянттарынын удаалаштыгынын умтулган предели берилген тегеректин аянтына барабар болот деп эсептөөгө болот.

Айланага сырттан сызылган көп бурчтукка карата да ушундай эле талкуулоону жүргүзүүгө болот. Мында сырттан сызылган көп бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселенткенде периметрлер кичирее баштагандыктан аларга туура келүүчү көп бурчтуктардын аянттары да кичирее тургандыгын эске алуу керек. Ошентип, (1) формуладан төмөндөгүнү алабыз:

Q_n көп бурчтугунун жактарынын санын чексиз эки эселентип чоңойткондо P периметри айлананын узундугуна, OD апофемасы айлананын радиусуна, $S(Q_n)$ аянты тегеректин аянтына умтулат. Тегеректин аянтын S аркылуу белгилесек, (1) формуладан

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R \text{ же } S = pR^2 \qquad (2)$$

болот, мында R — тегеректин радиусу.

Айланага ичтен сызылган туура n бурчтуктун жактарынын санын чексиз эки эселенткенде анын OD апофемасы ал айлананын радиусуна умтулушун төмөндөгүдөй да көрсөтүүгө болот.

A_1A_2 кесиндиси туура n бурчтуктун бир жагы болгондуктан, $\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n}$ — борбордук бурч, ал эми $\angle A_1OD = \frac{180°}{n}$ болот (129-сүрөт). ΔA_1OD тик бурчтуу үч бурчтук.

Тик бурчтуу үч бурчтуктун α тар бурчуна жанаша жаткан катеттин гипотенузага болгон катышы ал бурчтун косинусуна барабар экендиги белгилүү. Анда

$$\frac{OD}{R} = \cos\frac{180°}{n} \quad \text{же} \quad OD = R\cos\frac{180°}{n} \qquad (3)$$

болот, мында $OA_1 = R$ болот да, n чексиз чоңойгондо $\frac{180°}{n}$ бурчу кичирейип, нөлгө жакындайт. Бул учурда $\cos\frac{180°}{n}$ дин мааниси бирге жакындайт, бирок бирден чоң боло албайт. Анда (3) формулада OD апофемасы R ге жакындайт.

Тегеректин эки радиусу менен чектелген бөлүгү анын **сектору**[1] деп аталат. $w(O, R)$ тегерегине (айланага окшош белгилейбиз) OA жана OB радиустарын жүргүзсөк, тегеректин OAB бөлүгү анын секторун түзөт (130-сүрөт).

Бул секторго $\angle AOB=\alpha$ борбордук бурчу туура келет, аны сектордун бурчу деп да атайбыз.

Сектордун аянты анын борбордук бурчу аркылуу аныкталат. Эгерде 360° борбордук бурчка туура келүүчү тегеректин аянты $S=\pi R^2$ болсо, α борбордук бурчка туура келүүчү сектордун аянты:

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2\alpha°}{360°}. \qquad (4)$$

Сектордун аянты (4) формула аркылуу аныкталат.

Тегеректи кесип өтүүчү CD түз сызыгы тегеректи эки бөлүккө бөлөт, алардын ар бир тегеректин **сегменти**[2] деп аталат.

Бул тегеректин CD хордасы жана CmD жаасы менен чектелген бөлүгү катарында каралат (130-сүрөт). Сегменттин аянтын $S_{сег}$ аркылуу белгилейбиз. Анын аянтын табыш үчүн $CmDO$ секторунун аянтынан OCD үч бурчтугунун аянтын кемитебиз:

$$S_{сег} = S_{сек}(CmDO) - S(\Delta COD). \qquad (5)$$

[1] Латын сөзү, бөлүнүп алынуучу дегенди түшүндүрөт.
[2] Латын сөзү, кесинди, бөлүк, тилке дегенди түшүндүрөт.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Тегеректин радиусу: 1) 15 см, 2) 5 дм, 3) 4,6 м. Анын аянтын эсептегиле ($\pi \approx 3,14$ деп алгыла).
2. Тегеректин диаметри: 1) 13 м; 2) 20 см; 3) 12,4 дм. Анын аянтын тапкыла.
3. Эгерде тегеректин аянты: 1) 200,96 дм^2; 2) 7,065 м^2 болсо, анын радиусун эсептегиле.
4. Диаметри 1 дм болгон аба насосунун поршениндеги тегерегинин аянтын эсептегиле.
5. Устунду курчап байлаган жиптин узундугу 1,6 м. Устундун туурасынан кесилиши тегерек формасында болсо, анын аянтын эсептегиле.
6. Айлананын узундугу 18 см болсо, ал чектеп турган тегеректин аянтын эсептегиле.
7. Тегеректин аянты 113,04 дм^2 болсо, анын айланасынын узундугун тапкыла.
8. Эгерде тегеректин аянты ага сырттан сызылган квадраттын аянтынан 55,04 дм^2 ка кичине болсо, тегеректин аянтын тапкыла.
9. Туура: 1) үч; 2) төрт; 3) алты; 4) он эки бурчтукка ичтен жана сырттан сызылган тегеректин аянттарынын катышын тапкыла.

   Көрсөтмө. § 41 гы 13- жана 16-маселелердин (2) жана (3) формулаларынан пайдалангыла.
10. Радиустары 18 см жана 12 см болгон борбордош эки айлана аркылуу чектелген шакекченин аянтын тапкыла.
11. Радиусу 8 см, ал эми бурчу: 1) 24°; 2) 36°; 3) 120° болгон сектордун аянтын тапкыла.
12. Эгерде сектордун аянты Q, ал эми бурчу: 1) 75°; 2) $2^\circ30'$; 3) 150° болсо, сектордун радиусун эсептегиле.
13. Сектордун радиусу 3 см, ал эми аянты 6,28 см^2. Борбордук бурчун аныктагыла.
14. Радиусу R ге барабар болгон тегеректин: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30° жаасына туура келүүчү сегменттин аянтын тапкыла.
15. Хордасы a га барабар болгон жаа: 1) 120°; 2) 90°; 3) 60° болсо, анда ага туура келүүчү сегменттин аянтын тапкыла.

VIII ГЛАВАНЫ КАЙТАЛООГО СУРООЛОР

1. Аянттын бирдиги кантип тандалып алынат?
2. Аянттын сан маанисин кандай түшүнүүгө болот?
3. Аянттын чоңдугу эмнеден көз каранды болот?
4. Көп бурчтуктардын суммасы дегенди кандай түшүнөбүз?

5. Жөнөкөй көп бурчтуктун аянты дайыма боло тургандыгын түшүндүргүлө.
6. Көп бурчтуктун аянты кантип аныкталат?
7. Тик бурчтуктун аянты кантип табылат?
8. Параллелограммдын аянтын аныктоонун жолу кандай?
9. Үч бурчтуктун аянты кантип табылат?
10. Трапециянын аянты эмнеге барабар?
11. Айланага сырттан сызылган көп бурчтуктун аянты эмнеге барабар?
12. Туура көп бурчтуктун аянты кантип аныкталат?
13. Бирдей түзүлгөн көп бурчтуктардын аянттарынын катышы эмнеге барабар? Кантип аныкталат?
14. Тегеректин аянтын аныктоо жолун айтып бергиле.
15. Сектордун, сегменттин аянттары кандай жол менен табылат?

VIII ГЛАВАГА МАСЕЛЕЛЕР

1. Тик бурчтуктун периметри 30 м, аянты 56 $м^2$ болсо, анын жактарын эсептегиле.
2. Тең капталдуу трапеция айланага сырттан сызылган. Каптал жагы жануу чекиттери аркылуу 4 см жана 9 см ге бөлүнөт. Трапециянын аянтын тапкыла.
3. Негиздери 20 дм жана 60 дм, ал эми каптал жактары 13 дм жана 37 дм болгон трапециянын аянтын тапкыла.
4. Үч бурчтуктун медианалары аны аянттары барабар болгон алты үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.
5. Трапеция диагоналдары аркылуу төрт бөлүккө бөлүнгөн. Каптал жактарына жанаша жаткан бөлүктөрү бирдей чоңдукта болоорун далилдегиле.
6. Үч бурчтуктун негизине параллель болгон түз сызык анын аянтын тең экиге бөлөт. Ал түз сызык үч бурчтуктун каптал жактарын кандай катышта бөлөт?
7. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизинин каалаган чекитинен каптал жактарына чейинки аралыктардын суммасы негизинин учунан түшүрүлгөн бийиктигине барабар болоорун далилдегиле.
8. Тең капталдуу үч бурчтуктун ичинде жаткан каалагандай чекиттен жактарына чейинки аралыктардын суммасы анын бийиктигине барабар болоорун далилдегиле.
9. Айлананын радиусу R ге барабар. Сырттан (ичтен) сызылган тең жактуу үч бурчтуктун аянтын тапкыла.
10. Ромбдун диагоналдары m жана n болсо, анын аянты эмнеге барабар?
11. Параллелограммдын диагоналдары аны бирдей чоңдуктагы төрт үч бурчтукка бөлөөрүн далилдегиле.
12. Аянты 6 $см^2$ болгон үч бурчтук берилсин. Анын жактарын тең экиге бөлүп, бөлүү чекиттери удаалаш туташтырылган.